УДК 517.956

С. П. Лавренюк, О. Т. Панат

Мішана задача для нелінійного гіперболічного рівняння в необмеженій області

(Представлено членом-кореспондентом НАН України Б. Й. Пташником)

The mixed problem for a hyperbolic equation in an unbounded domain with respect to spatial variables is investigated. Conditions that provide the existence and uniqueness of the solution in generalized Lebesgue spaces are stated. Our results are obtained without any restrictions on the behavior of the initial data and a solution at infinity.

Задачі для диференціальних рівнянь гіперболічного типу розглядали багато дослідників. Зазначимо тут лише праці [1–11], предметом дослідження яких є, зокрема, нелінійне гіперболічне рівняння вигляду

$$u_{tt} - \Delta u + \alpha |u|^{p-2} u + \beta |u_t|^{q-2} u_t = f(x,t), \tag{1}$$

де $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \geqslant 0$, p, q — деякі сталі. У випадку $\alpha > 0$, $q = 2$ таке рівняння виникає, наприклад, у релятивістській квантовій механіці [1], а коли $\alpha \geqslant 0$, $p = 2$, то (1) моделює коливні процеси в середовищі з опором. У роботах [2–5] встановлено певні співвідношення між параметрами p, q, які забезпечують існування та єдиність розв'язку задачі Коші для рівняння (1). Розв'язність мішаних задач для такого рівняння як в обмежених, так і в необмежених за просторовими змінними областях доведено в працях [1, 6–9] та [10, 11] відповідно.

У праці [12] простори Лебега та Соболєва узагальнено на випадок змінного показника і вивчено властивості функцій у таких просторах. Мішану задачу для одного гіперболічного рівняння третього порядку в узагальнених просторах Соболєва, яке містить степеневі нелінійності в головній частині, вивчено в [13].

У цій роботі в необмеженій за просторовими змінними області досліджено мішану задачу для деякого узагальнення рівняння (1). Встановлено умови, що гарантують існування та єдиність розв'язку такої задачі в узагальнених просторах Лебега.

Нехай $T > 0$ — фіксоване число, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$, — необмежена область з гладкою межею $\partial\Omega$ класу C^1 така, що $\Omega^R = \Omega \bigcap \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x| < R\}$ — область для кожного $R > R_0$ з регулярною за Кальдероном [14, с. 45] межею $\partial\Omega^R$, $R_0 > 0$ — деяке число. Позначимо $Q_\tau = \Omega \times (0,\tau)$, $S_\tau = \partial\Omega \times (0,\tau)$, $\Omega_\tau = \{(x,t) \colon x \in \Omega,\ t = \tau\}$, $Q^R_\tau = \Omega^R \times (0,\tau)$, $S^R_\tau = \partial\Omega^R \times (0,\tau)$, $\Omega^R_\tau = \{(x,t) \colon x \in \Omega^R, t = \tau\}$, $\tau \in [0,T]$, $R > R_0$, ν — вектор зовнішньої нормалі до області Ω.

В області Q_T розглянемо гіперболічне рівняння

$$Au \equiv u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x,t) u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t) u_{x_i} + a_0(x,t) u_t + c(x,t) u +$$
$$+ b_0(x,t) |u_t|^{p_0(x)-2} u_t + b_1(x,t) |u|^{p_1(x)-2} u = f(x,t), \qquad (x,t) \in Q_T, \tag{2}$$

з початковими

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad u_t(x,0) = u_1(x), \qquad x \in \Omega, \tag{3}$$

та крайовою

$$u|_{S_T} = 0 \tag{4}$$

умовами.

