УДК 512.544

Т. М. Немчанінова

Групи з нескінченним центральним циклічним комутантом

(Представлено академіком НАН України А. М. Самойленком)

The groups with central cyclic commutant are considered. The finitely generated groups with infinite central cyclic commutant are completely described.

Скінченно породжені групи з комутантом порядку p описано в роботі [1]. У роботі [2] проведено класифікацію груп з циклічним комутантом порядку pq. Довільні 2-породжені групи з центральним циклічним комутантом описано в роботі [3].

У даній роботі повністю описуються скінченно породжені групи з нескінченним центральним циклічним комутантом (теорема 3).

Групи з неодиничним центральним циклічним комутантом назвемо ω-групами. З леми 2.2 [4] випливає таке твердження.

Твердження 1. *Нехай G — група, $H = \langle a, b\rangle$ — її підгрупа, $[a, b] = c$, $[a, c] = 1$, $[b, c] = 1$, тобто $c \in Z(H)$. Тоді*

$$[a^i, b^j] = [a, b^{ij}] = [a^{ij}, b] = [a, b]^{ij} = [a^i, b]^j = [a, b^j]^i = [a^j, b^i] = [a, b^i]^j = [a^j, b]^i$$

для всіх $i, j \in \mathbb{Z}$.

Означення 1 [5]. Група G називається FC-групою, якщо кожний її елемент має скінченне число спряжених. Періодична FC-група називається локально нормальною.

Твердження 2 [5]. *Будь-яка FC-група G містить таку центральну одиничну чи без скруту підгрупу Z, що G/Z — локально нормальна група.*

Лема 1. *Примарна ω-група G містить таку нормальну підгрупу $A = \langle a, b\rangle$, що $A' = G' = \langle u\rangle$, $u = [a, b]$, $|u| = p^\delta$, $\delta \in \mathbb{N}$.*

Наслідок 1. *Нехай G — періодична ω-група. Тоді вона містить таку скінченну нормальну підгрупу $A = \langle a, b\rangle$, що $A' = G' = \langle u\rangle$, $u = [a, b] \neq 1$, $|u| < \infty$.*

Наслідок 2. *Нехай G — довільна ω-група зі скінченним комутантом G'. Тоді вона містить таку нормальну підгрупу $A = \langle a, b\rangle$, що $A' = G' = \langle u\rangle$, $u = [a, b] \neq 1$.*

Лема 2. *Для будь-яких цілих чисел m, n, r на змінних i, j, k, s, t, l нижченаведена система рівнянь має розв'язки в цілих числах*

$$\begin{cases} sj - it = m, \\ sk - li = n, \\ tk - lj = r. \end{cases}$$

Лема 3. *ω-група G з нескінченним комутантом G' має таку нормальну підгрупу $A = \langle a, b\rangle$, що $A' = G' = \langle u\rangle$, $u = [a, b]$, $A = (\langle u\rangle \times \langle a\rangle) \rightthreetimes \langle b\rangle$, $|u| = |a| = |b| = \infty$, $\langle u\rangle = Z(A)$.*

Теорема 1. *Будь-яка група G з центральним циклічним комутантом містить таку підгрупу $A = \langle a, b\rangle$, що $A' = G' = \langle u\rangle \leqslant Z(G)$, $u = [a, b]$, $G = A \cdot C_G(A)$, і будь-який елемент із G' є комутатором деяких двох елементів із A.*

Доведення. Нехай G — досліджувана група. Покажемо спочатку, що G містить таку нормальну підгрупу $A = \langle a, b\rangle$, що $A' = G' = \langle u\rangle$, де $u = [a, b]$.

Нехай G — періодична група. Тоді існування шуканої підгрупи A випливає з наслідку 1.

Нехай тепер G — неперіодична група. Якщо $|G'| < \infty$, то існування $A = \langle a, b\rangle$ випливає з наслідку 2.

Нехай, нарешті, $|G'| = \infty$. Тоді існування A випливає з леми 3.

Отже, у групі G завжди існує шукана підгрупа $A = \langle a, b\rangle$. Оскільки $A \bigcap G' = A' = G' \leqslant \leqslant Z(G)$, то за лемою 1.1.2 з [6] $G = A \cdot C_G(A)$.

Нехай $f \in G'$. Тоді $f = u^i$, $i \in \mathbb{Z}$. Оскільки $G' = \langle u\rangle \leqslant Z(G)$ і $u = [a, b]$, то, за твердженням 1, $[a^i, b] = [a, b]^i = u^i = f$. Теорему доведено.

