ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

2 • 2007

МЕХАНІКА

УДК 539.3:621.333

Член-корреспондент НАН Украины **А. Е. Божко, Е. М. Иванов, З. А. Иванова**

О построении математических моделей объемного напряженно-деформированного состояния конических колес с круговой формой зубьев

A theory of the structure of an approximate solution of the problem of determination of the fields of bending stresses in circular gears of conic wheels is developed.

Одной из важных проблем повышения надежности конических зубчатых передач при условии снижения металлоемкости и улучшения качества их эксплуатационных показателей является совершенствование методов расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) зубчатых зацеплений с учетом геометрии зубьев и зубчатых колес в целом. При зацеплении пары зубьев конических колес имеют место силовые взаимодействия, деформирующие как зуб, так и венец зубчатого конического колеса. Возникающие при этом изгибные напряжения у корня зуба в значительной мере зависят от радиальных размеров конического колеса, от толщины зубчатого венца и соединительного диска. Существующие методы исследования изгибных напряжений [1, 2] основаны на ряде грубых допущений: зуб аппроксимируется упругим гребнем трапециедального сечения; гантель у корня зуба, а также влияние угла наклона, конусность зуба и конструкция зубчатого колеса учитываются весьма приближенно. Более точный учет этих параметров сопряжен с установлением краевых условий при использовании вариационных методов теории упругости, что, в свою очередь, обусловлено геометрией исследуемых конических зубчатых колес. Поскольку конические зубчатые колеса в условиях эксплуатации находятся в объемном НДС, то и соответствующее решение необходимо строить в трехмерной постановке. В качестве модели деформируемого тела в данной работе принимается идеально упругое тело [3, 4]. Заметим, что технологические операции (механическая, химико-термическая обработки зубьев), хотя и влияют на механические характеристики материала, из которого они изготовлены, но не оказывают влияния на НДС, а влияют на допускаемое напряжение [5, 6].

При построении модели предположим, что упругая область и граничная поверхность конического зубчатого колеса с круговыми зубьями представлена в неявном виде как непрерывная функция непрерывного аргумента $D = \omega(x, y, z) \geqslant 0$, в состав которой входят отдельные участки всей области D, заданные своими уравнениями

$$\left.\begin{aligned} f_{n1} &= \omega_1(x, y, z) = 0, \\ f_{n2} &= \omega_2(x, y, z) = 0, \\ f_{n3} &= \omega_3(x, y, z) = 0, \\ f_{n4} &= \omega_4(x, y, z) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где ω_1 — уравнение поверхности жесткой заделки зубчатого колеса; ω_2 — поверхность пятна контакта; ω_3 — поверхность всей упругой области без заделки и пятна контакта; ω_4 — поверхность всей упругой области без заделки. Эти функции нормированы на границе f_{n1} и удовлетворяют следующим условиям [7]:

$$\omega_i(x, y, z) > 0 \quad \text{в} \quad (D), \qquad \omega_i(x, y, z)\big|_{f_i} = 0, \qquad \left.\frac{\partial \omega_i(x, y, z)}{\partial r}\right|_{f_i} = -1,$$

где r — нормаль к поверхности области.

Такие уравнения для сложных областей могут быть построены с использованием R-функций [7] в виде суперпозиции опорных областей, представляющих собой отдельные участки зуба и зубчатого колеса. Так как в структуру упругой области D входят участки (1) и в частности f_{n2}, то возможно сформулировать краевое условие, вытекающее из необходимости учета внешних сил, действующих на упругую область D. В общем случае задача об определении НДС круговых зубьев конических колес является смешанной пространственной задачей теории упругости. Нахождение соответствующих перемещений точек упругого тела при этом сводится к определению вектора упругих перемещений [8, 9]

$$\overline{U}(x, y, z) = \bar{i}U(x, y, z) + \bar{j}\upsilon(x, y, z) + \overline{k}w(x, y, z), \tag{2}$$

