Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

1 • 2007

МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

Член-корреспондент НАН Украины **А. М. Ковалев**

Диагонализация линейных автономных динамических систем

A system of linear differential equations with constant coefficients is transformed to the linear-diagonal form. Explicit formulas of a nonlinear transformation of the Jordan normal form for the linear differential system to a linear-diagonal one are obtained. The case where all characteristic numbers of the system are equal to zero is considered separately. The integrals of linear autonomous dynamical systems are constructed.

Задача преобразования системы дифференциальных уравнений с помощью различного рода замен координат поставлена давно, и ее исследование продолжается и в настоящее время. Основная цель таких преобразований состоит в упрощении правых частей уравнений. Наибольшее возможное упрощение автономных систем дифференциальных уравнений состоит в обращении правых частей $(n-1)$-го уравнения в ноль, а в последнем уравнении — в единицу. Этого можно достичь, если в качестве $(n-1)$-й переменной принять $n-1$ интеграл, а оставшуюся переменную принять в качестве независимой переменной — времени. Следующей по простоте является линейно-диагональная форма $\dot{x}_i = \lambda_i x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Помимо простоты ее достоинством является выявление инвариантных многообразий $x_i = 0$ (поскольку эти дифференциальные уравнения являются уравнениями Леви-Чивита [1] инвариантных многообразий). Кроме того, достаточно просто находится и полное семейство интегралов [2]. Эти два свойства выделяют линейно-диагональную форму как наиболее предпочтительную из существующего множества нормальных форм дифференциальных уравнений. Наиболее полно вопросы преобразования изучены для линейных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. При ограничении линейными преобразованиями переменных построена жорданова нормальная форма [3], являющаяся линейной блочно-диагональной формой.

В настоящей работе с помощью нелинейного преобразования построена линейно-диагональная форма линейной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Получены явные формулы преобразования жордановых клеток к диагональному виду, с помощью которых и строится общее преобразование линейной системы к диагональному виду в случае, когда среди характеристических чисел есть хотя бы одно ненулевое.

Случай, когда все характеристические числа равны нулю, рассмотрен отдельно. Построены интегралы линейных систем.

1. Диагонализация жордановых клеток. Исследуется система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\dot{x} = Ax, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор, время $t \in T \subset (-\infty, \infty)$, точка означает дифференцирование по времени t, A — $n \times n$-матрица с постоянными элементами.

С помощью невырожденного линейного преобразования $x = Ly$ система (1) может быть приведена к виду [3]

$$\dot{y} = Jy, \tag{2}$$

где J — жорданова матрица. При этом действительным характеристическим числам λ матрицы A соответствует обычная жорданова клетка J_λ, а паре комплексно-сопряженных собственных чисел $\lambda = \alpha \pm \sqrt{-1}\beta$ соответствует жорданова клетка [4] J_α:

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad J_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha & -\beta & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \beta & \alpha & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & -\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \beta & \alpha \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Система (2) называется жордановой нормальной формой системы (1) и является блочно-диагональной формой, поскольку наряду с диагональной частью в ней присутствуют матричные блоки, соответствующие жордановым клеткам.

Для удобства изложения переменные системы (2), соответствующие действительным собственным числам, будем обозначать через y_i. Переменные, соответствующие комплексно-сопряженным собственным числам $\alpha \pm \sqrt{-1}\beta$, обозначим через u_j, v_j таким образом, что диагональному блоку системы (2) соответствует система $\dot{u}_j = \alpha u_j - \beta v_j$, $\dot{v}_j = \beta u_j + \alpha v_j$, а жорданова клетка J_α имеет вид (3). Преобразованную систему, имеющую только такие блоки второго порядка наряду с диагональными блоками $\dot{y}_i = \lambda y_i$, назовем линейно-диагональной, потому что в комплексифицированной форме [5] она будет иметь диагональный вид.

Следующие леммы дают преобразование систем, соответствующих жордановым клеткам J_λ, J_α, к диагональному виду для переменных z_i, ξ_k, η_k.