Наслідок 3. *Будь-яка група G з центральним циклічним комутантом $G' = \langle u\rangle$ містить таку нормальну підгрупу $A = \langle a, b\rangle$, що $A' = G' = \langle u\rangle \leqslant Z(G)$, $u = [a, b]$, і A — група одного з типів:*

1) $A = \langle a\rangle \times \langle b\rangle$, $u = 1$;

2) $A = \langle a, b\rangle$, $|a| = |b| = 4$, $a^2 = b^2 = [a, b]$ — група кватерніонів порядку 8;

3) $A = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle$, $|a| = 4$, $|b| \in \{2^\beta, \infty\}$, $\beta > 0$, $b^{-1}ab = a^{-1}$;

4) $A = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle$, $|a| = p^\alpha$, $|b| \in \{p^\beta, \infty\}$, $[a, b] = a^{p^k}$, α, β, $k \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha - k \leqslant k < \alpha$, $p^k > 2$;

5) $A = \langle a\rangle \cdot \langle b\rangle$, $|a| = p^\alpha$, $|b| = p^\beta$, $[a, b] = a^{p^k}$, $\langle a\rangle \bigcap \langle b\rangle = \langle a^{p^m}\rangle = \langle b^{p^n}\rangle$, α, β, m, n, $k \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha - k \leqslant k < m < \alpha < \beta$;

6) $A = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle$ — неабелева група, $\langle a\rangle = \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} \langle a_i\rangle$, $n > 1$, $|a_i| = p_i^{\alpha_i}$, $\alpha_i > 0$, $|b| = \infty$, $\langle a_i\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle$ — група одного з типів 1, 3, 4;

7) $A = (\langle u\rangle \times \langle a\rangle) \leftthreetimes \langle b\rangle$, $u \neq 1$, $|u| = r \in \mathbb{N}$, $|a| \in \{m, \infty\}$, $|b| \in \{n, \infty\}$, m, $n \in \mathbb{N}$, m, n діляться на r;

8) $A = (\langle u\rangle \cdot \langle a\rangle) \leftthreetimes \langle b\rangle$, $|u| = p^\gamma$, $|a| = p^\alpha$, $|b| \in \{p^\beta, \infty\}$, α, β, $\gamma \in \mathbb{N}$, $\langle u\rangle \bigcap \langle a\rangle = \langle u^{p^m}\rangle = = \langle a^{p^n}\rangle$, $1 < m < \gamma \leqslant n < \alpha$, $\gamma \leqslant \beta$, $[u, b] = 1$;

9) $A = (\langle u\rangle \cdot \langle a\rangle) \cdot \langle b\rangle$, $|a| = |b| = 2^\alpha$, $|u| = 2^\gamma$, $\alpha = \gamma + 1 > 2$, $\langle u\rangle \bigcap \langle a\rangle = (\langle u\rangle \cdot \langle a\rangle) \bigcap \langle b\rangle = = \omega(\langle b\rangle)$;

10) $A = (\langle u\rangle \cdot \langle a\rangle) \cdot \langle b\rangle$, $|a| = p^\alpha$, $|b| = p^\beta$, $|u| = p^\gamma$, $\alpha > \beta > \gamma > 2$, $\langle u\rangle > (\langle u\rangle \bigcap \langle b\rangle) > > (\langle u\rangle \bigcap \langle a\rangle) = (\langle u\rangle \cdot \langle a\rangle) \bigcap \langle b\rangle > 1$, $[a, u] = [b, u] = 1$;

11) $A = \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} P_i$ — скінченна непримарна неабелева група, P_i — силовська p_i-підгрупа групи G, що є групою одного з типів 1–5, 7–10.

Теорема 2. 3-*породжені групи G з нескінченним центральним циклічним комутантом G' мають вигляд*

$$G = A \cdot Z(G),$$

де $A = (\langle u\rangle \times \langle a\rangle) \leftthreetimes \langle b\rangle$, $u = [a, b]$, $|a| = |b| = |u| = \infty$, $A \bigcap Z(G) = \langle u\rangle$, та вичерпуються групами типів:

1) $G = (\langle z\rangle \times \langle a\rangle) \leftthreetimes \langle b\rangle$, $\langle u\rangle < \langle z\rangle$;

2) $G = A \times \langle d\rangle$;

3) $G = ((\langle z\rangle \times \langle a\rangle) \leftthreetimes \langle b\rangle) \times \langle d\rangle$, $[b, z] = 1$, $u = z^s$, $s > 1$, $1 < |d| = n < \infty$, $(s, n) = 1$;

4) $G = (\langle d\rangle \times \langle z\rangle \times \langle a\rangle) \leftthreetimes \langle b\rangle$, $|z| = \infty$, $|d| = n = sm$, $u = z^i d^{tm}$, $0 < t < s$, s, m, t, $n \in \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{Z}$, $(t, s) = (i, m) = 1$, $|i| > 1$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай G — досліджувана група. Тоді $G' = \langle u\rangle \leqslant Z(G)$, $|u| = \infty$.

