4. *Miao Ch., Zhang B.* H^s – global well-posedness for semilinear wave equations // J. Math. Anal. and Appl. – 2003. – **283**. – P. 645–666.
5. *Pecher H.* Sharp existence results for self-similar solutions of semilinear wave equations // NoDEA. – 2000. – **7**. – P. 323–341.
6. *Ha J., Nakagiri Sh.* Identification problems for the damped Klein–Gordon equations // J. Math. Anal. and Appl. – 2004. – **289**. – P. 77–89.
7. *Salim A.* Blow up in a nonlinearly damped wave equation // Math. Nachr. – 2001. – **231**. – P. 105–111.
8. *Georgiev V., Todorova G.* Existence of a solution of the wave equation with nonlinear damping and source terms // J. Different. Equat. – 1994. – **109**. – P. 295–308.
9. *Барабаш Г.* Мішана задача для одного слабко нелінійного гіперболічного рівняння у необмеженій області // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2005. – Вип. 64. – С. 7–19.
10. *Gallagher I., Gérard P.* Profile decomposition for the wave equation outside a convex obstacle // J. Math. Pures et Appl. – 2001. – **80**, No 1. – P. 1–49.
11. *Ikehata R.* Global existence of solutions for semilinear damped wave equation in 2-D exterior domain // J. Different. Equat. – 2004. – **200**. – P. 53–68.
12. *Kováčik O., Rákosnik J.* On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{1,p(x)}$ // Czech. Math. J. – 1991. – **41 (116)**. – P. 592–618.
13. *Бугрій О., Доманська Г., Процах Н.* Мішана задача для нелінійного рівняння третього порядку в узагальнених просторах Соболєва // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2005. – Вип. 64. – С. 44–61.
14. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – Москва, 1978. – 336 с.

Жешівський університет, Польща
Львівський національний університет ім. Івана Франка

Надійшло до редакції 09.06.2006

УДК 519.21

С. А. Мельник

Расслоение решений нелинейных уравнений Ито параболического типа с источником

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. М. Ковалевым)

We obtain the conditions, which guarantee the existence of a stratifica of the solution of a stochastic Itô parabolic equation with power nonlinearities.

1. Определения, обозначения, постановка задачи. На полном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathbf{F}, \mathbf{P})$ рассмотрим следующую задачу Коши в $\mathbb{R}^1$

$$\begin{aligned} &du(t,x) = a(u^{\sigma+1}(t,x))_{xx}dt + bu^{\gamma}(t,x)\,dw(t), \qquad t \in [0;\tau(\omega)), \qquad x \in \mathbb{R}^1, \\ &u(0,x) = u_0(x). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $w(t)$ — стандартный винеровский процесс со значениями в $\mathbb{R}^1$, согласованный с потоком σ-алгебр $\{F_t\}$, $t \geqslant 0$; a, b — положительные числа, $\sigma \geqslant 0$, $\gamma \in (0;1)\bigcup(1;+\infty)$; $\tau(\omega)$ —

марковский момент остановки, согласованный с потоком σ-алгебр $\{F_t\}$, $t \geqslant 0$; $u_0(x)$ — неслучайная неотрицательная функция, $u_0 \in L_2(\mathbb{R}^1)$. Буквенный индекс, стоящий внизу возле знака функции, означает взятие частной производной по соответствующей переменной. Определение решения задачи (1) на случайном отрезке времени $[0;\tau(\omega))$ дадим, следуя аналогичному определению для обыкновенных стохастических дифференциальных уравнений, сформулированному в [1, с. 246]. Под решением задачи (1) будем понимать случайный процесс $u(t,x)$, подчиненный потоку σ-алгебр $\{F_t\}$, $t \geqslant 0$, и удовлетворяющий уравнению (1) в смысле определения 2.1 [2, с. 104] при каждом $t \in [0;\tau(\omega))$. Здесь и далее $\mathbf{M}$ — символ математического ожидания.

Замечание 1. Строго говоря, в уравнении (1) следовало писать знаки модулей решения. Но решения, которые далее будут построены, являются неотрицательными функциями.