удовлетворяющего в упругой области D уравнениям равновесия Ламе

$$\left.\begin{aligned} (\lambda + \mu)\frac{\partial \Theta}{\partial x} + \mu\nabla^2 U = 0, \\ (\lambda + \mu)\frac{\partial \Theta}{\partial y} + \mu\nabla^2 \upsilon = 0, \\ (\lambda + \mu)\frac{\partial \Theta}{\partial z} + \mu\nabla^2 w = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Здесь U, υ, w, Θ — геометрические характеристики деформации; λ, μ — физические характеристики материала (упругие постоянные Ламе), $\lambda = \dfrac{E\upsilon}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}$, $\mu = \dfrac{E}{2(1+\upsilon)}$, где E — модуль упругости первого рода; υ — коэффициент Пуассона. Вектор $\overline{U}$ (2) должен удовлетворять следующим краевым условиям:

$$\left.\begin{aligned} &\overline{U}(x, y, z)\big|_{\omega_1} = 0; \\ &T_G(\overline{U})\big|_{\omega_3} = 0, \quad T_G \cdot \overline{n}; \\ &T_G(\overline{U})\big|_{\omega_2} = -P \cdot \overline{n}, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где T_G — тензор напряжений; $\overline{n}$ — единичная внешняя нормаль; P — интенсивность распределения нагрузки по пятну контакта.

Применение вариационно-структурного метода позволяет на аналитическом уровне точно учесть содержащую в постановке краевой задачи геометрическую информацию не только отдельных зубьев, но и всего зубчатого колеса. В задаче о НДС зубьев (см. (3), (4)) структура решения может быть представлена в виде [7]

$$\overline{U} = \omega_1 \Phi. \tag{5}$$

Независимо от выбора вектора $\overline{\Phi}$, с учетом (1), условие жесткой заделки упругой области удовлетворяется автоматически. Так как вектор $\overline{U}$ (5) должен удовлетворять дифференциальным уравнениям (3) и граничным условиям (4), то необходимо вектор $\overline{\Phi}$ представить в виде $\overline{\Phi} = \Phi_0 + \omega\overline{\Phi_1}$. Тогда структуру (5) запишем

$$\overline{U} = \omega_1\overline{\Phi}_0 + \omega\omega_1\overline{\Phi_1}, \tag{6}$$

где $\overline{\Phi_0}$, $\overline{\Phi_1}$ — произвольные векторы.

Оператор напряжения в (4), примененный к вектору $\overline{U}$, дает вектор напряжений на площадке с внешней нормалью $\bar{r}$. Воспользовавшись его векторной записью с учетом (6), напряжение на площадке с внешней нормалью $\bar{r}$ в любой точке упругой области может быть определим таким образом:

$$\begin{gathered} T(\overline{U}) = T(\omega_1\overline{\Phi_0}) + T(\omega\omega_1\overline{\Phi_{10}}) = 2\mu\overline{\Phi_0} + \lambda\nabla\omega_1(\overline{\Phi_0}\nabla\omega_1) - \mu\nabla\omega_1 \times (\overline{\Phi_0} \times \nabla\omega_1) + \\ + 2\mu\overline{F_1} + \lambda\nabla\omega(\overline{F}\nabla\omega) - \mu\nabla\omega \times (\overline{F_1} \times \nabla\omega), \\ \overline{F_1} = \omega_1\overline{\Phi_1}. \end{gathered} \tag{7}$$

Из (7) видно, что вследствие выбора структуры решения в виде (6) через алгебрологические функции $\omega_i(x, y, z)$ [7], обращающиеся в нуль на границе, напряжение заделки описывается выражением

$$-T(\overline{U}) = 2\mu\overline{\Phi_0} + \lambda\nabla\omega_1(\overline{\Phi_0}\nabla\omega_1) - \mu\nabla\omega_1 \times (\overline{\Phi_0} \times \nabla\omega_1).$$

Выберем теперь вектор $\overline{\Phi_1}$ так, чтобы выполнялось второе и третье условие (4), т. е. $T(\overline{U})\Big|_{\omega_4} = \dfrac{P\omega_3}{\omega_2 + \omega_3}\bar{r}$ или в развернутом виде с учетом структуры (6)

$$2\mu\overline{F_1} + \lambda\nabla\omega_1(\overline{F_1}\nabla\omega) - \mu\nabla\omega \times (\overline{F_1} \times \nabla\omega) = \overline{B}, \tag{8}$$

где $\overline{B} = -2\mu(\nabla\omega\nabla)(\omega_1\overline{\Phi_0}) - \lambda\nabla\omega\,\mathrm{div}\,(\omega_1\overline{\Phi_0}) - \mu[\nabla\omega r_0 t(\omega_1\overline{\Phi_0})] - \dfrac{P\omega_3}{\omega_2 + \omega_3}\bar{r}$.