Зрозуміло, що G задовольняє умову теореми 1, за твердженням якої $G = A \cdot D$, де $A = \langle a, b\rangle$, $[a, b] = u$, $D = C_G(A)$, $\langle u\rangle \leqslant Z(G) = D \bigcap A$. Оскільки $|u| = \infty$, то, за лемою 3, $A = (\langle u\rangle \times \langle a\rangle) \leftthreetimes \langle b\rangle$, $|a| = |b| = |u| = \infty$, $Z(A) = \langle u\rangle$. Звідси $D \bigcap A = \langle u\rangle$.

Ясно, що $G/\langle u\rangle = (D/\langle u\rangle) \times (A/\langle u\rangle)$ — 3-породжена абелева група і $A/\langle u\rangle$ — вільна абелева група рангу 2. Із цього випливає, що $D/\langle u\rangle$ — циклічна група.

Нехай спочатку $D = \langle z\rangle$. Тоді $\langle z\rangle = Z(G)$ і $G = (\langle z\rangle \times \langle a\rangle) \leftthreetimes \langle b\rangle$ — група типу 1.

Нехай надалі D — нециклічна група. Тоді $D/\langle u\rangle$ — неодинична циклічна група і, отже, D — розширення своєї центральної підгрупи $\langle u\rangle$ за допомогою циклічної групи. Із цього випливає, що D — 2-породжена абелева група і $D = Z(G)$. Припустимо, що для деякого $n \in \mathbb{Z}$ $[a^n, b] = 1$ або $[a, b^n] = 1$. Тоді, за твердженням 2, $[a^n, b] = [a, b]^n = u^n = [a, b^n] = 1$. Оскільки $|u| = \infty$ і $u^n = 1$, то $n = 0$. Із цього випливає, що $D \bigcap \langle a\rangle = \langle D, \langle a\rangle\rangle \bigcap \langle b\rangle = 1$, а тому $G = (D \times \langle a\rangle) \leftthreetimes \langle b\rangle$.

Нехай $\langle z\rangle$ — максимальна циклічна група із D, що містить $\langle u\rangle$. Можливі випадки:

1) деяка $\langle z\rangle$ доповнюється в D;

2) жодна $\langle z\rangle$ не доповнюється в D.

Випадок 1. У цьому випадку $D = \langle d\rangle \times \langle z\rangle$, $d = 1$. За попереднім, $D/\langle u\rangle = \langle\langle u\rangle d\rangle \times \langle\langle u\rangle z\rangle$ — циклічна група, $\langle d\rangle \bigcap \langle u\rangle = 1$, $\pi(|d|) \bigcap \pi(|\langle z\rangle : \langle u\rangle|) = \varnothing$, $\pi(\infty)$ — множина всіх простих чисел.

Тепер, при $\langle u\rangle = \langle z\rangle$ $D = \langle d\rangle \times \langle u\rangle$ і $G = \langle a\rangle \times \langle d\rangle$ — група типу 2.

Нехай $\langle u\rangle < \langle z\rangle$. Тоді $|d| = n < \infty$. За попереднім, $\pi(|d|) \bigcap \pi(|\langle z\rangle : \langle u\rangle|) = \varnothing$, і $G = \langle d\rangle \times$ $\times \langle z, a, b\rangle$ — група типу 3.

Випадок 1 розглянуто повністю.

Випадок 2. У цьому випадку очевидно, що $\langle u\rangle$ не доповнюється в D. Оскільки D — 2-породжена нескінченна нециклічна абелева група, то $D = \langle z\rangle \times \langle d\rangle$, $|z| = \infty$, $d \neq 1$, а тому $u = z^i d^j$, $i,\ j \in \mathbb{Z}$, і в розглядуваному випадку $u \notin \langle z\rangle$, $u \notin \langle d\rangle$, а тому $ij \neq 0$, $|j| < |d|$. Можливі випадки:

2.1) $\langle u\rangle \bigcap \langle z\rangle = 1$;

2.2) $\langle u\rangle \bigcap \langle z\rangle \neq 1$.

Випадок 2.1. У цьому випадку з недоповнюваності $\langle u\rangle$ в D випливає, що

$$\langle z\rangle \times \langle u\rangle = X < D,$$

$$|X : \langle z\rangle| = |D : \langle z\rangle| = |d| = \infty.$$

Звідси, без порушення загальності, маємо, що $\langle u\rangle \bigcap \langle d\rangle = 1$.