Введемо функціональні простори

$$H^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) = \{u\colon u \in H^2(\Omega^R) \text{ для всіх } R > R_0\},$$

$$H^1_{0,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) = \{u\colon u \in H^1(\Omega^R),\ u|_{\partial\Omega\cap\partial\Omega^R} = 0 \text{ для всіх } R > R_0\},$$

$$L^{p(x)}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) = \{u\colon u \in L^{p(x)}(\Omega^R) \text{ для всіх } R > R_0\}, \qquad p \in L^\infty(\Omega^R).$$

Тут $L^{p(x)}(\Omega^R)$ — узагальнений простір Лебега. В [12] доведено, що $L^{p(x)}(\Omega^R)$ є банаховим простором з нормою

$$\|v; L^{p(x)}(\Omega^R)\| = \inf\left\{\lambda > 0\colon \int\limits_{\Omega^R} \left|\frac{v(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} dx \leqslant 1\right\}.$$

Припускаємо, що для коефіцієнтів рівняння (2) виконуються такі умови:

(A): a_{ij}, a_{ijt}, a_{ijx_k}, a_{ijtt}, a_i, a_{it}, a_{ix_i}, a_0, $a_{0t} \in L^\infty(Q_T)$, $a_{ij}(x,t) = a_{ji}(x,t)$ майже всюди в Q_T, i, j, $k \in \{1,\ldots,n\}$, $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geqslant \theta_0|\xi|^2$, $\theta_0 > 0$ для всіх $\xi \in \mathbb{R}^n$ і всіх $(x,t) \in Q_T$;

(B): b_0, b_{0t}, b_{0tt}, b_1, $b_{1t} \in L^\infty(Q_T)$, $b_0(x,t) \geqslant \beta_0 > 0$, $b_1(x,t) \geqslant \beta_1 > 0$, $b_{0t} \geqslant 0$ майже всюди в Q_T;

(P): $p_i\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $p_i \in L^\infty(\Omega)$, $1 < \overline{p}_i \leqslant p_i \leqslant \widehat{p}_i$, $\overline{p}_i = \operatorname{ess\,inf}\limits_{\Omega} p_i(x)$, $\widehat{p}_i = \operatorname{ess\,sup}\limits_{\Omega} p_i(x)$, $i = 0, 1$.

Означення 1. Узагальненим розв'язком задачі (2)–(4) називаємо функцію u з класу $u \in L^\infty((0,T); H^1_{0,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) \bigcap L^{p_1(x)}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}))$, $u_t \in L^\infty((0,T); H^1_{0,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}))$, $u_{tt} \in L^2((0,T); L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}))$, яка задовольняє інтегральну рівність

$$\int\limits_{\Omega_T} u_t v\, dx - \int\limits_{\Omega_0} u_1 v\, dx + \int\limits_{Q_T} \Bigg[-u_t v_t + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t) u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t) u_{x_i} v + a_0(x,t) u_t v +$$
$$+ c(x,t)uv + b_0(x,t)|u_t|^{p_0(x)-2} u_t v + b_1(x,t)|u|^{p_1(x)-2} uv - f(x,t)v\Bigg] dx\, dt = 0 \tag{5}$$

для довільної функції $v \in C^1([0,T]; C_0^\infty(\Omega))$ та початкову умову $u(x,0) = u_0(x)$.

Вивчимо спочатку питання про існування в області Q_T^R розв'язку рівняння

$$Au = f^R(x,t), \qquad (x,t) \in Q_T^R, \tag{6}$$

який задовольняє умови

$$u(x,0) = u_0^R(x), \qquad u_t(x,0) = u_1^R(x), \qquad x \in \Omega^R, \tag{7}$$

$$u|_{S_T^R} = 0, \tag{8}$$

де

$$f^R(x,t) = \begin{cases} f(x,t), & (x,t) \in Q_T^R, \\ 0, & (x,t) \in Q_T \setminus Q_T^R, \end{cases}$$

$u_0^R(x) = u_0(x)\xi(x)$, $u_1^R(x) = u_1(x)\xi(x)$, $\xi \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $\xi(x) = 1$ при $|x| \leqslant R-1$, $\xi(x) = 0$ при $|x| \geqslant R$, $0 \leqslant \xi(x) \leqslant 1$ при $x \in \mathbb{R}^n$.