Далее в работе будут использоваться следующие обозначения:

$$\kappa = \frac{\sigma+1+\gamma}{\sigma+1}, \qquad \lambda = \frac{\sigma+2}{\sigma+1}, \qquad m = \frac{2(\gamma-1)-\sigma}{2\sigma+2},$$

$$N = 2A + (\lambda - m - 1)B^2, \quad M = \frac{\kappa(\lambda-m)B^{1/(\kappa-\lambda)}}{\lambda b}, \quad \mu = \frac{2aM^{2-\lambda+2m}}{(m-\lambda)N}, \quad Q = \frac{q}{p},$$

$$p = \|v\|_\lambda^\lambda = \int |v(y)|^\lambda dy, \qquad z = \|v_y\|_2^2 = \int |v_y(y)|^2 dy, \qquad q = \|v\|_\kappa^\kappa = \int |v(y)|^\kappa dy.$$

$$\mathbf{W} = W_2^1(\mathbb{R}^1) \bigcap L_\kappa(\mathbb{R}^1) \bigcap L_\lambda(\mathbb{R}^1), \qquad \nabla \text{ — градиент функционала.}$$

Определение 1. Говорят, что процесс $u(t,x)$ допускает расслоение, если он может быть представлен в виде $u(t,x) = r(t)v(xr^l(t))$, где $r(t)$ — случайный процесс, который с вероятностью 1 принимает неотрицательные значения, $l \in \mathbb{R}^1$, $v \in \mathbf{W}$. Процесс $r(t)$ называют амплитудой решения, а функцию $v(y)$ — пространственной формой решения. Процесс $x_0(t) = \min\{x > 0\colon v(xr^l(t)) = 0\}$ называется точкой фронта решения.

Замечание 2. В данной работе за основу принят подход к изучению нелинейных уравнений в частных производных, предложенный в работе [3].

Замечание 3. В теории детерминированных уравнений в частных производных параболического типа со степенными нелинейностями большую роль играют решения, пространственная форма которых является дифференцируемой в нуле четной неотрицательной функцией, убывающей на положительной полуоси. В данной работе рассматриваются решения с аналогичными свойствами.

Постановка задачи. Пусть исходные данные задачи (1) удовлетворяют перечисленным выше ограничениям. Выясним, при каких условиях решение задачи (1) допускает расслоение, а также построим уравнения, которым удовлетворяют амплитуда и пространственная форма решения.

2. Основные результаты.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $(m-\lambda)N > 0$, $(\lambda - m)B > 0$*;*

2) $r(t)$ *является решением уравнения*

$$dr(t) = Ar^{2\kappa-2\lambda+1}(t)dt + Br^{\kappa-\lambda+1}(t)\, dw(t); \qquad r(0) = r_0 > 0; \tag{2}$$

3) $v(y)$ *является решением задачи*

$$\mu v_{yy} + \kappa Q v^{\kappa-1} - 0{,}5\lambda Q^2 v^{\lambda-1} = 0, \qquad v(-y) = v(y), \qquad v_y(0) = 0, \qquad v(+\infty) = 0; \tag{3}$$

4) $u_0(x) = [r(0)MQ^{1/(\lambda-\kappa)}v(xr^m(0)M^mQ^{m/(\lambda-k)})]^{1/(\sigma+1)}$.
Тогда решение задачи (1) *допускает расслоение следующего вида:*

$$u(t,x) = [r(t)MQ^{1/(\kappa-\lambda)}v(xr^m(t)M^mQ^{m/(\kappa-\lambda)})]^{1/(\sigma+1)}.$$

Замечание 4. Согласно теореме 6 [1, с. 246] для любых действительных чисел A и B решение уравнения (2) существует и единственно на некотором случайном отрезке времени $[0;\tau(\omega)]$, причем $P\{\tau(\omega) > 0\} = 1$. Кроме того, как показано в [4, с. 73], решение задачи (2) является случайным процессом, который с вероятностью 1 при всех $t \geqslant 0$ принимает неотрицательные значения. Поэтому степенные выражения в уравнении (2) определены.