Нехай $\langle x\rangle$ — максимальна циклічна підгрупа з D, що містить u. У розглядуваному випадку $\langle x\rangle$ не доповнюється в D. За попереднім, $D/\langle u\rangle$ — циклічна група, а тому циклічною групою буде і $D/\langle x\rangle$. Оскільки $|d| = \infty$, то $\langle d\rangle$ — максимальна циклічна підгрупа із D і $D/\langle x\rangle = \langle\langle x\rangle d\rangle$. Звідси $D = \langle x\rangle \times \langle d\rangle$, що неможливо, оскільки $\langle x\rangle$ не доповнюється в D. Отже, випадок 2.1 неможливий.

Випадок 2.2. У цьому випадку $\langle z\rangle \bigcap \langle u\rangle = \langle v\rangle$, де $v = z^l = u^s$, $u \notin \langle z\rangle$, $u \notin \langle d\rangle$, $u = z^i d^j$, $ij \neq 0$, $1 < j < n$, $s > 1$, $|i| > 1$, $|l| > 1$. При $|d| = \infty$ одержимо, що $\langle u\rangle \bigcap \langle d\rangle = 1$ і прийдемо до випадку 2.1. Отже, вважаємо, що $|d| = n < \infty$, $n > 1$. Зрозуміло, що $D/\langle z\rangle = \langle\langle z\rangle d\rangle \geqslant \langle\langle z\rangle u\rangle$, $|\langle z\rangle d| = n$, $|\langle z\rangle u| = s$. Звідси $n = sm$. Оскільки $|z| = \infty$ і $z^l = u^s = z^{is} \cdot d^{js}$, то $l = is$. З умов $\langle z\rangle u = \langle z\rangle d^j$, $d^{js} \in \langle z\rangle$, $\langle d\rangle \bigcap \langle z\rangle = 1$ випливає, що $js = tn = tsm$, а отже, $j = tm$. Оскільки тепер $u = z^i d^{tm}$ і, очевидно, s — найменше додатне число, для якого $\langle z\rangle \bigcap \langle u\rangle = \langle u^s\rangle$, то $(t, s) = 1$, $t > 0$. Зрозуміло, що $1 < j = tm < n = sm$. Звідси $0 < t < s$.

Покладемо $\overline{D} = D/\langle v\rangle$, $\overline{z} = \langle v\rangle z$, $\overline{u} = \langle v\rangle u$, $\overline{d} = \langle v\rangle d$. Звідси

$$\overline{D} = \langle\overline{z}\rangle \times \langle\overline{d}\rangle, \qquad |\overline{z}| = l = is, \qquad |\overline{d}| = n = sm, \qquad |u| = s.$$

За попереднім, $D/\langle u\rangle \simeq \overline{D}/\langle\overline{u}\rangle$ — циклічна група. Нехай $\overline{T} = \langle\overline{z}^s\rangle \times \langle\overline{d}^s\rangle$. Тоді $\overline{u} \in \overline{T}$, $|\langle\overline{T}\rangle\overline{z}| = i$, $|\langle\overline{T}\rangle\overline{d}| = m$. Оскільки $\overline{u} \in \overline{T}$, $\overline{D}/\langle\overline{u}\rangle$ — скінченна циклічна група, то циклічною буде і група $\overline{D}/\langle\overline{T}\rangle = \langle\langle\overline{T}\rangle\overline{z}, \langle\overline{T}\rangle\overline{d}\rangle$. Із цього випливає, що $|\langle\overline{T}\rangle\overline{z}| = i$ та $|\langle\overline{T}\rangle\overline{d}| = m$ є взаємно простими числами. Отже, G — група типу 4. Випадок 2.2 розглянуто повністю. Необхідність доведено.

Достатність. Нехай G — група одного з типів 1–4. Тоді $G = (D\times\langle a\rangle)\leftthreetimes\langle b\rangle$, $|a| = |b| = \infty$, $[a, b] = u \in D \leqslant Z(G)$, $|u| = \infty$, $G' = \langle u\rangle$. У групі G типу 1 $D = \langle z\rangle$, у групі G типу 2 $D = \langle u\rangle \times \langle d\rangle$, у типах 3, 4 $D = \langle z\rangle \times \langle d\rangle$.

Для завершення доведення достатності залишається показати, що

$$G = \langle x_1, x_2, x_3\rangle.$$

Очевидно, що для групи G типу 1 правильно, що $G = \langle z, a, b\rangle$, у групі G типу 2 маємо, що $G = \langle d, a, b\rangle$.

