ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

2 • 2007

ЕНЕРГЕТИКА

УДК 621.3.(0758)

Член-корреспондент НАН Украины **А. Е. Божко**

Об условных сопротивлениях электроцепей при полигармонических входных сигналах

The formulas for the conditional resistances of circuits with RL, RC, RLC, R(LIIC) elements under polyharmonic input signals are obtained.

В работе [1] представлено явление автоматической реструктуризации электроцепей с реактивными элементами при входных полигармонических напряжениях вида

$$U = \sum_{k=1}^{n} U_{ak} \cos \omega_k t,$$

где U_{ak} — амплитуда гармоники; ω_k — круговая частота k-й гармоники ($\omega_k = 2\pi f_k$, f_k — частота); t — время. Однако досконального вывода формул преобразованных сопротивлений в цепях с реактивными элементами не было. В связи с этим возникла задача четко знать математические выражения условно возникших сопротивлений для цепей RL, RC, RLC и $R(L\text{II}C)$, где R — резистор; L — индуктивность; C — электрическая емкость; II — знак параллельного соединения элементов.

На основании полученных формул можно сделать выводы о характере условного соединения реактивных элементов L и C при полигармонических входных сигналах. Формулы сопротивлений будем выводить последовательно для каждой цепи.

Итак, цепь RL (рис. 1), где i_Σ — ток. Уравнение цепи

$$U = \sum_{k=1}^{n} U_{ak} \cos \omega_k t = R i_\Sigma + L \frac{di_\Sigma}{dt}. \qquad (1)$$

Так как рассматриваемая цепь линейная, то применим принцип суперпозиции (этот принцип применим ко всем схемам) и

$$i_\Sigma = \sum_{k=1}^{n} i_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{U_{ak} \cos(\omega_k t - \varphi_k)}{|z_{Lk}|},$$
$$\varphi_k = \operatorname{arctg} \frac{\omega_k L}{R}, \qquad (2)$$

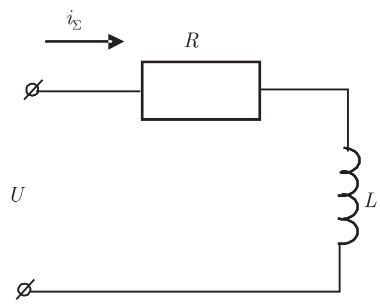

Рис. 1

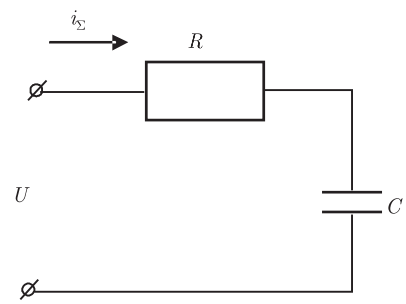

Рис. 2

где i_k — ток в цепи, возникший от действия k-й гармоники входного напряжения; i_Σ — суммарный ток от действия всех гармоник входного напряжения U; $|z_{Lk}|$ — модуль полного сопротивления цепи для тока i_k; φ_k — угол сдвига между напряжением U_k и током i_k, $k = \overline{1,n}$.

На основании (1), (2)

$$|z_{Lk}| = \sqrt{R^2 + (\omega_k L)^2}$$

и

$$i_\Sigma = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} U_{ak}\cos\omega_k t}{z_{L\Sigma}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{U_{ak}\cos(\omega_k t - \varphi_k)}{|z_{Lk}|}, \tag{3}$$

где $z_{L\Sigma}$ — полное сопротивление цепи.