Означення 2. Узагальненим розв'язком задачі (6)–(8) називаємо функцію u з класу $u \in L^\infty((0,T); H_0^1(\Omega^R) \bigcap L^{p_1(x)}(\Omega^R))$, $u_t \in L^\infty((0,T); H_0^1(\Omega^R))$, $u_{tt} \in L^2(Q_T^R)$, яка задовольняє інтегральну рівність (5), де Ω_T, Ω_0, Q_T замінено на Ω_T^R, Ω_0^R, Q_T^R відповідно, для довільної функції $v \in C^1([0,T]; C_0^\infty(\Omega^R))$ та початкову умову $u(x,0) = u_0^R(x)$.

Дослідження мішаної задачі (6)–(8) проведено на основі методу Фаедо–Гальоркіна.

Теорема 1. *Якщо виконуються умови (A), (B), (P),* $\overline{p}_1 = 1,5$, *для* $n > 2$ $\widehat{p}_1 = \dfrac{2n-2}{n-2} - \dfrac{\varepsilon}{2}$, $\varepsilon \in \left(0, \dfrac{1}{n-1}\right)$ *і, крім того,* $u_0 \in H^2(\Omega^R) \bigcap H_0^1(\Omega^R) \bigcap L^{p_1(x)}(\Omega^R)$, $u_1 \in H_0^1(\Omega^R) \bigcap L^{p_0(x)}(\Omega^R)$, f, $f_t \in L^2(Q_T^R)$, *то узагальнений розв'язок задачі (6)–(8) існує.*

Теорема 2. *Нехай виконуються умови (A), (B), (P),* $\overline{p}_1 = 1,5$, *для* $n > 2$ $\widehat{p}_1 = \dfrac{2n-2}{n-2} - \dfrac{\varepsilon}{2}$, $\varepsilon \in \left(0, \dfrac{1}{n-1}\right)$ *і, крім того,* $a_{ij} \in C(\overline{Q}_T)$, $u_0 \in H^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) \bigcap H^1_{0,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) \bigcap L^{p_1(x)}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $u_1 \in H^1_{0,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) \bigcap L^{p_0(x)}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, f, $f_t \in L^2((0,T); L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}))$. *Тоді задача (2)–(4) має єдиний узагальнений розв'язок.*

Доведення. Побудуємо вичерпання області Q_T характеристичними конусами рівняння (2). Для цього покладемо $R_1 = R_0 + 1$ і позначимо $D(R_1) = \bigcap\limits_{(x,T)\in\Omega_T^{R_1}} \mathcal{K}(R_1, x)$, де $\mathcal{K}(R_1, x)$ — перетин характеристичного конуса рівняння (2) з вершиною у точці $(x,T) \in \Omega_T^{R_1}$ з областю Q_T. Нехай $S(R_1)$ — частина межі області $D(R_1)$, яка лежить усередині області Q_T. Очевидно існує таке R_2, $R_2 > R_1 + 1$, яке залежить від a_{ij}, що $D(R_1) \in Q_T^{R_2}$. Нехай $\mathcal{K}(R_2, x)$ — перетин характеристичного конуса рівняння (2) з вершиною у точці $(x,T) \in \Omega_T^{R_2}$ з областю Q_T, $D(R_2) = \bigcap\limits_{(x,T)\in\Omega_T^{R_2}} \mathcal{K}(R_2, x)$, а $S(R_2)$ — частина тієї межі області $D(R_2)$, яка лежить усередині області Q_T. Продовжуючи цей процес, одержимо послідовність обмежених областей $\{D(R_k)\}$ і поверхонь $\{S(R_k)\}$, які є характеристичними для рівняння (2).