Лемма. *Если* $(m-\lambda)N > 0$, *то существует* $v_0 > 0$ *такое, что задача*

$$\mu v_{yy}(y) + \kappa Q v^{\kappa-1} - 0{,}5\lambda Q^2 v^{\lambda-1} = 0, \qquad y \geqslant 0, \qquad v(0) = v_0, \qquad v_y(0) = 0 \tag{4}$$

имеет единственное обобщенное неотрицательное решение, имеющее конечную точку фронта $y_0 = \min\{y \geqslant 0\colon v(y) = 0\}$ *такую, что* $v(y) > 0$, *если* $y \in [0; y_0)$, *и* $v(y) = 0$, *если* $y \geqslant 0$. *Решение задачи* (4) *обладает следующими свойствами.*

1) $v_{yy}(0) < 0$;

2) если $0 < \gamma < 1$ *и* $0 < v_0 < \rho_0(2\kappa/\lambda)^{1/(\lambda-\kappa)}$, *то существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что* $v_{yy}(y) < 0$ *при* $y \in (y_0-\varepsilon; y_0)$;

3) если $\gamma > 1$ *и* $v_0 > \rho_0 2^{1/(\lambda-\kappa)}$, *то существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что* $v_{yy}(y) > 0$ *при* $y \in (y_0-\varepsilon; y_0)$;

4) четная функция, которая при $y \geqslant 0$ *совпадает с решением задачи* (4), *является решением задачи* (3).

Доказательство леммы основывается на методе расслоения, изложенном в [3].

Доказательство теоремы 1. В задаче (1) заменим фазовую переменную $U(t,x) = u^{\sigma+1}(t,x)$. Тогда

$$dU^{\lambda-1} = aU_{xx}dt + bU^{\kappa-1}\,dw(t), \qquad t \in [0;T), \qquad x \in \mathbb{R}^1, \qquad U(0,x) = u_0^{\sigma+1}(x).$$

Рассмотрим функционал

$$f(U) = \frac{1}{\lambda}\|U(t,\cdot)\|_\lambda^\lambda - \frac{1}{\lambda}\|U(0,\cdot)\|_\lambda^\lambda + \frac{a}{2}\int_0^t \|U_x(s,\cdot)\|_2^2\,ds - \frac{b}{\kappa}\int_0^t \|U(s,\cdot)\|_\kappa^\kappa\,dw(s).$$

Он определен на пространстве $L_2([0;T) \times \Omega; \mathbf{W})$. Функционал $f(U)$ дифференцируем по Гато по подпространству $\mathbf{W}$ в среднем квадратическом и его дифференциал Гато по подпространству равен

$$Df(U) = \int |U(t,x)|^{\lambda-2}U(t,x)g(x)\,dx - \int |U(0,x)|^{\lambda-2}U(0,x)g(x)\,dx +$$
$$+ a\int_0^t\!\!\int U_x(s,x)g_x(x)\,dx\,ds - b\int_0^t\!\!\int |U(s,x)|^{\kappa-2}U(s,x)g(x)\,dx\,dw(s).$$

Здесь $g \in \mathbf{W}$. Докажем, что функционал $f(U)$ имеет критическую точку, допускающую расслоение. Подставим в $f(U)$ вместо U выражение $U(t,x) = r(t)\phi(p,q)v(y)$, где $y = xr^m(t) \times \phi^m(p,q)$, $r(t)$ — решение уравнения (2) с некоторым действительным A и положительными

$r(0)$ и B, $\phi(p,q)$ — некоторая неотрицательная дифференцируемая функция, $v(y)$ — решение задачи (3). Согласно замечанию 4 процесс $r(t)$ существует, единственен и принимает неотрицательные значения. Согласно лемме функция $v(y)$ может быть построена. Выберем $\phi(p,q) = MQ^{1/(\lambda-\kappa)}$ и учтем, что $r(t)$ является решением уравнения (2). Тогда

$$f(U) = 0{,}5\lambda^{-1}(\lambda - m)NM^{\lambda-2m-2}\int\limits_0^t [\|U(s,\cdot)\|_\kappa^{2\kappa}\|U(s,\cdot)\|_\lambda^{-\lambda} - \mu\|U_x(s,\cdot)\|_2^2]\,ds.$$

