

2. *Kolle J.* HydroPulse<sup>TM</sup> drilling // Technical report for U. S. Department of Energy. Tempres technologies inc., 2004. – 28 p.
3. *Горшков Л. К., Гореликов В. Г.* Температурные режимы алмазного бурения. – Москва: Недра, 1992. – 173 с.
4. *Щербань А. Н., Черняк В. П.* Прогноз и регулирование теплового режима при бурении скважин. – Москва: Недра, 1974. – 248 с.
5. *Математическая модель температурного режима алмазной коронки при бурении скважины / А. А. Кожевников, А. Ю. Дреус, И. И. Мартыненко, Ю. А. Бакаржиев // Матеріали міжнар. конф. “Форум гірників – 2005”. Т. 2. – Дніпропетровськ: Вид. НДУ, 2005. – С. 250–257.*
6. *Самарский А. А., Вабищев П. Н.* Вычислительная теплопередача. – Москва: Эдиториси УРСС, 2003. – 784 с.
7. *Синтетические алмазы в геологоразведочном бурении / Бугаев А. А., Лившиц И. В., Иванов В. В. и др. – Киев: Наук. думка, 1978. – 232 с.*
8. *Кожевников А. А., Вырвинский П. И.* Термомеханическое разрушение горных пород при разведочном бурении с генерирование тепловой энергии // Техника и технология геологоразведочных работ, организация производства. Обзор ОНТИ ВИЭМС. – Москва, 1985. – 36 с.

*Национальный горный университет  
Украины, Днепропетровск  
Украинский государственный  
геологоразведочный институт, Киев  
Днепропетровский национальный  
университет  
Государственная геологическая служба  
Украины, Киев*

*Поступило в редакцию 26.06.2006*

УДК 539.3

© 2007

**Ю. В. Коханенко, С. А. Цирук, Л. Г. Величко**

## **Влияние модулей Юнга на краевые эффекты в трехслойном цилиндре**

*(Представлено академиком НАН Украины А. Н. Гузем)*

*We study the axisymmetric problem of the theory of end effects for a three-layer cylinder with isotropic layers that is loaded on its end faces by an axial constant load in the exact statement. The influence of Young's moduli of layers on the end effect's length is examined. The inhomogeneous problem of elasticity is solved approximately by the method of finite differences using the concepts of the basic scheme. The analysis of the computed results is carried out.*

Рассматривается трехслойный круговой цилиндр с изотропными линейно-упругими слоями. Крайние слои имеют одинаковые характеристики, отличные от характеристик среднего слоя. По торцам  $z = \text{const}$  цилиндр нагружен осевой нагрузкой  $P$  постоянной интенсивности. На контакте слоев моделируется полное сцепление. В [1, 2] рассмотрены вопросы определения краевых эффектов для конкретных конструкций из композитных материалов.