Лемма 1. *Системы, соответствующие жордановым клеткам J_λ $(\lambda \neq 0)$, J_α $(\beta \neq 0)$, приводятся к диагональному виду преобразованиями*

$$z_i = \sum_{s=0}^{i-1} \frac{(-1)^s}{s!} \left(\frac{\ln |y_1|}{\lambda} \right)^s y_{i-s}, \qquad i = 1, \dots, n_\lambda, \tag{4}$$

$$\xi_k = \sum_{s=0}^{k-1} \Phi^s(u_1, v_1) \frac{u_{k-s}}{s!}, \qquad \eta_k = \sum_{s=0}^{k-1} \Phi^s(u_1, v_1) \frac{v_{k-s}}{s!}, \tag{5}$$

$$\Phi(u_1, v_1) = \frac{1}{\beta} \arcsin \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + v_1^2}}, \qquad k = 1, \ldots, n_\alpha,$$

где n_λ, $2n_\alpha$ — размеры соответствующих жордановых клеток J_λ, J_α.

В случае $\alpha \neq 0$ система, соответствующая жордановой клетке J_α, может быть приведена к диагональному виду с использованием логарифмических функций.

Лемма 2. *Система, соответствующая жордановой клетке J_α ($\alpha \neq 0$), приводится к диагональному виду преобразованием*

$$\begin{aligned} \xi_k &= \sum_{s=0}^{k-1} \frac{(-1)^s}{s!} \left(\frac{\ln(u_1^2 + v_1^2)}{2\alpha} \right)^s u_{k-s}, \\ \eta_k &= \sum_{s=0}^{k-1} \frac{(-1)^s}{s!} \left(\frac{\ln(u_1^2 + v_1^2)}{2\alpha} \right)^s v_{k-s}, \qquad k = 1, \ldots, n_\alpha, \end{aligned} \tag{6}$$

где $2n_\alpha$ — размер жордановой клетки.

В отличие от рассмотренных случаев система, соответствующая жордановой клетке J_0 для нулевого характеристического числа, не приводится к диагональному виду.

Лемма 3. *Система, соответствующая жордановой клетке J_0 для нулевого характеристического числа, преобразованием*

$$z_1 = y_1, \qquad z_2 = y_2, \qquad z_i = \sum_{s=0}^{i-1} \frac{(-1)^s}{s!} \left(\frac{y_2}{y_1} \right)^s y_{i-s}, \qquad i = 3, \ldots, n_0, \tag{7}$$

где n_0 — размер жордановой клетки, приводится к виду

$$\dot{z}_j = 0 \qquad (j = 1, 3, \ldots, n_0), \qquad \dot{z}_2 = z_1.$$

Справедливость лемм 1–3 устанавливается непосредственно с использованием формул (4)–(7).

2. Диагонализация линейных систем. Леммы 1–3 дают возможность рассмотреть вопрос диагонализации системы (1) в общем случае. Следующие теоремы решают задачу о преобразовании жордановой нормальной формы системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами к линейно-диагональной форме.

Теорема 1. *Система* (2) *с помощью нелинейного преобразования приводится к диагональному виду, если среди ее характеристических чисел имеется хотя бы одно ненулевое характеристическое число. При этом переменные, соответствующие диагональному блоку, остаются без изменения, переменные, соответствующие жордановым клеткам для $\lambda \neq 0$, преобразуются по формулам* (4)–(6) *в зависимости от вида характеристического числа. Переменные, соответствующие жордановой клетке для $\lambda = 0$, в зависимости от вида ненулевого характеристического числа преобразуются по формулам*

$$z_i = \sum_{s=0}^{i-1} \frac{(-1)^s}{s!} \left(\frac{\ln|y|}{\lambda} \right)^s y_{i-s}, \qquad i = 1, \ldots, n_0, \tag{8}$$

если $\dot{y} = \lambda y$ ($\lambda \neq 0$);

$$z_i = \sum_{s=0}^{i-1} \frac{(-1)^s}{s!} \Phi^s(x,y) y_{i-s} \qquad (i = 1, \ldots, n_0),$$
$$\Phi(x,y) = \frac{1}{\beta} \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \tag{9}$$

если $\dot{x} = \alpha x - \beta y$, $\dot{y} = \beta x + \alpha y$ $(\beta \neq 0)$, *здесь* n_0 *— размер жордановой клетки* J_0.

Доказательство. Диагональный вид преобразованной системы следует из лемм 1, 2 для ненулевых характеристических чисел и из того, что жорданова клетка, соответствующая нулевому характеристическому числу, преобразуется в нулевую матрицу по формулам (8), (9), что устанавливается непосредственной проверкой.

Случай, когда все характеристические числа нулевые, рассматривается с помощью леммы 3. Если элементарные делители простые, то матрица J является нулевой и, значит, имеет диагональный вид. Когда элементарные делители непростые, то, как следует из леммы 3, система не приводится к диагональному виду. Выделим этот результат отдельно.