Вычислив дифференциал Гато функционала $f(U)$ по подпространству $\mathbf{W}$ и перейдя от функции U к функции v, получаем

$$Df = \lambda^{-1}(\lambda - m)NM^{\lambda-1}Q^{\frac{\lambda-1}{\lambda-\kappa}}\int\limits_0^t r^{2m+1}\,ds\int[\mu v_{yy} + \kappa Qv^{\kappa-1} - 0{,}5\lambda Q^2 v^{\lambda-1}]g\,dx.$$

Так как функция $v(y)$ является решением задачи (3), то $Df(U) = 0$ и функция $U(t,x) = r(t)MQ^{1/(\lambda-\kappa)}v(xr^m(t)M^mQ^{m/(\lambda-\kappa)})$ является критической точкой функционала $f(U)$. Тогда функция $u(t,x) = [r(t)MQ^{1/(\lambda-\kappa)}v(xr^m(t)M^mQ^{m/(\lambda-\kappa)})]^{1/(\sigma+1)}$ является обобщенным решением задачи (1). Согласно определению построенное решение допускает расслоение. Теорема 1 доказана.

3. Применение расслоения к изучению динамики решения задачи (1). Согласно доказанной теореме 1 пространственная форма $v(y)$ и амплитуда $r(t)$ определяют решение задачи (1). Исследуем предельное поведение процесса $u(t,x)$ при $t \to +\infty$. Так как $U(t,x) = u^{\sigma+1}(t,x)$, то для упрощения выкладок будем изучать поведение процесса $U(t,x)$. Динамика $U(t,x)$ как функции времени полностью определяется процессом $r(t)$. Исследуем предельное поведение процесса $r(t)$, который является решением задачи (2).

Теорема 2. *Пусть процесс $r(t)$ является решением задачи* (2). *Если $2A < B^2$, то процесс $r(t)$ с вероятностью 1 стремится к нулю при $t \to +\infty$. Если $2A > B^2$, то процесс $r(t)$ с вероятностью 1 стремится к $+\infty$ при $t \to +\infty$.*

Для доказательства теоремы необходимо с помощью уравнений Колмогорова вычислить вероятность выхода процесса $r(t)$ из произвольного интервала.

Как видим, поведение решения задачи (1) существенно зависит от выбора коэффициентов A и B уравнения (2). Коэффициенты A и B не входят в изначальную постановку задачи (1). Однако их выбор определяет конструкцию пространственной формы $v(y)$, а следовательно, и вид начального условия $u_0(x)$. Выясним, как влияют значения этих коэффициентов на амплитуду $r(t)$ и пространственную форму $v(y)$. Для процесса $r(t)$ существенным является лишь число AB^{-2}, поскольку после замены времени $t = B^{-2}s$ и смены знака у винеровского процесса уравнение (2) переходит в себе подобное, но с единичным множителем при коэффициенте диффузии и множителем AB^{-2} при коэффициенте дрейфа. Рассмотрим расслоение

$$U(t,x) = r(t)\left(\kappa(\lambda - m)\frac{Bp}{2bq}\right)^{1/(\kappa-\lambda)} v\left(xr^m(t)\left(\kappa(\lambda - m)\frac{Bp}{2bq}\right)^{m/(\kappa-\lambda)}\right). \qquad (5)$$

Согласно теореме 1 представление (5) возможно, если $(m - \lambda)N > 0$, $(\lambda - m)B > 0$ и $U(0,x)$ имеет вид (5).

Теперь рассмотрим пространственную форму $v(y)$, являющуюся решением задачи (3). Коэффициент μ в уравнении (3) зависит от параметров A и B. От функции $v(y)$ перейдем к функции $\overline{v}(y)$ с помощью равенства $v(y) = \rho_0\overline{v}(y)$, где $\rho_0 = 1$, если $\gamma = 0{,}5\sigma + 1$, и $\rho_0 = \left(\dfrac{2\mu\overline{z}}{(2\kappa-\lambda)\overline{q}}\right)^{1/(2m)}$, если $\gamma \neq 0{,}5\sigma + 1$. Функция $\overline{v}(y)$ является решением задачи

$$(2\kappa-\lambda)\frac{\overline{q}}{\overline{z}}\overline{v}_{yy} - \lambda\overline{v}^{\lambda-1} + 2\kappa\overline{v}^{\kappa-1} = 0, \qquad \overline{v}_y(0) = 0, \qquad \overline{v}(0) = \overline{v}_0 > 0.$$