В (3) введем преобразование $\dfrac{U_{a1}}{U_{ak}} = \alpha_k$. Тогда (3) запишем в виде

$$i_\Sigma = \frac{U_{a1}}{z_{L\Sigma}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\alpha_k}\cos\omega_k t = U_{a1} \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(\omega_k t - \varphi_k)}{\alpha_k |z_{Lk}|},$$

откуда

$$z_{L\Sigma} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\cos\omega_k t}{\alpha_k}}{\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\cos(\omega_k t - \varphi_k)}{\alpha_k |z_{Lk}|}}. \tag{4}$$

Формула (4) отображает сопротивление схемы с условным параллельным соединением сопротивлений z_{Lk}. Если не вводить приведение (3) к напряжению первой гармоники через коэффициенты α_k, $k = \overline{1,n}$, то, по нашему мнению, при разных U_{ak}, $k = \overline{1,n}$, также в реструктуризированной схеме соединение сопротивлений z_{Lk} будет условно параллельным и имеет вид

$$z_{L\Sigma} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} U_{ak}\cos\omega_k t}{\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{U_{ak}\cos(\omega_k t - \varphi_k)}{|z_{Lk}|}}. \tag{5}$$

При $t = 0$ из (4) и (5)

$$z_{L\Sigma} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\alpha_k}}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\cos\varphi_k}{\alpha_k |z_{Lk}|}}; \qquad z_{L\Sigma} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} U_{ak}}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{U_{ak}\cos\varphi_k}{|z_{Lk}|}}.$$

При равных амплитудах $U_{ak} = U_a$, $k = \overline{1,n}$, при $t = 0$

$$z_{L\Sigma} = \frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\cos\varphi_k}{|z_{Lk}|}}.$$

Эта формула отображает n последовательно соединенных параллельных цепей

$$\frac{\cos\varphi_1}{|z_{L1}|} || \frac{\cos\varphi_2}{|z_{L2}|} || \cdots || \frac{\cos\varphi_n}{|z_{Ln}|}.$$

Перейдем к рассмотрению цепи с RC элементами (см. рис. 2). Уравнение цепи с RC следующее:

$$Ri_\Sigma + \frac{1}{C}\int\limits_0^t i_\Sigma dt = \sum_{k=1}^{n} U_{ak}\cos\omega_k t. \tag{6}$$

Ток

$$i_\Sigma = \sum_{k=1}^{n} i_k = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} U_{ak}\cos\omega_k t}{z_{C\Sigma}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{U_{ak}\cos(\omega_k t + \varphi_k)}{|z_{Ck}|}, \tag{7}$$

$$\varphi_k = \operatorname{arctg}\frac{1}{\omega_k RC}, \qquad \varphi_k \text{ — угол между } U_k \text{ и } i_k,$$

где $z_{C\Sigma}$ — условно полное сопротивление для тока i_Σ; $|z_{Ck}|$ — модуль сопротивления цепи для тока i_k, $k = \overline{1,n}$.

На основании (6) с учетом принципа суперпозиции имеем

$$Ri_k + \frac{1}{C}\int\limits_0^t i_k\, dt = U_{ak}\cos\omega_k t,$$

из которого

$$|z_{Ck}| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega_k C}\right)^2}.$$

Так же, как и для схемы с RL, введем обозначения $\dfrac{U_{a1}}{U_{ak}} = \alpha_k$. Тогда (7) запишется в виде

$$i_\Sigma = \frac{U_{a1}}{z_{C\Sigma}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\alpha_k}\cos\omega_k t = U_{a1}\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(\omega_k t + \varphi_k)}{\alpha_k |z_{Ck}|},$$

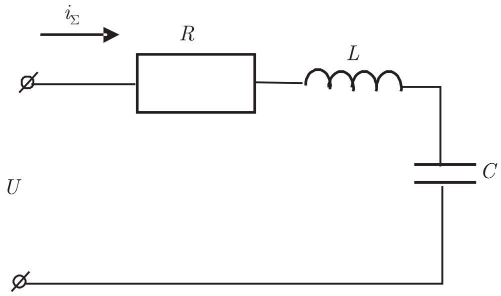

Рис. 3

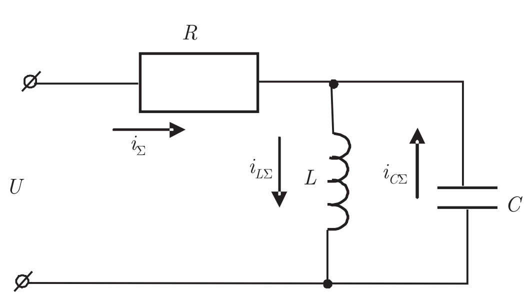

Рис. 4

откуда

$$z_{C\Sigma} = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos\omega_k t}{\alpha_k}}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(\omega_k t + \varphi_k)}{\alpha_k |z_{Ck}|}}. \tag{8}$$