Выполняя в (8) тождественные преобразования и решая его относительно вектора $\overline{F_1}$, получим $\overline{F_1} = \dfrac{\nabla\omega}{\lambda + 2\mu}(\overline{B}\nabla\omega) + \dfrac{1}{\mu}\nabla\omega \times (\overline{B} \times \nabla\omega)$, откуда

$$\overline{\Phi_1} = \frac{1}{\omega_1 + \omega_4}\left[\frac{\nabla\omega}{\lambda + 2\mu}(\overline{B}\nabla\omega) + \frac{1}{\mu}\nabla\omega \times (\overline{B} \times \nabla\omega)\right]. \tag{9}$$

Структура решения задачи с учетом (9) окончательно имеет вид

$$\overline{U}=\omega_1\overline{\Phi_0}+\omega\left\{\frac{\omega_1}{\omega_1+\omega_4}\left[\frac{\nabla\omega}{\lambda+2\mu}(\overline{B}\nabla\omega)+\frac{1}{\mu}\nabla\omega\times(\overline{B}\times\nabla\omega)\right]\right\}. \tag{10}$$

В структуре (10) вектор $\overline{\Phi_0}$ пока произвольный, а все граничные условия удовлетворены. Выбор вектора $\overline{\Phi_0}$ можно осуществить путем наилучшего удовлетворения системе (3). Для этого приведем структуру решения к линейному виду относительно системы координатных функций. В выражении (10) положим

$$\left.\begin{aligned}&\overline{\Phi_0}=\Phi_{0x}\bar{I}+\Phi_{0y}\bar{I}+\Phi_{0z}\overline{K};\\&\overline{B}=B_x\bar{I}+B_y\bar{I}+B_z\overline{K}.\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Раскрывая операции скалярного и двойного векторного произведения в выражении структуры и приведя подобные члены относительно единичных векторов $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, получим выражение вектора упругих перемещений $\overline{U}$ через его компоненты

$$\overline{U}=u\bar{i}+v\bar{j}+w\bar{k}, \tag{12}$$

где

$$u=\omega_1\left\{\Phi_{0x}+\omega^1\left[\frac{1}{\mu}B_x\,\mathrm{grad}^2\,\omega-\frac{\lambda+\mu}{\mu(\lambda+2\mu)}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial x}(\overline{B},\mathrm{grad}\,\omega)\right]\right\};$$

$$v=\omega_1\left\{\Phi_{0y}+\omega^1\left[\frac{1}{\mu}B_y\,\mathrm{grad}^2\,\omega-\frac{\lambda+\mu}{\mu(\lambda+2\mu)}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial y}(\overline{B},\mathrm{grad}\,\omega)\right]\right\};$$

$$w=\omega_1\left\{\Phi_{0z}+\omega^1\left[\frac{1}{\mu}B_z\,\mathrm{grad}^2\,\omega-\frac{\lambda+\mu}{\mu(\lambda+2\mu)}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial z}(\overline{B},\mathrm{grad}\,\omega)\right]\right\}.$$

Выберем далее функции $\Phi_{0\tau}(\tau=x,y,z)$ в виде разложения по некоторой системе функций f_{ijk}. Тогда вектор $\overline{\Phi}$ из (11) можно представить в виде

$$\overline{\Phi_{0n}}=\sum_{i+j+k=0}^{n}\overline{C_{ijk}}f_{ijk},\qquad \overline{C}_{ijk}=C_{ijk}\bar{i}C^2_{ijk}\bar{j}+C^3_{ijk}\bar{k},$$

где

$$\Phi_{0nx}=\sum_{i+j+k=0}^{n}\overline{C}^1_{ijk}f_{ijk};\qquad \Phi_{0ny}=\sum_{i+j+k=0}^{n}\overline{C}^2_{ijk}f_{ijk};\qquad \Phi_{0nz}=\sum_{i+j+k=0}^{n}\overline{C}^3_{ijk}f_{ijk}.$$