Згідно з теоремою 1, для кожного $k \in \{1, 2, \ldots\}$ існує розв'язок $u^k \equiv u^{R_K}$ відповідної мішаної задачі (6)–(8). Продовжимо кожну функцію u^{R_k} нулем в області $Q_T \setminus Q_T^{R_k}$. Доведемо, що $u^k(x,t) = u^m(x,t)$ майже всюди в області $D(R_k)$ при $m > k$. Позначимо $u(x,t) = u^m(x,t) - u^k(x,t)$. Нехай $D_T(R_k) = D(R_k) \bigcap \{t = T\}$, $S_T(R_k) = S(R_k) \bigcap Q_T^{R_{k+1}}$. Зауважимо, що за нашою побудовою $u(x,0) = 0$ майже всюди в $D(R_k) \bigcap \{t = 0\}$ і $f^{R_m}(x,t) - f^{R_k}(x,t) = 0$ майже всюди в $D(R_k)$. Підставимо функції u^m і u^k у рівняння (2), віднімемо від першого друге, різницю помножимо на $(u_t^m - u_t^k)e^{-\eta t}$ та проінтегруємо за областю $D_{0,T}(R_k) = D(R_k) \bigcap Q_T^{R_k}$. Після цього одержимо рівність

$$\int\limits_{D_{0,T}(R_k)} \Bigg[u_{tt}u_t + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)u_{x_i}u_{tx_j} + \sum_{i=1}^n a_i(x,t)u_{x_i}u_t + a_0(x,t)|u_t|^2 + c(x,t)uu_t + b_0(x,t)(|u_t^m|^{p_0(x)-2}u_t^m - |u_t^k|^{p_0(x)-2}u_t^k)(u_t^m - u_t^k) + b_1(x,t)(|u^m|^{p_1(x)-2}u^m - |u^k|^{p_1(x)-2}u^k)(u_t^m - u_t^k)\Bigg] e^{-\eta t} dx\, dt = 0. \tag{9}$$

Перетворимо та оцінимо кожний доданок з (9), враховуючи умови теореми:

$$\mathfrak{I}_1 := \int\limits_{D_{0,T}(R_k)} u_{tt}u_t e^{-\eta t}dx\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_{D_T(R_k)} |u_t|^2 e^{-\eta T}dx + \frac{1}{2}\int\limits_{S_T(R_k)} |u_t|^2\cos(\nu,t)e^{-\eta t}\,dS +$$

$$+\frac{\eta}{2}\int\limits_{D_{0,T}(R_k)} |u_t|^2 e^{-\eta t}dx\,dt;$$

$$\mathfrak{I}_2 := \int\limits_{D_{0,T}(R_k)} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)u_{x_i}u_{x_jt}e^{-\eta t}dx\,dt \geqslant \frac{\theta_0}{2}\int\limits_{D_T(R_k)} |\nabla u|^2 e^{-\eta T}dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{S_T(R_k)} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)u_{x_i}u_{x_j}\cos(\nu,t)e^{-\eta t}dS + \left(\frac{\eta\theta_0}{2} - \frac{A_0}{2}\right)\int\limits_{D_{0,T}(R_k)} |\nabla u|^2 e^{-\eta t}dx\,dt,$$

$$A_0 = n\max_{i,j}\operatorname*{ess\,sup}_{Q_T}|a_{ijt}(x,t)|;$$

$$\mathfrak{I}_3 := \int\limits_{D_{0,T}(R_k)} \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)u_{x_i}u_t e^{-\eta t}dxdt \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{D_{0,T}(R_k)} [A_1|\nabla u|^2 + |u_t|^2]e^{-\eta t}dx\,dt,$$

$$A_1 = \operatorname*{ess\,sup}_{Q_T}\sum_{i=1}^{n} a_i^2(x,t);$$

$$\mathfrak{I}_4 := \int\limits_{D_{0,T}(R_k)} a_0(x,t)|u_t|^2 e^{-\eta t}dx\,dt \leqslant \frac{A_2}{2}\int\limits_{D_{0,T}(R_k)} |u_t|^2 e^{-\eta t}dx\,dt, \quad A_2 = 2\operatorname*{ess\,sup}_{Q_T}|a_0(x,t)|;$$