Поскольку параметры этой задачи не зависят от A и B, то и функция $\overline{v}(y)$ не зависит от A и B. Точки фронта функций $v(y)$ и $\overline{v}(y)$ совпадают, значит, точка фронта функции $v(y)$ остается неподвижной при изменении A и B. Если $\gamma = 0{,}5\sigma+1$, то $\rho_0 = 1$ и точка максимума $v(0)$ остается неподвижной. Если $\gamma < 0{,}5\sigma + 1$, то $\lim\limits_{2AB^{-2}\to m+1-\lambda} v(0) = 0$ и $\lim\limits_{AB^{-2}\to-\infty} v(0) = +\infty$. Если $\gamma > 0{,}5\sigma + 1$, то $\lim\limits_{2AB^{-2}\to m+1-\lambda} v(0) = +\infty$ и $\lim\limits_{|AB^{-2}|\to+\infty} v(0) = 0$.

Подведем итоги проведенным исследованиям. Согласно лемме пространственная форма $v(y)$ может быть двух типов. Если выполнено условие 2 леммы, то $v(y)$ это неотрицательная четная функция с ограниченным носителем, которая выпукла вверх на всем носителе. Если выполнено условие 3 леммы, то $v(y)$ это неотрицательная четная функция с ограниченным носителем, которая выпукла вверх в окрестности точки 0 и выпукла вниз в окрестности точки фронта. Тип пространственной формы зависит от сочетания знаков выражений $(1-\gamma)$, $(\lambda-m)$, B и N. Знак выражения $(\lambda-m)$ совпадает со знаком выражения $(1{,}5\sigma+3-\gamma)$. Таким образом, условия теоремы 1 будут выполнены, если $\gamma \in (0;1)\bigcup(1;1{,}5\sigma+3)\bigcup(1{,}5\sigma+3;+\infty)$. Рассмотрим каждый из этих случаев отдельно.

Пусть $\gamma \in (0;1)$. Тогда $\lambda > m$, $m < 0$. Выбрав $2A < (m+1-\lambda)B^2$, т.е. $N < 0$, получим $\mu > 0$. Тогда пространственная форма будет иметь первый тип. Так как $m+1-\lambda = (2\gamma-\sigma-4)/(2\sigma+2) < 1$ при $\gamma \in (0;1{,}5\sigma+3)$, то согласно теореме 2 и амплитуда и фронт решения стремятся к нулю и само решение сжимается в точку 0.

Пусть $\gamma \in (1;1{,}5\sigma+3)$. Тогда $\lambda > m$. Характер поведения фронта $x_0(t)$ зависит от знака параметра m, который меняет свой знак в точке $\gamma = 0{,}5\sigma+1$. Поэтому рассмотрим подслучаи.

Если $\gamma \in (1;0{,}5\sigma+1)$, то $m < 0$. Выбрав $2A < (m+1-\lambda)B^2$, т.е. $N < 0$, получим $\mu > 0$. Тогда пространственная форма будет иметь второй тип. Так как $m+1-\lambda = (2\gamma-\sigma-4)/(2\sigma+2) < 1$ при $\gamma \in (0;1{,}5\sigma+3)$, то согласно теореме 2 и амплитуда и фронт решения стремятся к нулю и само решение сжимается в точку 0.

Если $\gamma = 0{,}5\sigma+1$, то $m = 0$. Выбрав $2A < (m+1-\lambda)B^2$, т.е. $N < 0$, получим $\mu > 0$. Тогда пространственная форма будет иметь второй тип. Так как $m+1-\lambda = (2\gamma-\sigma-4)/(2\sigma+2) < 1$ при $\gamma \in (0;1{,}5\sigma+3)$, то согласно теореме 2 амплитуда стремится к нулю. Но при $m = 0$ фронт перестает зависеть от времени и остается неподвижным. Само решение прижимается к отрезку $[-x_0(0);x_0(0)]$ на оси $0x$.