Как видно из (8), эта формула отображает условно параллельное соединение сопротивлений z_{Ck}, $k = \overline{1,n}$. Если не вводить α_k, то

$$z_{C\Sigma} = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} U_{ak}\cos\omega_k t}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{U_{ak}\cos(\omega_k t + \varphi_k)}{|z_{Ck}|}}. \tag{9}$$

Формулы (4) и (8), (5) и (9) соответственно по виду идентичны. В них разные сопротивления $z_{L\Sigma}$, z_{Lk} и $z_{C\Sigma}$, z_{Ck}, соответствующие каждому реактивному элементу L или C. При $t = 0$ (5) и (9) приобретают вид

$$z_{C\Sigma} = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\alpha_k}}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos\varphi_k}{\alpha_k |z_{Ck}|}}; \qquad z_{C\Sigma} = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} U_{ak}}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{U_{ak}\cos\varphi_k}{|z_{Ck}|}}.$$

При $U_{ak} = U_a$, $k = \overline{1,n}$, $t = 0$

$$z_{C\Sigma} = \frac{n}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos\varphi_k}{|z_{Ck}|}}.$$

Рассмотрим схему соединения элементов R, L и C последовательно (рис. 3). Уравнение этой цепи относительно общего тока i_Σ следующее:

$$Ri_\Sigma + L\frac{di_\Sigma}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i_\Sigma\, dt = \sum_{k=1}^{n} U_{ak}\cos\omega_k t. \tag{10}$$

Применяя принцип суперпозиции, из (10) получаем

$$Ri_k + L\frac{di_k}{dt} + \frac{1}{C}\int\limits_0^t i_k\,dt = U_{ak}\cos\omega_k t. \tag{11}$$

На основании (11) модуль сопротивления для тока i_k в этой цепи запишем

$$|z_{LCk}| = \sqrt{R^2 + \left(\omega_k L - \frac{1}{\omega_k C}\right)^2}. \tag{12}$$

Сдвиг фаз между U_k и i_k

$$\varphi_{k1} = \operatorname{arctg}\frac{\omega_k L - \dfrac{1}{\omega_k C}}{R}. \tag{13}$$

При дальнейшем определении условно полного сопротивления всей цепи z_Σ в функции модулей сопротивлений z_{LCk} выражения для z_Σ будут аналогичны выражениям (4) и (8) или (5) и (9) с разницей в том, что в этом случае будут фигурировать сопротивления z_{LCk} [см. (12)] вместо z_{Lk} или z_{Ck} и углы φ_{k1}. Поэтому и в этом случае при полигармоническом входном сигнале цепь реструктуризируется в условно параллельное соединение цепей с сопротивлениями для токов i_k, $k = \overline{1, n}$.

Перейдем к рассмотрению цепи с $R(L\text{II}C)$ (см. рис. 4). Уравнения этой цепи следующие:

$$\begin{cases} i_\Sigma = i_{L\Sigma} + i_{C\Sigma}; \\ Ri_{L\Sigma} + L\dfrac{di_{L\Sigma}}{dt} = \sum\limits_{k=1}^{n} U_{ak}\cos\omega_k t; \\ Ri_{C\Sigma} + \dfrac{1}{C}\int\limits_0^t i_{C\Sigma}\,dt = \sum\limits_{k=1}^{n} U_{ak}\cos\omega_k t. \end{cases} \tag{14}$$