$$\mathfrak{I}_5 := \int\limits_{D_{0,T}(R_k)} c(x,t)uu_t e^{-\eta t}dxdt \leqslant \frac{C_1}{2}\int\limits_{D_{0,T}(R_k)} [|u|^2 + |u_t|^2]e^{-\eta t}dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant C_1(T^2+1)\int\limits_{D_{0,T}(R_k)} |u_t|^2 e^{-\eta t}dx\,dt, \qquad C_1 = \operatorname*{ess\,sup}_{Q_T}|c(x,t)|;$$

$$\mathfrak{I}_6 := \int\limits_{D_{0,T}(R_k)} b_0(x,t)(|u_t^m|^{p_0(x)-2}u_t^m - |u_t^k|^{p_0(x)-2}u_t^k)(u_t^m - u_t^k)e^{-\eta t}dx \geqslant 0;$$

$$\mathfrak{I}_7 := \int\limits_{D_{0,T}(R_k)} b_1(x,t)(|u^m|^{p_1(x)-2}u^m - |u^k|^{p_1(x)-2}u^k)(u_t^m - u_t^k)]e^{-\eta t}dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant B_1(R_k)(\widehat{p}_1 - 1)\int\limits_{D_{0,T}(R_k)} |u|(|u^m|^{p_1(x)-2} + |u^k|^{p_1(x)-2})|u_t|e^{-\eta t}dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant B_1(R_k)(\widehat{p}_1 - 1)r_p\int\limits_0^T \| |u^m|^{p_1(x)-2} + |u^k|^{p_1(x)-2}; L^{r_1}(D(R_k)\bigcap\Omega^{R_k})\| \times$$

$$\times \|u; L^{r_2}(D(R_k) \bigcap \Omega^{R_k})\| \cdot \|u_t; L^2(D(R_k) \bigcap \Omega^{R_k})\| e^{-\eta t} dt,$$

де числа $r_1 > 1$, $r_2 > 1$ вибираємо з умов

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{1}{2}, \quad 1 < r_1(p_1(x) - 2) \leqslant \frac{2n}{n-2} - \varepsilon, \quad \varepsilon \in \left(0, \frac{1}{n-1}\right), \quad 1 < r_2 \leqslant \frac{2n}{n-2}.$$

Тоді за теоремою 2.8 [12] та теоремами вкладення [14, с. 47] отримаємо

$$\mathfrak{I}_7 \geqslant -\frac{C_2}{2} \int\limits_{D_{0,T}(R_k)} [|u_t|^2 + |\nabla u|^2] e^{-\eta t} dx\, dt.$$

Враховуючи оцінки, одержані вище, з рівності (9) матимемо

$$\int\limits_{D_T(R_k)} \big[\, |u_t|^2 + \theta_0 |\nabla u|^2 \big] e^{-\eta T} dx \,+$$
$$+ \int\limits_{D_{0,T}(R_k)} \big[(\eta - 1 - 2C_1(T^2+1) - C_2)|u_t|^2 + (\eta\theta_0 - A_0 - A_1 - C_2)|\nabla u|^2\big] e^{-\eta t} dx\, dt \,+$$
$$+ \int\limits_{S_T(R_k)} \left[|u_t|^2 + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t) u_{x_i} u_{x_j}\right] \cos(\nu, t) e^{-\eta t} dS \leqslant 0. \tag{10}$$

Оскільки

$$\int\limits_{S_T(R_k)} \left(|u_t|^2 + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t) u_{x_i} u_{x_j}\right) \cos(\nu, t) e^{-\eta t} dS \geqslant 0,$$

то, вибираючи η достатньо великим, з (10) отримаємо оцінку

$$\int\limits_{D_{0,T}(R_k)} [|u_t|^2 + |\nabla u|^2] dx\, dt \leqslant 0. \tag{11}$$

Тоді $u^k(x,t) = u^m(x,t)$, майже скрізь в $D_{0,T}(R_k)$ для довільного $m > k$. За побудовою $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} D_{0,T}(R_k) = Q_T$. Отже, функція $u(x,t) = u^k(x,t)$, $(x,t) \in D_{0,T}(R_k)$ є шуканим розв'язком задачі (2)–(4).