Так как компоненты вектора (12) выражены через компоненты векторов $\overline{\Phi_0}$ и $\overline{B}$, то для линейного представления n-го приближения вектора $\overline{U_n}$ найдем выражения компонент вектора $\overline{B}$ через компоненты вектора $\overline{\Phi_0}$ в виде (8). Учитывая линейность операторных слагаемых вектора $\overline{B}$ (см. (8)), после подстановки в него $\overline{\Phi_{0n}}$ и выполнения ряда векторных преобразований, получим выражения для компонент $B_{n\tau}(\tau=x,y,z)$ в разложении (11) в виде

$$B_{nx}=-\sum_{i+j+k=0}^{n}C^1_{ijk}\left[\mu(\nabla\omega_1\nabla\omega_1 f_{ijk})+(\lambda+\mu)\frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial\omega_1\partial f_{ijk}}{\partial x}\right]+$$

$$
+\sum_{i+j+k=0}^{n} C_{ijk}^{2}\left[\lambda \frac{\partial \omega}{\partial x}\frac{\partial \omega_1 f_{ijk}}{\partial y}+\mu \frac{\partial \omega}{\partial y}\frac{\partial \omega_1 f_{ijk}}{\partial x}\right]+
$$

$$
+\sum_{i+j+k=0}^{n} C_{ijk}^{3}\left[\lambda \frac{\partial \omega}{\partial x}\frac{\partial \omega_1 f_{ijk}}{\partial z}+\mu \frac{\partial \omega}{\partial z}\frac{\partial \omega_1 f_{ijk}}{\partial x}\right]-\frac{P\omega_3}{\omega_2+\omega_3}\frac{\partial \omega}{\partial x};
$$

$$
B_{ny}=-\sum_{i+j+k=0}^{n} C_{ijk}^{1}\left[\lambda \frac{\partial \omega}{\partial y}\frac{\partial \omega_1 f_{ijk}}{\partial x}+\mu \frac{\partial \omega}{\partial x}\frac{\partial \omega_1 f_{ijk}}{\partial y}\right]+
$$

$$
+\sum_{i+j+k=0}^{n} C_{ijk}^{2}\left[\mu(\nabla \omega_1 \nabla \omega_1 f_{ijk})+(\lambda+\mu)\frac{\partial \omega}{\partial y}\frac{\partial \omega_1 \partial f_{ijk}}{\partial y}\right]+
$$

$$
+\sum_{i+j+k=0}^{n} C_{ijk}^{3}\left[\lambda \frac{\partial \omega}{\partial y}\frac{\partial \omega_1 f_{ijk}}{\partial z}+\mu \frac{\partial \omega}{\partial z}\frac{\partial \omega_1 f_{ijk}}{\partial y}\right]-\frac{P\omega_3}{\omega_2+\omega_3}\frac{\partial \omega}{\partial y};
$$

$$
B_{nz}=-\sum_{i+j+k=0}^{n} C_{ijk}^{1}\left[\lambda \frac{\partial \omega}{\partial z}\frac{\partial \omega_1 f_{ijk}}{\partial x}+\mu \frac{\partial \omega}{\partial x}\frac{\partial \omega_1 f_{ijk}}{\partial z}\right]+
$$

$$
+\sum_{i+j+k=0}^{n} C_{ijk}^{2}\left[\lambda \frac{\partial \omega}{\partial z}\frac{\partial \omega_1 f_{ijk}}{\partial y}+\mu \frac{\partial \omega}{\partial y}\frac{\partial \omega_1 f_{ijk}}{\partial z}\right]+
$$

$$
+\sum_{i+j+k=0}^{n} C_{ijk}^{3}\left[\mu(\nabla \omega_1 \nabla \omega_1 f_{ijk})+(\lambda+\mu)\frac{\partial \omega}{\partial z}\frac{\partial \omega_1 \partial f_{ijk}}{\partial y}\right]-\frac{P\omega_3}{\omega_2+\omega_3}\frac{\partial \omega}{\partial z}. \qquad (13)
$$