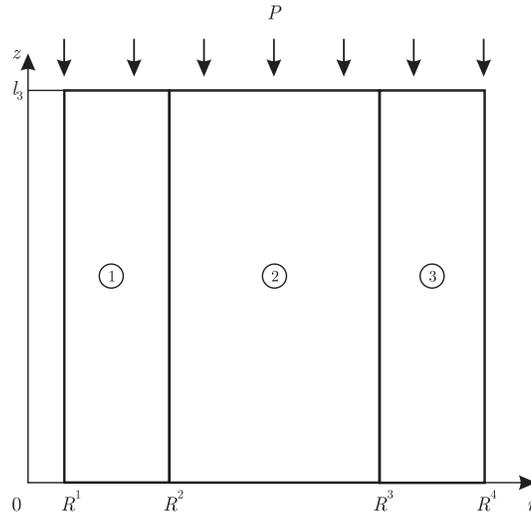


Рис. 1

В настоящей работе рассматривается, в продолжение работ [1, 2], вопрос о влиянии модулей Юнга на характер краевых эффектов в трехслойном цилиндре. Условия закрепления и нагружения цилиндра приводят к осесимметрической задаче в координатах  $\theta = (\theta_1, \theta_3) \equiv (r, z)$ . Наличие симметрии относительно плоскости  $\theta_2 = \phi = \text{const}$  позволяет рассмотреть решение задачи только для верхней части цилиндра (рис. 1). В цилиндрических координатах расчетная схема представляет собой трехслойную пластину, находящуюся в состоянии плоской деформации в плоскости  $\theta_2 = \phi = \text{const}$  и занимающую область  $\bar{\Omega} = \sum_{q=1}^3 \bar{\Omega}^q$ ,  $\bar{\Omega}^q = \{R^q \leq r \leq R^{q+1} \wedge 0 \leq z \leq l_3\}$  (см. рис. 1). В работе индекс  $q$  изменяется от 1 до 3, а остальные принимают значение 1, 3, если не оговорено другое. Обозначим через  $E^q, \nu^q$  технические постоянные  $q$ -го слоя.

Обозначим через  $E^q, \nu^q$  технические постоянные  $q$ -го слоя. Значение  $q = 2$  соответствует среднему слою. Значения  $q = 1 \wedge q = 3$  относятся к крайним слоям, которые имеют одинаковые характеристики.

Краевые эффекты исследуются в точной постановке [3]. При этом напряженное состояние определяется из неоднородных уравнений линейной теории упругости, используется модель кусочно-однородной среды (см. рис. 1), и границы зон краевых эффектов определяются по второму точному критерию [3, 4]. Для решения задачи о краевых эффектах в точной постановке требуется: решение задач упругости для невозмущенного и возмущенного состояний; формулировка критерия оценки зон краевых эффектов; определение, из решения упругой задачи для возмущенного состояния, значений требуемых параметров в пределах зоны краевого эффекта.

Сформулируем задачу упругости для возмущенного состояния. В области  $\Omega$  отыскиваются функции  $\mathbf{u}^q = (u_1^q, u_3^q)$ , которые удовлетворяют уравнениям равновесия

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{11})^q + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial z} - \frac{\sigma_{22}^q}{r} &= 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{12})^q + \frac{\partial \sigma_{33}^q}{\partial z} &= 0, \quad \theta \in \bar{\Omega}^q, \end{aligned} \tag{1}$$

граничным условиям

$$\begin{aligned}
 \sigma_{3m}^q &= \delta_{3m}P, & R^1 \leq r \leq R^4 \wedge z = l_3, \\
 \sigma_{1m}^1 &= 0, & r = R^1 \wedge 0 \leq z \leq l_3, \\
 \sigma_{1m}^3 &= 0, & r = R^4 \wedge 0 \leq z \leq l_3, \\
 \sigma_{3m}^q &= 0, & R^1 \leq r \leq R^4 \wedge z = 0,
 \end{aligned} \tag{2}$$

условиям на контактных линиях компонент композита

$$u_m^q = u_m^{q+1} \wedge \sigma_{1i}^q = \sigma_{1i}^{q+1}, \quad r = R_q \wedge 0 \leq z \leq l_3, \quad q = 1, 2. \tag{3}$$

Связь между напряжениями и деформациями, а также величины модулей упругости в пределах компоненты композита определяются из соотношений (индекс  $q$  опускается)

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ii} &= A_{ik}\varepsilon_{kk}, & \sigma_{13} &= 2G\varepsilon_{13}, & \sigma_{12} &= \sigma_{32} = 0; & i, k &= \overline{1, 3}; \\
 \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, & \varepsilon_{33} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, & \varepsilon_{22} &= \frac{u_1}{r}, & \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial r} \right), & \varepsilon_{12} &= \varepsilon_{23} = 0; \\
 A_{ii} &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, & A_{12} &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, & G &= \frac{E}{2(1+\nu)}.
 \end{aligned} \tag{4}$$

После решения задачи (1)–(4) из (4) определяются напряжения  $\sigma_{22} = \sigma_{\varphi\varphi}$  и в надлежащей мере исследуются напряжения в пределах зоны и геометрические характеристики зон. При исследовании краевых эффектов величина  $l_3$  (см. рис. 1) выбирается из условия, что возмущения напряжений  $\sigma'_{ij}$  не достигают плоскости  $z = 0$  (середина цилиндра). При численном решении задачи величина  $l_3$  определяется из вычислительного эксперимента.