Если $\gamma \in (0{,}5\sigma+1;1{,}5\sigma+3)$, то $m > 0$. Выбрав $2A < (m+1-\lambda)B^2$, т.е. $N < 0$, получим $\mu > 0$. Тогда пространственная форма будет иметь второй тип. Так как $m+1-\lambda = (2\gamma-\sigma-4)/(2\sigma+2) < 1$ при $\gamma \in (0;1{,}5\sigma+3)$, то согласно теореме 2 амплитуда решения стремится к нулю. Так как теперь $m > 0$, то фронт решения стремится к $+\infty$. Само решение угасает, растекаясь по всей оси $0x$.

Пусть $\gamma \in (1{,}5\sigma+3;+\infty)$. Тогда $\lambda < m$, $m > 0$. Теперь $m+1-\lambda = (2\gamma-\sigma-4)/(2\sigma+2) > 1$. Выбрав $2A > (m+1-\lambda)B^2$, т.е. $N > 0$, получим $\mu > 0$. Тогда пространственная форма будет иметь второй тип. Согласно теореме 2 амплитуда решения стремится к $+\infty$. В этом случае решение развивается в режиме обострения: фронты сжимаются в точку 0, а значение в точке 0 неограниченно возрастает.

Из сказанного следует, что процесс $u(t,x)$ может развиваться либо в режиме угасания, либо в режиме обострения. Угасание может иметь три сценария: 1) амплитуда падает, фронты сжимаются к нулю, $u(t,x)$ сжимается в точку 0; 2) амплитуда падает, фронты неподвижны, $u(t,x)$ оседает; 3) амплитуда падает, фронты разбегаются, $u(t,x)$ оседает, растекаясь по оси $0x$. Обострение может иметь лишь один сценарий: амплитуда неограниченно растет, фронты сжимаются в точку 0, $u(t,x)$ прижимается к оси $0x$, взрываясь в точке $x = 0$. Подобные сценарии наблюдаются и в аналогичных детерминированных задачах (см. [5, 6]). Различия между поведением решения задачи (1) и ее детерминированным аналогом объясняются тем, что знак стохастического слагаемого меняется с течением времени случайным образом и последнее слагаемое в уравнении (1) не может быть идентифицировано ни как источник, ни как поглотитель. Отметим также, что режимы с обострениями возникают лишь при достаточно больших значениях выражения $2AB^{-2}$. Это является естественным, так как при больших значениях выражения $2AB^{-2}$ коэффициент дрейфа A в уравнении (2) является положительным и доминирует над коэффициентом диффузии B, что приводит к неограниченному росту $r(t)$.

В заключение заметим, что из нашего рассмотрения выпадают случаи $\gamma = 1$ и $\gamma = 1{,}5\sigma + 3$. В первом случае стохастическое слагаемое становится линейным и техника его исследования существенно отличается от изложенной. Во втором случае автору не удалось получить уравнение для амплитуды $r(t)$. Следует отметить, что аналогичный факт наблюдается и в детерминированном случае [5, с. 260–262].

1. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 536 с.
2. *Крылов Н. В., Розовский Б. Л.* Об эволюционных стохастических уравнениях. – Москва: ВИНИТИ, 1979. – С. 74–147. – (Итоги науки и техники. Современные проблемы математики; Т. 14).
3. *Похожаев С. И.* Об одном подходе к нелинейным уравнениям // Докл. АН СССР. – 1979. – **241**, № 6. – С. 1327–1331.
4. *Melnik S. A.* The group analysis of stochastic differential equations // Ann. Univ. Sci. Budapest. – 2002. – **21**. – P. 69–79.
5. *Самарский А. А., Галактионов В. П., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Режимы с обострениями в задачах для квазилинейных параболических уравнений. – Москва: Наука, 1987. – 475 с.
6. *Курдюмов С. П.* Собственные функции горения нелинейной среды и коструктивные законы ее организации // Современные проблемы математики, физики и вычислительной техники. – Москва, Наука, 1982. – С. 217–243.

Институт прикладной математики
и механики НАН Украины, Донецк

Поступило в редакцию 29.06.2006