Подставляя (13) в (12) после некоторых преобразований, получим выражения для компонент вектора $\overline{U}$ в любой точке зубчатого колеса

$$
U_n = U_0 + \sum_{i+j+k=0}^{n} (C_{ijk}^{1}U_{ijk}^{1}+C_{ijk}^{2}U_{ijk}^{2}+C_{ijk}^{3}U_{ijk}^{3});
$$

$$
V_n = V_0 + \sum_{i+j+k=0}^{n} (C_{ijk}^{1}V_{ijk}^{1}+C_{ijk}^{2}V_{ijk}^{2}+C_{ijk}^{3}U_{ijk}^{3});
$$

$$
W_n = W_0 + \sum_{i+j+k=0}^{n} (C_{ijk}^{1}W_{ijk}^{1}+C_{ijk}^{2}W_{ijk}^{2}+C_{ijk}^{3}W_{ijk}^{3})
$$

и вектор упругих перемещений запишем

$$
\overline{U}_n = \overline{U}_0 + \sum_{i+j+k=0}^{n} (C_{ijk}^{1}\overline{U}_{ijk}^{1}+C_{ijk}^{2}\overline{U}_{ijk}^{2}+C_{ijk}^{3}\overline{U}_{ijk}^{3}),
$$

где

$$
\overline{U}_0 = U_0\bar{i}+V_0\bar{j}+W_0\overline{k}; \qquad \overline{U}_{ijk}^{1}=\overline{U}_{ijk}^{1}\bar{i}+V_{ijk}^{1}\bar{j}+W_{ijk}^{1}\overline{k};
$$
$$
\overline{U}_{ijk}^{2}=\overline{U}_{ijk}^{2}\bar{i}+V_{ijk}^{2}\bar{j}+W_{ijk}^{2}\overline{k}; \qquad \overline{U}_{ijk}^{3}=\overline{U}_{ijk}^{3}\bar{i}+V_{ijk}^{3}\bar{j}+W_{ijk}^{3}\overline{k}.
$$

Заметим, что в величинах C_{ijk}^{1}, C_{ijk}^{2}, C_{ijk}^{3}, а также в U_{ijk}^{τ}, V_{ijk}^{τ}, W_{ijk}^{τ}, $\overline{U}_{ijk}^{\tau}$, $\tau = 1, 2, 3$, вверху справа проставлены индексы, а не показатели степени. Векторы $\overline{U}_0$, U_{ijk}^{τ}, $\tau = \overline{1, 3}$, удовлетворяют следующим краевым условиям:

$$\overline{U}_0\big|_{\omega} = 0; \quad T(\overline{U}_0)\bigg|_{\omega} = \frac{P\omega_3}{\omega_2 + \omega_3}; \quad T(\overline{U}_0)\big|_{\omega_1} = 0; \quad T(\overline{U}_{ijk}^{\tau})\big|_{\omega_4} = 0; \quad \overline{U}_{ijk}^{\tau}\big|_{\omega_1} = 0; \quad \tau = \overline{1, 3}.$$

Постоянные параметры C_{ijk}^{τ}, $\tau = \overline{1, 3}$, определяются из условия наилучшего приближения структуры к вектору реальных перемещений. Этому условию отвечают решения, использующие методы Ритца, Бубнова–Галеркина и другие, так как структура $\overline{U}_n$ удовлетворяет геометрическим и статическим граничным условиям.

По методу Ритца [10], решение дифференциальных уравнений (3) при краевых условиях (4) эквивалентно задаче вариационного исчисления и минимизации потенциальной энергии внешних и внутренних сил системы, действующих на упругую область D, для которой дифференциальные уравнения (3) являются уравнениями Эйлера–Лагранжа. В этом случае приближенное значение вектора упругих перемещений, выбранное в виде семейства функций (см. (2))

$$\overline{U}_n(x, y, z) = \bar{i}U_n + j\upsilon_n + \bar{k}W_n,$$

где

$$\left.\begin{aligned} U_n &= -P\sum_{i+j+k=0}^{n} C_{ijk}^{1} f_{ijk}, \\ \upsilon_n &= -P\sum_{i+j+k=0}^{n} C_{ijk}^{2} f_{ijk}, \\ W_n &= -P\sum_{i+j+k=0}^{n} C_{ijk}^{3} f_{ijk}, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

(f_{ijk} — координационные функции; C_{ijk}^{τ}, $\tau = \overline{1, 3}$, — постоянные величины, подлежащие определению и удовлетворяющие краевым условиям (4)), должно удовлетворять вариационному уравнению Лагранжа $\delta Э = \delta\Omega - \delta А = 0$, где $\delta\Omega$ — работа внутренних сил, представляющая собой приращение потенциальной энергии на каком-либо возможном перемещении системы; $\delta А$ — работа внешних сил на том же возможном перемещении.