Нехай G — група типу 3. Покладемо $x_1 = g = zd$, $x_2 = a$, $x_3 = b$ і $G_1 = \langle x_1, x_2, x_3\rangle$. Тоді $G_1 = (D_1\times\langle a\rangle)\leftthreetimes\langle b\rangle$, $\langle g, u\rangle = D_1 \leqslant D \leqslant Z(G)$. Зрозуміло, що $g^n \in D_1$, $u = z^s \in D_1$. Оскільки $(n, s) = 1$, то існують такі $n_1, s_1 \in \mathbb{Z}$, що $n\cdot n_1 + s\cdot s_1 = 1$. Звідси $z^{nn_1+ss_1} = z \in D_1$. Зрозуміло, що і $z^{-1}g = z^{-1}zd = d \in D_1$. Звідси $D_1 = \langle z\rangle \times \langle d\rangle = D$, а тому $G_1 = G$. Достатність для груп типу 3 доведено.

Нехай G — група типу 4. У її описі присутні числа i, $n = sm$, tm, для яких $(i, m) = (s, t) = 1$. Із цього випливає, що $\pi(i)\bigcap\pi(m) = \pi(s)\bigcap\pi(t) = \varnothing$.

Нехай $M_1 = \pi((i, n))$ — множина всіх спільних простих дільників чисел i та n, $M_2 = \pi((t, m, n))$. Тоді $M_1\bigcup M_2 \subseteq \pi(n)$. Припустимо, що $p \in M_1$. Тоді з умови $(i, m) = 1$ випливає, що $p \notin \pi(m)$, але $p \in \pi(n) = \pi(sm)$ і, отже, $p \in \pi(s)$. Оскільки $(s, t) = 1$, то $p \notin \pi(t)$. Звідси $p \notin \pi(mt)$. Отже, $p \notin M_2$. Із цього випливає, що $M_1\bigcap M_2 = \varnothing$.

Отже, $M_3 = \pi(n) \setminus (M_1 + M_2)$. Тоді $\pi(n) = M_1 + M_2 + M_3$. Нехай r — добуток усіх чисел з M_3, $g = z \cdot d^r = x_1$, $x_2 = a$, $x_3 = b$.

$G_1 = \langle x_1, x_2, x_3\rangle = (D_1 \times \langle a\rangle) \leftthreetimes \langle b\rangle$, $\langle g, u\rangle = D_1 \leqslant D \leqslant Z(G)$. Зрозуміло, що $|D_1 : \langle g\rangle| \leqslant |D : \langle g\rangle| = n$. Із цього випливає, що існує таке найменше натуральне k, для якого $u^k = g^l$, $l \in \mathbb{Z}$. Звідси $(z^i d^{tm})^k = (z \cdot d^r)^l$, тобто $z^{ik}d^{tmk} = z^l \cdot d^{rl}$. Отже, $z^{l-ik} = d^{tmk-rl}$. Оскільки $|z| = \infty$, $\langle d\rangle\bigcap\langle z\rangle = 1$, то $l = ik$, $tmk - rl \equiv 0 \pmod n$. Але тоді $tmk - rik = k(tm - ri) = kh \equiv 0 \pmod n$, де $h = tm - ri$.

Покажемо, що $(h, n) = 1$. Припустимо, що це не так. Тоді існує p, що ділить як h, так і n. Звідси випливає, що p належить тільки одній з множин M_1, M_2, M_3. Але тоді p ділить тільки одне з двох чисел: або mt, або ri, що неможливо. Отже, $(h, n) = 1$.

Оскільки $(k, h) \equiv 0 \pmod n$, то $k = fn$, $f \in \mathbb{N}$. За вибором k маємо, що $k = n$. Із цього випливає, що $n = |D : \langle g\rangle| = |D_1 : \langle g\rangle| = k$, тобто $D_1 = D$, $g_1 = g$. Достатність для груп типу 4 доведено.

Усі випадки розглянуто. Достатність доведено. Теорему доведено.

Теорема 3. *Скінченно породжені групи G з нескінченним центральним циклічним комутантом $G' = \langle u\rangle$ мають вигляд*

$$G = Z \times U,$$

де Z — скінченно породжена абелева група, $U = AD$, $A' = G' = \langle u \rangle \leqslant \langle z \rangle = Z(A) \leqslant D \leqslant Z(G)$, $|u| = \infty$, $A = A_1 \cdot \dots \cdot A_i \cdot \dots \cdot A_n$, $A_i = (\langle z \rangle \times \langle a_i \rangle) \leftthreetimes \langle b_i \rangle$, $|z| = |a_i| = |b_i| = \infty$, $[a_1, b_1] = u_1 = u \in \langle z \rangle$, $[a_i, b_i] = u_i$, $|u_i| = \infty$; при $n > 1$ та $1 < i < n$ маємо, що $\left(\prod_{j=1}^{i-1} A_j\right) \bigcap \left(\prod_{j=1}^{n} A_j\right) = \langle z \rangle$; при $1 < i \leqslant n$ $[a_i, b_i] \in \langle u_{i-1} \rangle$; при $1 \leqslant i < j \leqslant n$ $[A_i, A_j] = 1$, та вичерпуються групами, у яких підгрупа D є групою одного з типів:

1) $D = \langle z \rangle$;

2) $D = B \times \langle g \rangle$, B — неодинична скінченна абелева група, $z = bg^l$, l — ціле число, $|l| > 1$, $b \in B$, $1 < |b| = n$, $\pi(B) = \pi(n)$, $\langle b \rangle$ не доповнюється в B.

