УДК 517.925.4

З. М. Шеремета, М. М. Шеремета

Про обмеженість l-індексу цілих розв'язків одного диференціального рівняння

(Представлено членом-кореспондентом НАН України Б. Й. Пташником)

Estimates of the l-index for entire solutions of the differential equation $z^2w'' + (\beta_0 z^2 + \beta_1 z)w' + (\gamma_0 z^2 + \gamma_1 z + \gamma_2)w = 0$ are obtained.

Однолиста аналітична в $\mathbb{D} = \{z\colon |z| < 1\}$ функція f називається опуклою, якщо $f(\mathbb{D})$ — опукла область. Добре відомо [1, c. 203], що умова $\mathrm{Re}\{1 + zf''(z)/f'(z)\} > 0$ $(z \in \mathbb{D})$ є необхідною і достатньою для опуклості f. Функція f називається [1, c. 583] близькою до опуклої в $\mathbb{D}$, якщо існує опукла в $\mathbb{D}$ функція Φ така, що $\mathrm{Re}(f'(z)/\Phi'(z)) > 0$ $(z \in \mathbb{D})$. Кожна близька до опуклої функція є однолистою в $\mathbb{D}$, і тому $f'(0) \neq 0$.

Для додатної неперервної на $[0, +\infty)$ функції l ціла функція f називається функцією обмеженого l-індексу [2, c. 5], якщо існує $N \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ і $z \in \mathbb{C}$

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!l^n(|z|)} \leqslant \max\left\{\frac{|f^{(k)}(z)|}{k!l^k(|z|)}\colon 0 \leqslant k \leqslant N\right\}. \tag{1}$$

Найменше з таких чисел N називається l-індексом і позначається через $N(f, l)$. Якщо $G \subset \mathbb{C}$ та існує $N \in \mathbb{Z}_+$ таке, що нерівність (1) правильна для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ і $z \in G$, то f називатимемо функцією обмеженого l-індексу на (або в) G, а l-індекс позначатимемо через $N(f, l; G)$. Зауважимо, що якщо $l(x) \equiv 1$, то з (1) отримуємо означення цілої функції обмеженого індексу, введене Б. Лепсоном [3] для вивчення властивостей цілих розв'язків лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами і використане У. Хейманом [4] для дослідження розподілу значень таких розв'язків.

Ще у 1940 р. Р. Боас [5] довів, що якщо щонайбільше скінченна кількість похідних цілої функції f експоненціального типу $\leqslant \ln 2$ є однолистими в $\mathbb{D}$, то f — многочлен. С. Шах і С. Трімбле [6] поширили цей результат на цілі функції з усіма однолистими в $\mathbb{D}$ похідними, або з деякою послідовністю однолистих в $\mathbb{D}$ похідних. Їх дослідження продовжено в працях [7–9].

Проблемі близькості до опуклості всіх похідних цілої функції присвячено значно менше праць, а добре відомою є тільки стаття С. Шаха [10], в якій вказано умови на дійсні коефіцієнти β_0, β_1, γ_0, γ_1, γ_2 диференціального рівняння

$$z^2w'' + (\beta_0 z^2 + \beta_1 z)w' + (\gamma_0 z^2 + \gamma_1 z + \gamma_2)w = 0, \tag{2}$$

за яких існує такий цілий розв'язок f, що всі його похідні є близькими до опуклих у $\mathbb{D}$ функціями. Дослідження С. Шаха продовжено в статтях [11, 12], і у випадку комплексних параметрів β_0, β_1, γ_0, γ_1, γ_2 доведено [12] такі твердження.

Теорема А. *Якщо $\gamma_0 = 0$, $\beta_0 \neq 0$, $\beta_1 + \gamma_2 = 0$, $|\beta_1| < 2$ і $2(|\beta_0| + |\gamma_1|)/(2 - |\beta_1|) < \ln 2$, то існує цілий розв'язок*

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} f_n z^n \tag{3}$$

диференціального рівняння (2) *такий, що* f, f', f'', … *є близькими до опуклих у* $\mathbb{D}$ *функціями і* $\ln M_f(r) = (1+o(1))|\beta_0|r$, $r \to \infty$, *де* $M_f(r) = \max\{|f(z)|\colon |z| = r\}$.