Выражение потенциальной энергии имеет вид

$$Э = \iiint W\, dxdydz - \iint (x_{\overline{n}}u + y_{\overline{n}}\upsilon + z_{\overline{n}}w)\, ds, \tag{15}$$

где

$$W = \left\{\frac{1}{2}\left(\lambda\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \upsilon}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \upsilon}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + 2\mu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right]\right\}.$$

Работа внешних сил при учете краевых условий (4) записывается соотношением

$$\iint (x_{\overline{n}} u + y_{\overline{n}} \upsilon + z_{\overline{n}} w)\, ds = -\iint P[U\cos(\overline{n}, x) + \upsilon\cos(\overline{n}, y) + w\cos(\overline{n}, z)]\, d\omega, \tag{16}$$

где $\cos(\overline{n}, l)$, $l = x, y, z$, — направляющие косинусы внешней нормали на пятне контакта. На поверхности, свободной от пятна контакта, нормали напряжения равны нулю. В выражении (16) интенсивность распределенной по пятну контакта нагрузки P входит входной составной частью в подынтегральную функцию.

Для определения значений параметров C^{τ}_{ijk}, $\tau = 1, 2, 3$, в (14), соответствующих минимуму потенциальной энергии системы, необходимо решить задачу на экстремум в виде

$$\frac{\partial Э}{\partial C^1_{\alpha\beta\gamma}} = 0, \qquad \frac{\partial Э}{\partial C^2_{\alpha\beta\gamma}} = 0, \qquad \frac{\partial Э}{\partial C^3_{\alpha\beta\gamma}} = 0, \tag{17}$$

где $\alpha + \beta + \gamma = 0, 1, \ldots, n$.

Если в (17) подставить (14) и выполнить некоторые преобразования, получим систему Ритца в развернутом виде, удобном для алгоритмизации процесса вычисления. Компоненты вектора $\overline{U}_n = \bar{i}U_n + \bar{j}\upsilon_n + \overline{k}W_n$ для любой точки области D определяются путем подстановки в (14) коэффициентов C^{τ}_{ijk}, $\tau = \overline{1,3}$, полученных в результате решения системы Ритца в развернутом виде,

$$\sum_{i+j+k=0}^{n} \Bigg\{ C^1_{ijk} \iiint\limits_D \left[\left(\frac{\lambda}{\mu} + 2\right) \frac{\partial f_{ijk}}{\partial x}\frac{\partial f_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x} + \frac{\partial f_{ijk}}{\partial y}\frac{\partial f_{\alpha\beta\gamma}}{\partial y} + \frac{\partial f_{ijk}}{\partial z}\frac{\partial f_{\alpha\beta\gamma}}{\partial z} \right] dxdydz +$$

$$+ C^2_{ijk} \iiint\limits_D \left(\frac{\lambda}{\mu}\frac{\partial f_{ijk}}{\partial y}\frac{\partial f_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x} + \frac{\partial f_{ijk}}{\partial x}\frac{\partial f_{\alpha\beta\gamma}}{\partial y} \right) dxdydz +$$

$$+ C^3_{ijk} \iiint\limits_D \left(\frac{\lambda}{\mu}\frac{\partial f_{ijk}}{\partial z}\frac{\partial f_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x} + \frac{\partial f_{ijk}}{\partial x}\frac{\partial f_{\alpha\beta\gamma}}{\partial z} \right) dxdydz \Bigg\} = \frac{1}{\mu}\iint\limits_{\omega_2} f_{\alpha\beta\gamma}\cos(\upsilon, x) d\omega;$$