Уравнения (14) соответствуют уравнениям (1) и (6). Поэтому $i_{L\Sigma}$ записывается выражением (2), а $i_{C\Sigma}$ — выражением (7). Полные условные сопротивления для токов $i_{L\Sigma}$ и $i_{C\Sigma}$ тогда определяются выражениями (4), (5) и (8), (9) соответственно. Реактивные сопротивления $x_{L\Sigma} = (z_{L\Sigma} - R)$ и $x_{C\Sigma} = (z_{C\Sigma} - R)$ соединены параллельно и общее условное сопротивление данной схемы имеет вид

$$z_\Sigma = R + (z_{L\Sigma} - R)||(z_{C\Sigma} - R).$$

Введем в это выражение формулы (4) и (8), а затем (5) и (9). В результате получим

$$z_\Sigma = R + \frac{\left[\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\cos\omega_k t}{\alpha_k}}{\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\cos(\omega_k t - \varphi_{Lk})}{\alpha_k|z_{Lk}|}} - R\right]\left[\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\cos\omega_k t}{\alpha_k}}{\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\cos(\omega_k t + \varphi_{Ck})}{\alpha_k|z_{Ck}|}} - R\right]}{\left[\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\cos\omega_k t}{\alpha_k}}{\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\cos(\omega_k t - \varphi_{Lk})}{\alpha_k|z_{Lk}|}} - R\right] + \left[\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\cos\omega_k t}{\alpha_k}}{\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\cos(\omega_k t + \varphi_{Ck})}{\alpha_k|z_{Ck}|}} - R\right]}; \tag{15}$$

$$z_\Sigma = R + \frac{\left[\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} U_{ak}\cos\omega_k t}{\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{U_{ak}\cos(\omega_k t - \varphi_{Lk})}{|z_{Lk}|}} - R\right]\left[\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} U_{ak}\cos\omega_k t}{\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{U_{ak}\cos(\omega_k t + \varphi_{Ck})}{|z_{Ck}|}} - R\right]}{\left[\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} U_{ak}\cos\omega_k t}{\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{U_{ak}\cos(\omega_k t - \varphi_{Lk})}{|z_{Lk}|}} - R\right] + \left[\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} U_{ak}\cos\omega_k t}{\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{U_{ak}\cos(\omega_k t + \varphi_{Ck})}{|z_{Ck}|}} - R\right]}. \tag{16}$$

Выражения (14) и (15) также подтверждают тот факт, что полигармоническое входное напряжение порождает реструктуризацию рассматриваемой схемы (см. рис. 4) в виде формирования последовательно-параллельного соединения цепей z_Σ и $z_{L\Sigma}$, $z_{C\Sigma}$. Если принять во внимание случай, когда все $U_{ak}, k = \overline{1,n}$, равны между собой и взять момент $t = 0$, то (15) принимает вид

$$z_\Sigma = R + \left[\left(n\Big/\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos\varphi_{Lk}}{|z_{Lk}|} - R\right)\right)^{-1} + \left(n\Big/\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos\varphi_{Ck}}{|z_{Ck}|} - R\right)\right)^{-1}\right]^{-1}. \tag{17}$$

Выведенные формулы условных полных сопротивлений z_Σ можно также представить в символической форме. Для этого выразим входное напряжение схемы в виде

$$U = \sum_{k=1}^{n} U_{ak} e^{j\omega_k t},$$

где $j = \sqrt{-1}$.

Тогда для схем, изображенных на рис. 1, 2 и 3,

$$z_\Sigma = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} U_{ak} e^{j\omega_k t}}{\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{U_{ak} e^{j(\omega_k t + \varphi_k)}}{|z_k|}}, \tag{18}$$

где φ_k определяются по формулам (2), (7), (13), соответствующим схемам RL, RC, RLC; z_k, $k = \overline{1,n}$, — сопротивления этих же цепей соответственно.