Теорема Б. *Нехай* $\beta_0 \neq 0$, $\gamma_0 \neq 0$, $\beta_1 + \gamma_2 = 0$, $|\beta_1| < 2$ *і*

$$\frac{2|\beta_0| + 2|\gamma_1|}{2 - |\beta_1|} + \frac{6|\beta_0| + 3|\gamma_1| + 3|\gamma_0|}{2(3 - |\beta_1|)} + \frac{2|\gamma_0|}{3(4 - |\beta_1|)} < 1.$$

Тоді існує цілий розв'язок (3) *рівняння* (2) *такий, що* f, f', f'', … *є близькими до опуклих у* $\mathbb{D}$ *функціями і* $\ln M_f(r) = (1+o(1))|\sigma|r$, $r \to \infty$, *де або* $\sigma = \dfrac{1}{2}\Big|-\beta_0 + \sqrt{\beta_0^2 - 4\gamma_0}\Big|$, *або* $\sigma = \dfrac{1}{2}\Big|-\beta_0 - \sqrt{\beta_0^2 - 4\gamma_0}\Big|$.

Теорема В. *Нехай* $\beta_0 = \gamma_0 = 0$, $\beta_1 + \gamma_2 = 0$, $|\beta_1| < 2$, $\gamma_1 \neq 0$ *і* $2|\gamma_1|/(2 - |\beta_1|) < 4/5$. *Тоді існує цілий розв'язок* (3) *рівняння* (2) *такий, що* f, f', f'', … *є близькими до опуклих у* $\mathbb{D}$ *функціями і* $\ln M_f(r) = (1+o(1))\sqrt{|\gamma_1|r}$, $r \to +\infty$.

У даному повідомленні ми доповнимо ці результати оцінками l-індексу функції (3).

Теорема 1. *Кожна з похідних* $f^{(\nu)}$ $(\nu \geqslant 0)$ *цілого розв'язку* (3) *рівняння* (2) *є обмеженого* l*-індексу, причому*

а) $l(x) \equiv 3\nu + 5$ *і* $N(f^{(\nu)}, l) \leqslant \max\{2, m\}$, *а*

$$m = \left[\frac{\exp\left\{\dfrac{2(|\beta_0| + |\gamma_1|)}{2 - |\beta_1|}\right\} - 1}{1 - \dfrac{1}{2}\exp\left\{\dfrac{2(|\beta_0| + |\gamma_1|)}{2 - |\beta_1|}\right\}}\right] + 1$$

за умов теореми А*;*

б) $l(x) \equiv 3\nu + 5$ *і* $N(f^{(\nu)}, l) \leqslant \max\{2, m\}$, *а*

$$m = \left[\frac{\dfrac{4|\beta_0| + 4|\gamma_1|}{2 - |\beta_1|} + \dfrac{6|\gamma_0|}{2(3 - |\beta_1|)}}{1 - \dfrac{2|\beta_0| + 2|\gamma_1|}{2 - |\beta_1|} - \dfrac{6|\beta_0| + 3|\gamma_1| + 3|\gamma_0|}{2(3 - |\beta_1|)} - \dfrac{2|\gamma_0|}{3(4 - |\beta_1|)}}\right] + 1$$

за умов теореми Б*;*

в) $l(x) = (2\nu + 5)\min\left\{\sqrt{2}, 1/\sqrt{x}\right\}$ *і* $N(f^{(\nu)}, l) \leqslant m = 134$ *за умов теореми* В.

1. Оцінки $N(f^{(\nu)}, l; \overline{\mathbb{D}}_{1/2})$. Для оцінок l-індексу функції (3) та її похідних в $\overline{\mathbb{D}}_{1/2} = \{z\colon |z| \leqslant 1/2\}$ будемо використовувати деякі оцінки з [12] і таку лему.

Лема. *Якщо* $\sum\limits_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leqslant \alpha < 1$, *то функція* $a(z) = z + \sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ *є обмеженого* l*-індексу в* $\overline{\mathbb{D}}_{1/2}$ *з* $l(x) \equiv 2$ *і* $N(a, 2; \overline{\mathbb{D}}_{1/2}) \leqslant [2\alpha/(1-\alpha)] + 1$.