$$\sum_{i+j+k=0}^{n} \Bigg\{ C^1_{ijk} \iiint\limits_D \left(\frac{\lambda}{\mu}\frac{\partial f_{ijk}}{\partial x}\frac{\partial f_{\alpha\beta\gamma}}{\partial y} + \frac{\partial f_{ijk}}{\partial y}\frac{\partial f_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x} \right) dxdydz +$$

$$+ C^2_{ijk} \iiint\limits_D \left[\frac{\partial f_{ijk}}{\partial x}\frac{\partial f_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x} + \left(\frac{\lambda}{\mu} + 2\right) \frac{\partial f_{ijk}}{\partial y}\frac{\partial f_{\alpha\beta\gamma}}{\partial y} + \frac{\partial f_{ijk}}{\partial z}\frac{\partial f_{\alpha\beta\gamma}}{\partial z} \right] dxdydz +$$

$$+ C^3_{ijk} \iiint\limits_D \left(\frac{\lambda}{\mu}\frac{\partial f_{ijk}}{\partial z}\frac{\partial f_{\alpha\beta\gamma}}{\partial y} + \frac{\partial f_{ijk}}{\partial y}\frac{\partial f_{\alpha\beta\gamma}}{\partial z} \right) dxdydz \Bigg\} = \frac{1}{\mu}\iint\limits_{\omega_2} f_{\alpha\beta\gamma}\cos(\upsilon, y) d\omega;$$

$$\sum_{i+j+k=0}^{n} \Bigg\{ C^1_{ijk} \iiint\limits_D \left(\frac{\lambda}{\mu}\frac{\partial f_{ijk}}{\partial x}\frac{\partial f_{\alpha\beta\gamma}}{\partial z} + \frac{\partial f_{ijk}}{\partial z}\frac{\partial f_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x} \right) dxdydz +$$

$$+ C^2_{ijk} \iiint\limits_D \left(\frac{\lambda}{\mu}\frac{\partial f_{ijk}}{\partial y}\frac{\partial f_{\alpha\beta\gamma}}{\partial z} + \frac{\partial f_{ijk}}{\partial z}\frac{\partial f_{\alpha\beta\gamma}}{\partial y} \right) dxdydz +$$

$$+ C^3_{ijk} \iiint\limits_D \left(\frac{\partial f_{ijk}}{\partial x} \frac{\partial f_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x} + \frac{\partial f_{ijk}}{\partial y} \frac{\partial f_{\alpha\beta\gamma}}{\partial y} + \left(\frac{\lambda}{\mu} + 2 \right) \frac{\partial f_{ijk}}{\partial z} \frac{\partial f_{\alpha\beta\gamma}}{\partial z} \right) dxdydz \Bigg\} =$$

$$= \frac{1}{\mu} \iint\limits_{\omega_2} f_{\alpha\beta\gamma} \cos(\upsilon, z) d\omega; \qquad \alpha + \beta + \gamma = 0, 1, \ldots, n.$$

Модуль вектора упругих перемещений определяется из выражения $U_n = \sqrt{u_n^2 + \upsilon_n^2 + w_n^2}$. Определение напряжений в любой точке области базируется на обобщенном законе Гука в тензорной форме [3, 4]

$$T_G = \lambda \Theta E_1 + 2\mu T_\varepsilon = \begin{Bmatrix} G_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & G_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{zy} & G_z \end{Bmatrix},$$

где T_ε — тензор деформаций; $T_\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x & (1/2)\gamma_{xy} & (1/2)\gamma_{xz} \\ (1/2)\gamma_{xy} & \varepsilon_y & (1/2)\gamma_{yz} \\ (1/2)\gamma_{zx} & (1/2)\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{Bmatrix}$, E_1 — единичный тензор $\left(E_1 = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \right)$.