Теорема 2. *Пусть все характеристические числа матрицы* A *являются нулевыми. Тогда система* (1) *приводится к виду* $\dot{z}_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ *в случае простых элементарных делителей и к виду* $\dot{z}_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n-1)$, $\dot{z}_n = z_1$ *в случае непростых элементарных делителей.*

Замечание 1. В случае, когда все характеристические числа нулевые и элементарные делители непростые, система (1) хотя и не приводится к диагональному виду, однако приводится к простейшему виду, поскольку первые $n-1$ переменных являются интегралами, а переход к новому времени τ осуществляется по формуле $d\tau = z_1 dt$.

Замечание 2. В случае, когда все характеристические числа нулевые и элементарные делители просты, система имеет диагональный вид, однако она “мертва”, поскольку все ее состояния являются положениями покоя.

Замечание 3. В случае, когда все характеристические числа являются чисто мнимыми, можно от переменных ξ_i, η_i перейти к полярным координатам ρ_i, φ_i, которые будут соответствовать переменным действие-угол, широко применяемым в гамильтоновой механике.

3. Интегралы линейных систем. Линейно-диагональная форма существенно упрощает отыскание интегралов системы (1). В зависимости от типа характеристических чисел интегралы бывают степенными, эллиптическими, спиральными [2] и более общей структуры. Построим интегралы для линейно-диагональной системы.

1. Степенные интегралы (соответствуют действительным характеристическим числам)

$$J_{ij} = z_i^{p_i} z_j^{p_j},$$

где $\dot{z}_i = \lambda_i z_i$, числа p_i, p_j удовлетворяют уравнению $p_i\lambda_i + p_j\lambda_j = 0$.

2. Эллиптические интегралы (соответствуют чисто мнимым характеристическим числам)

$$J_i = u_i^2 + v_i^2,$$

где $\dot{u}_i = -\beta v_i$, $\dot{v}_i = \beta u_i$.

3. Спиральные интегралы (соответствуют комплексно-сопряженным характеристическим числам)

$$J_k = \beta_k \ln \sqrt{u_k^2 + v_k^2} + \alpha_k \arcsin \frac{u_k}{\sqrt{u_k^2 + v_k^2}},$$

где $\dot{u}_k = \alpha_k u_k - \beta_k v_k$, $\dot{v}_k = \beta_k u_k + \alpha_k v_k$.

4. Перекрестные интегралы (соответствуют характеристическим числам различного типа). Приведем, для примера, интеграл, соответствующий действительному и комплексному характеристическим числам

$$J_{ik} = (u_k^2 + v_k^2) z_i^{-2\alpha_k/\lambda_i},$$

где $\dot{z}_i = \lambda_i z_i$, $\dot{u}_k = \alpha_k u_k - \beta_k v_k$, $\dot{v}_k = \beta_k u_k + \alpha_k v_k$.

Замечание 4. Для системы (1) в комплексифицированной форме, приведенной к диагональному виду, все интегралы будут степенными $J_{ij} = z_i^{p_i} z_j^{p_j}$, где $\dot{z}_i = \lambda_i z_i$, числа p_i, p_j удовлетворяют уравнению $p_i\lambda_i + p_j\lambda_j = 0$ и, вместе с числами λ_i, могут быть комплексными. Достигаемые при этом простота и однообразие влекут за собой потерю в описании качественных свойств интегралов, проявляющихся при их записи в вещественных переменных: во всех четырех выделенных случаях качественный характер интегралов существенно различен.

Замечание 5. Выбирая переменные преобразованной системы, соответствующие различным характеристическим числам, можно получить полный набор $n - 1$ независимых интегралов. При этом при построении интегралов могут быть учтены особенности системы и потребности проводимого исследования.

Замечание 6. Система (1) может быть приведена к простейшей форме путем выбора построенных независимых интегралов в качестве новых переменных и неголономной замены времени.

1. *Levi-Civita T., Amaldi U.* Lezioni di Meccanica Razional. Vol. 2. – Bologna: Nicola Zanichelli, 1927. – 671 p.
2. *Kovalev A. M.* Invariant and integral manifolds of dynamical systems and the problem of integration of the Euler–Poisson equations // Reg. & Chaot. Dyn. – 2004. – **9**, No 1. – P. 59–72.
3. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – Москва: Наука, 1967. – 571 с.
4. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. – Москва; Ленинград: Гостехиздат, 1950. – 472 с.
5. *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Москва: Наука, 1971. – 240 с.

Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк

Поступило в редакцию 25.09.2006