В работе определяется величина  $d_{33}^q$  протяженности краевого эффекта для напряжения  $\sigma_{33}^q$  в направлении действия нагрузки  $P$ , т. е. краевые эффекты исследуются по второму критерию [3, 4]. Граница зоны краевого эффекта определяется из соотношения

$$\frac{\partial \sigma_{33}^q}{\partial r} = \sigma_{33}^q(r)(1 + 0,01\rho), \quad z \geq Z, \tag{5}$$

где  $\rho$  – допустимое (в процентах) напряжение возмущения  $\sigma'_{33}$  на границе зоны краевого эффекта;  $\sigma_{33}^q(r)$  – невозмущенное напряжение на прямой  $z = \text{const}$ ;  $z = Z$  – прямая, на которой выполняется соотношение (5).

Напряжение  $\sigma_{33}^q$  отыскивается, для рассматриваемого случая, из решения задачи (1)–(4), когда на торцах  $|z| = l_3$  деформация  $\varepsilon_{33}^q = \varepsilon_{33} = \text{const}$ . Тогда из закона Гука находим  $\varepsilon_{11}^q = -\nu^q \varepsilon_{33}$  и напряжения  $\sigma_{33}^q$  получим из следующих соотношений:

$$\varepsilon_{33}^q = \varepsilon_{33} = \text{const}; \quad \varepsilon_{11}^q = -\nu^q \varepsilon_{33}; \quad \sigma_{33}^q = A_{31}^q \varepsilon_{33}^q + A_{33}^q \varepsilon_{33}^q. \tag{6}$$

В (6) величины  $A_{ij}^q$  определяются из (4), а напряжение  $\varepsilon_{33}$  – из уравнения

$$\varepsilon \{ 2(R^2 - R^1) \sigma_{33}^1 + (R^3 - R^2) \sigma_{33}^2 \} = (R^4 - R^1)P. \tag{7}$$

Приближенное решение задачи (1)–(4) выполняется методом конечных разностей. При этом дискретные задачи строятся на основе концепции базовой схемы [4], а сеточные уравнения решаются соответствующими методами линейной алгебры.

В качестве примера расчета рассматривается трехслойный цилиндр со следующими характеристиками:

$$R^1 = 1, \quad R^2 = 1,2, \quad R^3 = 1,6, \quad R^4 = 1,8, \quad R^4 - R^1 = 0,8, \quad l_3 = 4;$$

$$E^1 = E^3 = 250, \quad G^1 = G^3 = 100, \quad \nu^q = 0,25, \quad E^2 < E^1; \quad P_{33}^q = P = -1.$$

Величины  $E^q$  и  $P$  измеряются в ГПа, а линейные размеры отнесены к длине  $l_3$ .

При расчетах величина  $z = Z = d_{33}^q$  считается найденной, если, в соответствии с (5), (6), напряжение  $\sigma_{33}^q = \text{const}$ .

Из анализа результатов следует, что величина  $d_{33}^q$  растет с ростом отношения  $E^1/E^2$  до значения  $E^1 \leq 50E^2$ , а при  $E^1 \geq 50E^2$  величина  $d_{33}^q$  устанавливается. Числовые результаты следующие. Значениям  $E^1/E^2 = \{2; 5; 10; 50; 75; 100\}$  соответствуют значения  $d_{33} = \{0,62; 1,3; 1,41; 1,75; 1,75; 1,75\}$ .

1. Коханенко Ю. В., Цирук С. А., Латкин Д. П. Напряжения и краевые эффекты в трехслойном цилиндре // Доп. НАН України. – 2001. – № 8. – С. 37–39.
2. Коханенко Ю. В., Цирук С. А., Латкин Д. П. Визначення напруженого стану та крайових ефектів у тришаровому циліндрі // Пробл. прочности. – 2002. – № 6. – С. 72–78.
3. Гузь А. Н., Коханенко Ю. В. Краевые эффекты в композитах // Прикл. механика. – 1995. – **31**, № 3. – С. 3–24.
4. Механика композитов: В 12 т. / Под общ. ред. А. Н. Гузя. – Т. 1. Статика материалов. / Под ред. В. Г. Головчана. – Киев: Наук. думка, 1993. – 454 с.

*Институт механики им. С. П. Тимошенко  
НАН Украины, Киев*

*Поступило в редакцию 04.04.2006*