Компоненты тензора деформаций выражаются через геометрические характеристики деформаций в виде

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \gamma_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \upsilon}{\partial x} \right), \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial \upsilon}{\partial y},$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial \upsilon}{\partial z} \right), \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \qquad \gamma_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right).$$

Если $\bar{l} = \{l_x, l_y, l_z\}$ — направляющие косинусы некоторой площадки с нормалью r в точке $M(x, y, z)$, принадлежащей области D, то для вычисления составляющей напряжения в этой точке необходимо воспользоваться зависимостями Коши в тензорной форме [3, 4] в виде

$$P_\upsilon = \{l_x, l_y, l_z\} = \begin{Bmatrix} G_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & G_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{zy} & G_z \end{Bmatrix}.$$

Полное напряжение на этой площадке определяется как геометрическая сумма составляющей, т. е. $P_\upsilon = \sqrt{x_\upsilon^2 + y_\upsilon^2 + z_\upsilon^2}$, где $x_\upsilon = G_x l_x + \tau_{xy} l_y + \tau_{xz} l_z$, $y_\upsilon = \tau_{yx} l_x + G_y l_y + \tau_{yz} l_z$, $z_\upsilon = \tau_{zx} l_x + \tau_{zy} l_y + G_z l_z$.

Таким образом, в данной работе разработана теория получения структуры приближенного решения задачи определения полей изгибных напряжений в галтели кругового зуба конического колеса, в основу которой положены методы классической теории упругости в трехмерной постановке с использованием дифференциальных зависимостей Коши и обобщенного закона Гука при смешанных граничных условиях для области со сложной граничной поверхностью.

1. *Громан М. Б., Шлейфер М. А.* Конические передачи с круговыми зубьями. – Москва: Машиностроение, 1964. – 176 с.

2. *Часовников Л. Д., Громак А. В.* Расчет круговых зубьев конических колес // Изв. вузов. Машиностроение. – 1976. – № 2. – С. 60–65.
3. *Тимошенко С. П.* Курс теории упругости. – Киев: Наук. думка, 1972. – 501 с.
4. *Гастев В. А.* Курс теории упругости и основ теории пластинчатости. – Ленинград: Университет, 1973. – 180 с.
5. *Берштейн Л. Л., Займовский В. А.* Структура и механические свойства металлов. – Москва: Металлургия, 1970. – 472 с.
6. *Решетов В. А.* Детали машин. – Москва: Машиностроение, 1975. – 655 с.
7. *Рвачев В. Л., Проценко В. С.* Контактные задачи теории упругости для неклассических областей. – Киев: Наук. думка, 1977. – 235 с.
8. *Кириченко А. Ф.* Использование вариационных методов с применением ЭЦВМ для определения изгибных напряжений в зубьях цилиндрических зубчатых колес // Вестн. машиностроения. – 1980. – № 11. – С. 15–17.
9. *Самуль В. И.* Основы теории упругости и пластичности. – Москва: Высш. шк., 1982. – 263 с.
10. *Михлин С. Г.* Прямые методы в математической физике. – Москва; Ленинград: ГИТТЛ, 1950. – 428 с.

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков
Харьковский национальный автодорожный университет
Украинская государственная академия железнодорожного транспорта, Харьков

Поступило в редакцию 31.03.2006

УДК 539.3

Я. О. Жук, І. К. Сенченков, О. В. Бойчук

Динамічні процеси в тонкому циліндрі при тепловому опроміненні торця

(Представлено академіком НАН України Я. М. Григоренком)

The processes of generation and propagation of a stress pulse and temperature variations caused by a thermal impact at the face of a long thin steel cylinder are investigated. The statement of the dynamic coupled problem of thermomechanics is used along with the thermodynamically consistent theory of the inelastic behavior of a material. It is solved numerically by the finite element method. Main properties of a thermomechanical state in the vicinity of the irradiated end and the stress pulse propagation accompanied with the temperature variation are studied. Relations between the parameters of a thermal pulse and a stress wave are established.

Опромінення поверхонь металевих деталей лазерними імпульсами або електронними пучками є сучасним технологічним засобом зміцнення і підвищення стійкості до зношування та втомної довговічності елементів конструкцій [1–3]. На стадії мініатюризації, енерго- і ресурсозбереження, яку зараз переживають машинобудування і приладобудування, дозоване і направлене підведення енергії до об'єкта технології є надзвичайно перспективним методом виготовлення мікрообладнання [3]. Лазерні і пучкові технології внаслідок надзвичайно точної локалізації впливу дозволяють вийти на мікро- і нанорівень обробки матеріалів [3].