Єдиність побудованого розв'язку доводимо методом від супротивного, припустивши існування двох різних узагальнених розв'язків u^1 і u^2 задачі (2)–(4). Тоді для $u = u^1 - u^2$ аналогічними міркуваннями отримуємо оцінку (11), яка виконується для довільного $k \in \{1, 2, \ldots\}$. Отже, $u = 0$ майже всюди в Q_T. Теорему доведено.

1. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – Москва, 2002. – 597 с.
2. *Todorova G., Vitillaro E.* Blow-up for nonlinear dissipative wave equations in $\mathbb{R}^n$ // J. Math. Anal. and Appl. – 2005. – **303**. – P. 242–257.
3. *Kenig C. E., Ponce G., Vega L.* Global well-posedness for semi-linear wave equations // Commun. Partial Different. Equat. – 2000. – **25**, No 9–10. – P. 1741–1752.

4. *Miao Ch., Zhang B.* H^s – global well-posedness for semilinear wave equations // J. Math. Anal. and Appl. – 2003. – **283**. – P. 645–666.
5. *Pecher H.* Sharp existence results for self-similar solutions of semilinear wave equations // NoDEA. – 2000. – **7**. – P. 323–341.
6. *Ha J., Nakagiri Sh.* Identification problems for the damped Klein–Gordon equations // J. Math. Anal. and Appl. – 2004. – **289**. – P. 77–89.
7. *Salim A.* Blow up in a nonlinearly damped wave equation // Math. Nachr. – 2001. – **231**. – P. 105–111.
8. *Georgiev V., Todorova G.* Existence of a solution of the wave equation with nonlinear damping and source terms // J. Different. Equat. – 1994. – **109**. – P. 295–308.
9. *Барабаш Г.* Мішана задача для одного слабко нелінійного гіперболічного рівняння у необмеженій області // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2005. – Вип. 64. – С. 7–19.
10. *Gallagher I., Gérard P.* Profile decomposition for the wave equation outside a convex obstacle // J. Math. Pures et Appl. – 2001. – **80**, No 1. – P. 1–49.
11. *Ikehata R.* Global existence of solutions for semilinear damped wave equation in 2-D exterior domain // J. Different. Equat. – 2004. – **200**. – P. 53–68.
12. *Kováčik O., Rákosnik J.* On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{1,p(x)}$ // Czech. Math. J. – 1991. – **41 (116)**. – P. 592–618.
13. *Бугрій О., Доманська Г., Процах Н.* Мішана задача для нелінійного рівняння третього порядку в узагальнених просторах Соболєва // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2005. – Вип. 64. – С. 44–61.
14. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – Москва, 1978. – 336 с.

Жешівський університет, Польща
Львівський національний університет
ім. Івана Франка

Надійшло до редакції 09.06.2006

УДК 519.21

С. А. Мельник

Расслоение решений нелинейных уравнений Ито параболического типа с источником

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. М. Ковалевым)

We obtain the conditions, which guarantee the existence of a stratifica of the solution of a stochastic Itô parabolic equation with power nonlinearities.

1. Определения, обозначения, постановка задачи. На полном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathbf{F}, \mathbf{P})$ рассмотрим следующую задачу Коши в $\mathbb{R}^1$

$$\begin{aligned} &du(t,x) = a(u^{\sigma+1}(t,x))_{xx}dt + bu^{\gamma}(t,x)\,dw(t), \qquad t \in [0;\tau(\omega)), \qquad x \in \mathbb{R}^1, \\ &u(0,x) = u_0(x). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $w(t)$ — стандартный винеровский процесс со значениями в $\mathbb{R}^1$, согласованный с потоком σ-алгебр $\{F_t\}$, $t \geqslant 0$; a, b — положительные числа, $\sigma \geqslant 0$, $\gamma \in (0;1)\bigcup(1;+\infty)$; $\tau(\omega)$ —