Справді, $0 < 1 - \alpha \leqslant |a'(z)| \leqslant 1 + \alpha$ для $|z| \leqslant 1$, а за нерівністю Коші для $|z| \leqslant 1/2$ і $m \geqslant 1$ маємо $|a^{(m+1)}(z)| \leqslant m!2^m \max\{|a'(z)|\colon |z| \leqslant 1\}$. Тому для $z \in \overline{\mathbb{D}}_{1/2}$ і $m \geqslant 2\alpha/(1-\alpha)$

$$\frac{|a^{(m+1)}(z)|}{(m+1)!2^{m+1}} \leqslant \frac{1+\alpha}{(m+1)(1-\alpha)}\frac{|a'(z)|}{2} \leqslant \frac{|a'(z)|}{2} \leqslant \max\left\{\frac{|a'(z)|}{2}, |a(z)|\right\},$$

тобто функція a є обмеженого l-індексу в $\overline{\mathbb{D}}_{1/2}$ з $l(x) \equiv 2$ і $N(a, 2; \overline{\mathbb{D}}_{1/2}) \leqslant [2\alpha/(1-\alpha)] + 1$.

Зробимо ще два зауваження, які випливають з означення обмеженості l-індексу.

Зауваження 1. Якщо f — ціла функція обмеженого l-індексу в G і $a = \text{const} \neq 0$, то функція $F(z) = af(z)$ обмеженого l-індексу в G і $N(F, l; G) = N(f, l; G)$.

Зауваження 2. Якщо $l_1(x) \leqslant l_2(x)$ і f є обмеженого l_1-індексу N в G, то f є обмеженого l_2-індексу $\leqslant N$ в G.

Позначимо $F_0 = f^{(0)} = f$ і $F_{0,n} = f_n$, тобто $F_0(z) = z + \sum\limits_{n=2}^{\infty} F_{0,n} z^n$. Далі, для $\nu \geqslant 1$ маємо $f^{(\nu)}(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n^{(\nu)} z^n$, де $f_n^{(\nu)} = \dfrac{(n+\nu)!}{n!} f_{n+\nu} > 0$. Тому згідно із зауваженням 1 $N(f^{(\nu)}, l; \overline{\mathbb{D}}_{1/2}) = N(F_\nu, l; \overline{\mathbb{D}}_{1/2})$, де $F_\nu(z) = (f^{(\nu)}(z) - f_0^{(\nu)})/f_1^{(\nu)} = z + \sum\limits_{n=2}^{\infty} F_{n,\nu} z^n$, $F_{0,\nu} = 0$, $F_{1,\nu} = 1$ і $F_{n,\nu} = f_n^{(\nu)}/f_1^{(\nu)}$. У [12] показано, що для кожного $\nu \geqslant 0$ за умов теореми А

$$\sum_{n=2}^{\infty} n|F_{n,\nu}| \leqslant \exp\left\{\frac{2(|\beta_0| + |\gamma_1|)}{2 - |\beta_1|}\right\} - 1,$$

за умов теореми Б

$$\sum_{n=2}^{\infty} n|F_{n,\nu}| \leqslant \frac{\dfrac{2(|\beta_0| + |\gamma_1|)}{2 - |\beta_1|} + \dfrac{3|\gamma_0|}{2(3 - |\beta_1|)}}{1 - \dfrac{3(2|\beta_0| + |\gamma_1|)}{2(3 - |\beta_1|)} - \dfrac{2|\gamma_0|}{3(4 - |\beta_0|)}}$$

і за умов теореми В

$$\sum_{n=2}^{\infty} n|F_{n,\nu}| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{2|\gamma_1|}{2 - |\beta_1|}\right)^n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{4}{5}\right)^n < 0{,}985.$$

Тому за лемою $N(f^{(\nu)}, 2; \overline{\mathbb{D}}_{1/2}) = N(F_\nu, 2; \overline{\mathbb{D}}_{1/2}) \leqslant m$, де m визначено так, як у формулюванні теореми 1.