Если ввести обозначения $U_a/U_{ak} = \alpha_k$; $\omega_k/\omega_1 = \beta_k$, то (18) можно представить в виде

$$z_\Sigma = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\alpha_k} e^{\beta_k\omega_1 t}}{\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{e^{j(\beta_k\omega_1 t + \varphi_k)}}{\alpha_k|z_k|}}. \tag{19}$$

При $t = 0$ и одинаковых $U_{ak} = U_a$ из (19) получаем z_Σ в виде

$$z_\Sigma = \frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{e^{j\varphi_k}}{|z_k|}}.$$

Для схемы, изображенной на рис. 4, полное условное сопротивление z_Σ в символической форме равно

$$z_\Sigma = R + \left\{ \left[\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} U_{ak} e^{j\omega_k t}}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{U_{ak} e^{j(\omega_k t - \varphi_{Lk})}}{|z_{Lk}|}} - R \right]^{-1} + \left[\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} U_{ak} e^{j\omega_k t}}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{U_{ak} e^{j(\omega_k t + \varphi_{Ck})}}{|z_{Ck}|}} - R \right]^{-1} \right\}^{-1}. \tag{20}$$

При $U_{ak} = U_a$ и $t = 0$ выражение (20) принимает вид

$$z_\Sigma = R + \left\{ \left[n \Big/ \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-j\varphi_{Lk}}}{|z_{Lk}|} \right) - R \right]^{-1} + \left[n \Big/ \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{U_{ak} e^{j\varphi_{Ck}}}{|z_{Ck}|} \right) - R \right]^{-1} \right\}^{-1}. \tag{21}$$

Формула (21) идентична выражению (17).

Справедливость выведенных формул условных сопротивлений для рассматриваемых электрических схем можно проверить на примере формулы (5) таким образом.

Пусть входное напряжение $U = U_{ak} \cos \omega_k t$. Тогда (5) принимает вид

$$z_{Lk} = |z_k| \frac{\cos \omega_k t}{\cos(\omega_k t - \varphi_k)}. \tag{22}$$

К (22) применим формулу Эйлера

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}.$$

Тогда полное сопротивление z_{Lk} представлено в показательной форме (см. [5] с. 255)

$$z_{Lk} = |z_k| e^{j\varphi_k}. \tag{23}$$

Известно [5], что

$$z_{Lk} = R + j\omega_k L. \tag{24}$$

Преобразуем (24)

$$z_{Lk} = R + j\omega_k L = \left(\sqrt{R^2 + \omega_k^2 L^2} \right) (\cos \varphi_k + j \sin \varphi_k) =$$
$$= |z_k| \left(\frac{e^{j\varphi_k} + e^{-j\varphi_k}}{2} + j \frac{e^{j\varphi_k} e^{-j\varphi_k}}{2j} \right) = |z_k| e^{j\varphi_k}, \qquad \varphi_k = \operatorname{arctg} \frac{\omega_k L}{R}$$

и получим в итоге формулу (23).

Таким образом, это простое доказательство подтверждает правильность полученных формул для цепей RL и, в принципе, для RC и RLC цепей.

Также проверим справедливость формул (15) или (16). Для этого рассмотрим (16) для k-й гармоники. В этом случае

$$z_k = R + \frac{\left[\dfrac{|z_{Lk}|\cos\omega_k t}{\cos(\omega_k t - \varphi_{Lk})} - R\right]\left[\dfrac{|z_{Ck}|\cos\omega_k t}{\cos(\omega_k t + \varphi_{Ck})} - R\right]}{\left[\dfrac{|z_{Lk}|\cos\omega_k t}{\cos(\omega_k t - \varphi_{Lk})} - R\right] + \left[\dfrac{|z_{Ck}|\cos\omega_k t}{\cos(\omega_k t + \varphi_{Ck})} - R\right]} =$$

$$= R + \frac{1}{\left[\dfrac{|z_{Ck}|\cos\omega_k t}{\cos(\omega_k t + \varphi_{Ck})} - R\right]^{-1} + \left[\dfrac{|z_{Lk}|\cos\omega_k t}{\cos(\omega_k t - \varphi_{Lk})} - R\right]^{-1}} =$$