Доведення. Нехай G — досліджувана група. Тоді з умови $G' = \langle u \rangle \leqslant Z(G)$, за відомими результатами [7, с. 402], G — група з умовами максимальності для підгруп. Звідси, за результатами [7, с. 341], випливає, що будь-яка підгрупа групи G має скінченне число твірних елементів.

Нехай Z — максимальна, доповнювана в G, підгрупа із $Z(G)$. Тоді $G = Z \times U$. За попереднім, Z і U — скінченно породжені групи. Зрозуміло, що $G' = Z' \times U' = U' = \langle u \rangle$ і $Z(G) = Z \times Z(U)$ — скінченно породжена абелева група, $\langle u \rangle \leqslant Z(U)$ — теж скінченно породжена група. За вибором Z, $Z(U)$ не містить неодиничних підгруп, доповнюваних в U. За результатами [7, с. 400], група G має періодичну частину $T(G)$, що розкладається в прямий добуток силовських p-підгруп групи G для всіх $p \in \pi(G)$. За попереднім, $T(G)$ — скінченно породжена нормальна підгрупа групи G, $G' \bigcap T(G) = 1$. Звідси $T(G)$ — скінченна підгрупа і $T(G) \leqslant Z(G)$. За теоремою 1, $U = A \cdot C$, $A = (\langle u \rangle \times \langle a \rangle) \leftthreetimes \langle b \rangle$, $[a, b] = u$, $C = C_U(A)$, $C \bigcap A = \langle u \rangle = Z(A) \leqslant Z(G)$.

Нехай $\langle u \rangle \leqslant \langle z \rangle$. Покажемо, що $\langle z \rangle \leqslant Z(G)$. Зрозуміло, що $\langle z \rangle \triangleleft G$, а отже, $C_G(\langle z \rangle) \triangleleft G$. Відомо, що факторгрупа $G/C_G(\langle z \rangle)$ ізоморфна підгрупі із $\mathrm{Aut}(\langle z \rangle)$ і $|\mathrm{Aut}(\langle z \rangle)| = 2$. Звідси $|G : C_G(\langle z \rangle)| \leqslant 2$. Припустимо, що $|G : C_G(\langle z \rangle)| = 2$. Тоді знайдеться елемент $g \in Z \setminus C_G(\langle z \rangle)$ такий, що $g^{-1}zg = z^{-1}$, а тому $g^{-1}ug = u^{-1}$ і, отже, $u \notin Z(G)$, що неможливо. Звідси $C_G(\langle z \rangle) = G$, а тому $\langle z \rangle \leqslant Z(G)$.

Нехай $\langle z \rangle$ — максимальна циклічна підгрупа з U, що містить $\langle u \rangle$. Тоді $\langle z \rangle \leqslant C$, $\langle z \rangle$ — максимальна циклічна підгрупа із $Z(G)$, що містить $\langle u \rangle$, $\langle z \rangle \bigcap A = \langle u \rangle$. Звідси випливає, що в U існує підгрупа $A_1 = (\langle z \rangle \times \langle a \rangle) \leftthreetimes \langle b \rangle$, $[a, b] = u \in \langle z \rangle$, $U = C \cdot A_1$, $A_1 \bigcap C = \langle z \rangle$. Можливі випадки:

1) $C' = 1$;

2) $C' \neq 1$.

Випадок 1. У цьому випадку $C \leqslant Z(G)$. За вибором Z C не містить власних доповнюваних підгруп, що містять $\langle u \rangle$. Якщо $C = \langle z \rangle$, то покладемо $D = C$, $A_1 = A$. Тоді $U = D \cdot A$, де D — група типу 1.

Нехай $\langle z \rangle < C$. За попереднім, $\langle z \rangle$ не доповнюється в C. Зрозуміло, що $C = B \times V$, де $B = T(C)$ — скінченна абелева група, V — вільна абелева група рангу k.

Покажемо, що при нашому виборі Z $k = 1$.