2. Оцінки $\boldsymbol{N(f^{(\nu)}, l; \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_{1/2})}$. Припустимо, що виконуються умови теореми А. Тоді з умови $2(|\beta_0| + |\gamma_1|)/(2 - |\beta_1|) < \ln 2$ випливає, що $|\beta_0| \leqslant 1$, $|\gamma_1| \leqslant 1$, а диференціальне рівняння (2) має вигляд

$$z^2 w'' + (\beta_0 z^2 + \beta_1 z) w' + (\gamma_1 z - \beta_1) w = 0. \tag{4}$$

Підставивши сюди $w = f(z)$, для $|z| \geqslant 1/2$ неважко отримати

$$\frac{|f''(z)|}{2!5^2} \leqslant \max\left\{\frac{|f'(z)|}{1!5}, |f(z)|\right\}. \tag{5}$$

Підставивши в (4) $w = f(z)$ і продиференціювавши $m \geqslant 1$ раз, дістанемо

$$\begin{gathered} z^2 f^{(m+2)}(z) + (\beta_0 z^2 + (2m + \beta_1) z) f^{(m+1)}(z) + \\ + ((2m\beta_0 + \gamma_1) z + (m + \beta_1)(m-1)) f^{(m)}(z) + (\beta_0 m(m-1) + \gamma_1) f^{(m-1)}(z) \equiv 0, \end{gathered} \tag{6}$$

звідки для $|z| \geqslant 1/2$ отримуємо

$$\frac{|f^{(m+2)}(z)|}{(m+2)!5^{m+2}} \leqslant \frac{|\beta_0| + 4m + 2|\beta_1|}{5(m+2)} \frac{|f^{(m+1)}(z)|}{(m+1)!5^{m+1}} + \\ + \frac{4m|\beta_0| + 4m + 2|\gamma_1| + 4(m+\beta_1)(m-1)}{5^2(m+2)(m+1)} \frac{|f^{(m)}(z)|}{m!5^m} + \\ + \frac{4m(m-1)|\beta_0| + 4|\gamma_1|}{5^3(m+2)(m+1)m} \frac{|f^{(m-1)}(z)|}{(m-1)!5^{m-1}} \leqslant \\ \leqslant \frac{124m^2 + 261m + 109}{125m^2 + 375m + 250} \max\left\{\frac{|f^{(k)}(z)|}{k!5^k} : m-1 \leqslant k \leqslant m+1\right\} < \\ < \max\left\{\frac{|f^{(k)}(z)|}{k!5^k} : m-1 \leqslant k \leqslant m+1\right\}. \tag{7}$$

З нерівностей (7) і (5) випливає нерівність $N(f, 5; \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_{1/2}) \leqslant 1$. Для $\nu \geqslant 1$ і $n \geqslant 0$ тотожність (6) можна записати у вигляді

$$z^2 f^{(\nu+n+3)}(z) + (\beta_0 z^2 + (2\nu + 2n + 2 + \beta_1)z) f^{(m+1)}(z) + ((2\nu + 2n + 2)\beta_0 + \gamma_1)z + \\ + (\nu + n + 1 + \beta_1)(\nu + n)) f^{(m)}(z) + (\beta_0(\nu + n + 1)(\nu + n) + \gamma_1) f^{(\nu+n)}(z) \equiv 0,$$

звідки для $|z| \geqslant 1/2$

$$\frac{|f^{(\nu+n+3)}(z)|}{(n+3)!(3\nu+5)^{n+3}} \leqslant \frac{1 + 2(2\nu + 2n + 4)}{(n+3)(3\nu+5)} \frac{|f^{(\nu+n+2)}(z)|}{(n+2)!(3\nu+5)^{n+2}} + \\ + \frac{2(2\nu + 2n + 3) + 4(\nu + n + 3)(\nu + n)}{(n+3)(n+2)(3\nu+5)^2} \frac{|f^{(\nu+n+1)}(z)|}{(n+1)!(3\nu+5)^{n+1}} + \\ + \frac{4(\nu + n + 1)(\nu + n) + 4}{(n+3)(n+2)(n+1)(3\nu+5)^3} \frac{|f^{(\nu+n)}(z)|}{(\nu+n)!(3\nu+5)^n} \leqslant \\ \leqslant Q(\nu, n) \max\left\{\frac{|f^{(\nu+k)}(z)|}{k!(3\nu+5)^k} : n \leqslant k \leqslant n+2\right\},$$