$$= R + \frac{1}{\left[|z_{Ck}|e^{-j\varphi_{Ck}} - R\right]^{-1} + \left[|z_{Ck}|e^{j\varphi_{Ck}} - R\right]^{-1}} =$$

$$= R + \frac{(|z_{Ck}|e^{-j\varphi_{Ck}} - R)(|z_{Lk}|e^{j\varphi_{Lk}} - R)}{|z_{Ck}|e^{-j\varphi_{Ck}} + |z_{Lk}|e^{j\varphi_{Lk}} - 2R} =$$

$$= R + \frac{[|z_{Ck}|(\cos\varphi_{Ck} - j\sin\varphi_{Ck}) - R][|z_{Lk}|(\cos\varphi_{Lk} + j\sin\varphi_{Lk}) - R]}{|z_{Ck}|(\cos\varphi_{Ck} - j\sin\varphi_{Ck}) + |z_{Lk}|(\cos\varphi_{Lk} + j\sin\varphi_{Lk}) - 2R} =$$

$$= R + \frac{\left[-j\dfrac{1}{\omega_k C}\right][j\omega_k L]}{\left[-j\dfrac{1}{\omega_k C}\right] + [j\omega_k L]} = R + j\frac{L}{C}\frac{1}{\dfrac{1}{\omega_k C} - \omega_k L} = z_k. \qquad (25)$$

Проверим правильность полученного выражения из анализа схемы (см. рис. 4)

$$z_k = R + \frac{x_{Lk}x_{Ck}}{x_{Lk} + x_{Ck}} = R + \frac{j\omega_k L j\left(-\dfrac{1}{\omega_k C}\right)}{j\omega_k L - j\dfrac{1}{\omega_k C}} = R + j\frac{L}{C}\frac{1}{\dfrac{1}{\omega_k C} - \omega_k L}. \qquad (26)$$

Как видно, формулы (25) и (26) одинаковые, что означает правильность вывода формулы (16).

Заметим, что выведенные для z_Σ выражения подтверждают тот факт, что переходные процессы в электрических цепях при скачкообразных входных напряжениях, которые, по нашему мнению, разлагаются на несколько затухающих гармоник и одну незатухающую составляющую, увеличивающуюся по амплитуде, вблизи момента включения ($t = 0$) входного напряжения идут вблизи нулевого уровня и только после полного затухания высших гармоник входного напряжения осуществляется подъем уровня величины тока в RL цепи или напряжения в RC цепи переходного процесса до установившегося значения. Этот факт проверен экспериментально [2–4] и указывает на естественное свойство объектов, каким является и электрическая цепь, заключающееся в наличии некоторой зоны нечувствительности, т. е. при определенной малой длительности входного напряжения (импульса) электроцепь не может войти в переходной процесс и воспроизвести данный импульс. Такие случаи наблюдаются при широтно-импульсном или время-импульсном управлении электродвигателями и другими электромагнитными механизмами.

Таким образом, в работе показано, что полигармоническое входное напряжение цепей с реактивными элементами существенно влияет на изменения структуры (условной) этих цепей, и полные сопротивления цепей являются не только функциями параметров цепей, но и функциями гармонических составляющих входного напряжения этих цепей.

1. *Божко А. Е.* Об автоматической реструктуризации электрических цепей с реактивными элементами при полигармонических входных напряжениях // Доп. НАН України. – 2002. – № 11. – С. 101–103.
2. *Божко А. Е.* Новая интерпретация переходных процессов в электрических цепях // Там же. – 2004. – № 9. – С. 83–87.
3. *Божко А. Е.* О новой трактовке переходных процессов в электрических цепях переменного тока // Там же. – 2005. – № 4. – С. 81–86.
4. *Божко А. Е.* Эффект от малых значений резисторов в переходном процессе электроцепи с индуктивностью // Там же. – 2004. – № 12. – С. 84–86.
5. *Белецкий А. Ф.* Основы теории линейных электрических цепей. – Москва: Связь, 1967. – 608 с.

Институт проблем машиностроения
им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 04.07.2006