Нехай $k > 1$. Тоді $V = \mathop{\times}\limits_{i=1}^{k} \langle v_i \rangle$, $|v_i| = \infty$. Зрозуміло, що $z = x \cdot v$, $x \in B$, $v \in V$, $v \neq 1$, а тому $v = \prod_{i=1}^{k} v_i^{m_i}$, $m_i \in \mathbb{Z}$. Оскільки $\langle v_i \rangle = \langle v_i^{-1} \rangle$, то без порушення загальності можна вважати, що $m_i \geqslant 0$. Будемо вважати, що $m_k = 0$. Тоді $z \in B \times \left(\mathop{\times}\limits_{i=1}^{k-1} \langle v_i \rangle\right)$ — власна підгрупа з C, доповнювана підгрупою $\langle v_k \rangle$, що неможливо. Отже, $m_i \in \mathbb{N}$. Серед усіх розкладів V

у прямий добуток своїх нескінченних циклічних підгруп можна вибрати такий, що $m_i \geqslant \geqslant m_k = m$. Зрозуміло тепер, що $m_i = q_i m + r_i$, $0 \leqslant r_i < m$, а тому $\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant k-1} r_i < m$. Із цього випливає, що $v_i^{m_i} = v_i^{m \cdot q_i} \cdot v_i^{r_i}$. Покладемо $x_k = v_k \cdot \prod\limits_{i=1}^{k-1} v_i^{q_i}$, $y_k = \prod\limits_{i=1}^{k-1} v_i^{r_i}$. Звідси $v = y_k \cdot x_k^m$. Покладемо при $i < k$ $x_i = v_i$, тоді $v = x_k^m \cdot \prod\limits_{i=1}^{k-1} x_i^{r_i}$, і $V = \langle x_k \rangle \times \left(\mathop{\times}\limits_{i=1}^{k-1} \langle x_i \rangle\right)$. Тепер, за вибором m при $i < k$ $r_k = 0$ і $v = x_k^m$. Із цього випливає, що $z \in (B \times \langle x_k \rangle)$ — підгрупа, доповнювана в C, що неможливо. Із цієї суперечності випливає, що $V = \langle g \rangle$, $C = B \times \langle g \rangle$, $\langle u \rangle \leqslant \langle z \rangle$ — не доповнюється в C. Зрозуміло, що $u = z^s \notin \langle g \rangle$, $s > 1$. Оскільки $|B| < \infty$, то $\langle z \rangle \bigcap \langle g \rangle = \langle v \rangle \neq 1$ і $z \notin \langle g \rangle$, $g \notin \langle z \rangle$. Звідси $v = z^i = g^j$, $ij \neq 0$, $i \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{Z}$. Очевидно, що $z = bg^l$, $b \in B$, $l \in \mathbb{Z}$, $1 < |b| = n$, $n \in \mathbb{N}$. Оскільки $\langle z \rangle$ не доповнюється в C, то $|l| > 1$. Зрозуміло тепер, що найменшим $i \in \mathbb{N}$, для якого $z^i \in \langle g \rangle$, буде число n, тобто $i = n$. Із цього випливає, що $z^n = b^n g^{ln} = g^j$, звідси $ln = j$. Нехай $C_1 = \langle b \rangle \times \langle g \rangle$. Тоді $C_1 \bigcap B = \langle b \rangle$. Ясно, що $\langle z \rangle \leqslant C_1$. Припустимо, що $B = \langle b \rangle \times B_1$. Тоді $C = C_1 \times B_1$. За попереднім, $B_1 = 1$, а отже, $B = \langle b \rangle$, $\pi(\langle b \rangle) = \pi(B)$. Припустимо, що $\langle b \rangle$ не доповнюється в B. Тоді $\pi(\langle b \rangle) = \pi(B) = \pi(n)$. Покладемо $A_1 = A$ і $C = D$. Тоді D — група типу 2. Випадок 1 розглянуто повністю.

Випадок 2. Покладемо $a_1 = a$, $u_1 = u$, $b_1 = b$, $A_1 = A$, $C_1 = C$. Тоді $U = A_1 \cdot C_1$, $A_1 \bigcap C_1 = \langle z \rangle$, $C_U(A_1) = C_1$, $C_1' \neq 1$.