де

$$Q(\nu, n) = \frac{4\nu + 4n + 9}{(n+3)(3\nu+5)} + \frac{8\nu^2 + 16n\nu + 8n^2 + 20\nu + 20n + 10}{(n+3)(n+2)(3\nu+5)^2} < 1.$$

Отже, для $|z| \geqslant 1/2$

$$\frac{|f^{(\nu+n+3)}(z)|}{(n+3)!(3\nu+5)^{n+3}} \leqslant \max\left\{\frac{|f^{(\nu+k)}(z)|}{k!(3\nu+5)^k} : n \leqslant k \leqslant n+2\right\},$$

звідки випливає, що

$$N(f^{(\nu)}, 3\nu + 5; \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_{1/2}) \leqslant 2.$$

Подібно доводиться, що за умов теореми Б $N(f,5;\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}_{1/2})\leqslant 1$ і $N(f^{(\nu)},3\nu+5;\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}_{1/2})\leqslant 3$ $(\nu\geqslant 1)$.

Нарешті, нехай виконуються умови теореми В. Тоді з умови $2|\gamma_1|/(2-|\beta_1|)<4/5$ випливає, що $|\gamma_1|<1$, і оскільки $\beta_0=0$, то з (4) замість (5) для $|z|\geqslant 1/2$ тепер маємо

$$\frac{|f''(z)|(\sqrt{|z|})^2}{2!5^2}\leqslant\frac{|\beta_1|}{10\sqrt{|z|}}\frac{|f'(z)|\sqrt{|z|}}{1!5}+\frac{|\gamma_1||z|+|\beta_1|}{50|z|^2}|f(z)|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{13}{25}\max\left\{\frac{|f'(z)|\sqrt{|z|}}{1!5},|f(z)|\right\}\leqslant\max\left\{\frac{|f'(z)|\sqrt{|z|}}{1!5},|f(z)|\right\}. \tag{8}$$

З цих же причин з (6) для $m\geqslant 1$ і $|z|\geqslant 1/2$ подібно отримуємо

$$\frac{|f^{(m+2)}(z)|(\sqrt{|z|})^{m+2}}{(m+2)!5^{m+2}}\leqslant\frac{2m+|\beta_1|}{5\sqrt{|z|}(m+2)}\frac{|f^{(m+1)}(z)|(\sqrt{|z|})^{m+1}}{(m+1)!5^{m+1}}+$$
$$+\left(\frac{(m+|\beta_1|)(m-1)}{|z|^2}+\frac{|\gamma_1|}{|z|}\right)\frac{|z|}{25(m+2)(m+1)}\frac{|f^{(m)}(z)|(\sqrt{|z|})^m}{m!5^m}+$$
$$+\frac{|\gamma_1|}{|z|^2}\frac{|z|\sqrt{|z|}}{125(m+2)(m+1)m}\frac{|f^{(m-1)}(z)|(\sqrt{|z|})^{m-1}}{(m-1)!5^{m-1}}\leqslant$$
$$<\max\left\{\frac{|f^{(j)}(z)|(\sqrt{|z|})^j}{j!5^j}:m-1\leqslant j\leqslant m+1\right\}. \tag{9}$$

З (9) і (8) випливає нерівність

$$N\left(f,\frac{5}{\sqrt{|z|}};\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}_{1/2}\right)\leqslant 1.$$

Нарешті, з (6) для $\nu\geqslant 1$ і $m\geqslant 0$ маємо

$$\frac{|f^{(\nu+n+3)}(z)|(\sqrt{|z|})^{n+3}}{(n+3)!(2\nu+5)^{n+3}}\leqslant\frac{2(\nu+n+1)\sqrt{2}}{(n+3)(2\nu+5)}\frac{|f^{(\nu+n+2)}(z)|(\sqrt{|z|})^{n+2}}{(n+2)!(2\nu+5)^{n+2}}+$$
$$+\frac{1+4(\nu+n+2)(\nu+n)}{(n+3)(n+2)(2\nu+5)^2}\frac{|f^{(\nu+n+1)}(z)|(\sqrt{|z|})^{n+1}}{(n+1)!(2\nu+5)^{n+1}}+$$
$$+\frac{\sqrt{2}}{(n+3)(n+2)(n+1)(2\nu+5)^3}\frac{|f^{(\nu+n)}(z)|(\sqrt{|z|})^n}{n!(2\nu+5)^n}\leqslant$$
$$\leqslant Q(\nu,n)\max\left\{\frac{|f^{(\nu+j)}(z)|(\sqrt{|z|})^j}{j!5^j}:n\leqslant j\leqslant n+2\right\},$$