Зрозуміло, що $C_1 \leqslant \langle u \rangle = \langle u_1 \rangle$. Звідси $1 < \langle u_1 \rangle$, а тому $C_1' = \langle u_2 \rangle$, $|u_2| = \infty$. Тепер для C_1, як і для U, маємо, що $C_1 = A_2 \cdot C_2$, $A_2 = ((\langle z \rangle \times \langle a_2 \rangle) \leftthreetimes \langle b_2 \rangle$, $[a_1, a_2] = u_2 \in \langle u_1 \rangle = \langle u \rangle \leqslant \langle z \rangle$, $|a_2| = |b_2| = \infty$, $A_2 \bigcap C_2 = \langle z \rangle$. Покладемо $B_1 = A_1$, $B_2 = A_1 A_2$. Тоді

$$C_{C_1}(A_2) = C_2 = C_U(B_2), \qquad A_1 \bigcap A_2 = \langle z \rangle = Z(B_2) = C_2 \bigcap B_2, \qquad [A_1, A_2] = 1.$$

Якщо тепер $C_2' = 1$, то, як і у випадку 1, $C_2 = D$ — група типу 1 або 2. Поклавши $B_2 = A$, одержимо, що $U = D \cdot A$, і в цьому випадку необхідність доведено.

Нехай $C_2' \neq 1$. Тоді, як і для C_1, одержимо, що $C_2 = C_3 A_3$, $A_3 = ((\langle z \rangle \times \langle a_3 \rangle) \leftthreetimes \langle b_3 \rangle$, $[a_3, b_3] = u_3$, $1 < \langle u_3 \rangle \leqslant \langle u_2 \rangle$, $C_3 \bigcap A_3 = \langle z \rangle$.

Оскільки U — скінченно породжена група, то процес побудови підгруп

$$C_1 > C_2 > C_3 > \cdots,$$

$$A_1, A_2, A_3, \ldots,$$

$$B_1 < B_2 < B_3 = B_2 A_3 < \cdots$$

закінчується на деякому n-му кроці, $n \in \mathbb{N}$ при умові $C_n' = 1$, де, за попереднім, $C_n' = D$ — група типів 1 або 2, $A = \prod\limits_{i=1}^{n} A_i$, $U = DA$. Випадок 2 розглянуто повністю.

Усі випадки розглянуто. Необхідність доведено.

Достатність. Нехай G — група з твердження теореми. Тоді очевидно, що G — скінченно породжена група і $G' = \langle u \rangle \leqslant Z(G)$, $|u| = \infty$. Достатність доведено. Теорему доведено.

1. *Сергейчук В. В.* Конечнопорожденные группы с коммутантом простого порядка // Укр. мат. журн. – 1978. – **30**, № 6. – С. 789–796.
2. *Мазурок О. О.* Класифікація груп з комутантом порядка pq // Класи груп з обмеженнями для підгруп: Зб. наук. пр. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1997. – С. 65–67.
3. *Требенко Д. Я.* Нильпотентные группы класса два с двумя образующими // Современный анализ и его приложения: Сб. науч. тр. – Київ: Наук. думка, 1989. – С. 201–208.

4. *Gorenstein D.* Finite groups. – New York: Harper and Row, 1968. – 527 p.
5. *Черников С. Н.* О строении групп с конечными классами сопряженных элементов // Докл. АН СССР. – 1957. – № 115. – С. 60–63.
6. *Кузенний М. Ф., Семко М. М.* Метагамільтонові групи та їх узагальнення. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1996. – 232 с.
7. *Курош А. Г.* Теория групп. – Москва: Наука, 1967. – 648 с.

Міжнародний Соломонів університет, Київ *Надійшло до редакції 05.06.2006*

УДК 517.962.2

Г. П. Пелюх

О структуре общего непрерывного решения систем линейных разностных уравнений с непрерывным аргументом

(Представлено академиком НАН Украины Ю. А. Митропольским)

We consider the structure of a set of continuous solutions of one class of systems of linear difference equations with continuous argument.

Настоящая работа посвящена исследованию структуры множества непрерывных решений системы линейных разностных уравнений вида

$$x(t+1) = [\Lambda + A(t)]x(t), \tag{1}$$

где $t \in \mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$, Λ — постоянная вещественная $(n \times n)$-матрица, $A(t) = (a_{ij}(t))$ — вещественная $(n \times n)$-матрица. При различных предположениях относительно матриц Λ, $A(t)$ эта задача изучалась многими математиками и во многих случаях достаточно хорошо исследована (см. [1–7] и цитируемую в них литературу). Основной целью настоящей работы является построение общего непрерывного при $t \geqslant T > 0$ решения системы уравнений (1) и изучение его структуры.

Так как общее непрерывное решение достаточно просто строится для систем линейных уравнений с постоянными коэффициентами, то при решении поставленной задачи мы используем метод, состоящий в преобразовании системы уравнений (1) к линейному виду

$$y(t+1) = \Lambda y(t). \tag{2}$$

Тем самым решение нашей задачи сводится к исследованию вопроса о существовании взаимно однозначной замены переменных, приводящей систему уравнений (1) к линейному виду (2). Положительный ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия:*

1) $\det A(t) \neq 0$, $\det(\Lambda + A(t)) \neq 0$ *при всех* $t \in \mathbb{R}^+$*;*