де

$$Q(\nu,n)=\frac{4(\nu+n+1)}{(n+3)(2\nu+5)}+\frac{4(\nu+n+2)(\nu+n)+3}{(n+3)(n+2)(2\nu+5)^2}<1,$$

звідки одержуємо нерівність

$$N\left(f^{(\nu)},\frac{2\nu+5}{\sqrt{|z|}};\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}_{1/2}\right)\leqslant 2.$$

3. Доведення теореми 1. У п. 1 доведено, що $N(f^{(\nu)}, 2; \overline{\mathbb{D}}_{1/2}) \leqslant m$ для всіх $\nu \geqslant 0$. З іншого боку, як показано в п. 2, за умов теореми А $N(f, 3\nu+5; \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_{1/2}) \leqslant 1$ і $N(f^{(\nu)}, 3\nu + 5; \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_{1/2}) \leqslant 2$, $\nu \geqslant 1$. Тому згідно із зауваженням 2 $N(f^{(\nu)}, 3\nu + 5) \leqslant \max\{2, m\}$.

За умов теореми Б доведення теореми 1 таке ж.

Нарешті, за умов теореми В маємо $N(f^{(\nu)}, 2; \overline{\mathbb{D}}_{1/2}) \leqslant 134$ $(\nu \geqslant 0)$, $N(f, 5/\sqrt{|z|}; \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_{1/2}) \leqslant 1$ і $N(f^{(\nu)}, (2\nu + 5)/\sqrt{|z|}; \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_{1/2}) \leqslant 2$ $(\nu \geqslant 1)$. Тому, якщо приймемо $l(x) = (2\nu + 5) \min\{\sqrt{2}, 1/\sqrt{x}\}$, то $l(|z|) \geqslant 2$ для $|z| \leqslant 1/2$, $l(|z|) = (2\nu + 5)/\sqrt{|z|}\}$ для $|z| \geqslant 1/2$ і згідно із зауваженням 2 $N(f^{(\nu)}, l) \leqslant 134$.

1. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – Москва: Наука, 1966. – 628 с.
2. *Sheremeta M. M.* Analytic functions of bounded index. – Lviv: VNTL Publishers, 1999. – 141 p.
3. *Lepson B.* Differential equations of infinite order, hyperdirichlet series and entire functions of bounded index // Proc. Symp. Pure Math. Vol. 2. Amer. Math. Soc., Providence, Phode Island. – 1968. – P. 298–307.
4. *Hayman W. K.* Differential inequalities and local valency // Pacific J. Math. – 1973. – **44**. – P. 117–137.
5. *Boas R. P.* Univalent derivatives of entire functions // Duke Math. J. – 1940. – **6**. – P. 719–721.
6. *Shah S. M., Trimble S. Y.* Entire functions with some derivatives univalent // Canad. J. Math. – 1974. – **24**. – P. 207–213.
7. *Шеремета М. Н.* О целых функциях с однолистными в круге производными // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 3. – С. 400–406.
8. *Шеремета М. М.* Спростування однієї гіпотези Шаха про однолисті функції // Мат. студії. – 1993. – **2**. – С. 46–48.
9. *Шеремета М. М.* Про аналітичні в крузі функції з однолистими похідними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1997. – **40**, № 4. – С. 58–65.
10. *Shah S. M.* Univalence of a function f and its successive derivatives when f satisfies a differential equation, II // J. Math. Anal. and Appl. – 1989. – **142**. – P. 422–430.
11. *Шеремета З. М.* О свойствах целых решений одного дифференциального уравнения // Дифференц. уравнения. – 2000. – **36**, № 8. – С. 1–6.
12. *Шеремета З. М., Шеремета М. Н.* Близость к выпуклости целых решений одного дифференциального уравнения // Там же. – 2002. – **38**, № 4. – С. 477–481.

Інститут прикладних проблем математики і механіки НАН України, Львів
Львівський національний університет ім. Івана Франка

Надійшло до редакції 04.07.2006