УДК 517.977

Ю. К. Подлипенко, В. Н. Головач

Об оценивании функционалов от решения линеаризованной задачи Навье–Стокса по неполным данным

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. С. Мельником)

We investigate the problem of minimax estimation of an unknown solution to the linearized Navier-Stokes problem under the assumption that unknown deterministic data of this problem, as well as the statistical characteristics of noises in observations, are subjected to certain quadratic restrictions.

Если H — гильбертово пространство над $\mathbb{R}$ со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_H$ и нормой $\|\cdot\|_H$, то через $J_H \in \mathcal{L}(H, H')$ будем обозначать оператор, называемый изометрическим изоморфизмом, действующий из H на его сопряженное пространство H' и определяемый равенством[1] $(v, u)_H = \langle v, J_H u\rangle_{H\times H'}$ $\forall u, v \in H$, где $\langle x, f\rangle_{H\times H'} := f(x)$ для $x \in H$, $f \in H'$. Обозначим через $L^2(\Omega, H)$ пространство Бохнера, состоящее из случайных элементов $\xi = \xi(\omega)$, определенных на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ со значениями в H таких, что $\|\xi\|^2_{L^2(\Omega,H)} = \int\limits_\Omega \|\xi(\omega)\|^2_H dP(\omega) < \infty$. В этом случае существует интеграл Бохнера $\int\limits_\Omega \xi(\omega)\, dP(\omega) \in H$, называемый математическим ожиданием, или средним случайного элемента $\xi(\omega)$.

Введем также следующие обозначения: $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — пространственная переменная, принадлежащая ограниченной открытой области $D \subset \mathbb{R}^n$ с липшицевой границей; $dx = dx_1 \ldots dx_n$ — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$; $L^2(D)$ — пространство функций, суммируемых с квадратом в области D;

$$H^1(D) = \left\{\varphi \in L^2(D)\colon \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \in L^2(D)\ \forall\, i = \overline{1,n}\right\} -$$

пространство Соболева порядка 1 в области D с нормой

$$\|\varphi\|_{H^1(D)} = \left(\|\varphi\|^2_{L^2(D)} + \sum_{i=1}^n \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(D)}\right)^{1/2}, \tag{1}$$

где производные понимаются в смысле распределений в D; $\mathcal{D}(D)$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в D; $H^1_0(D)$ — замыкание $\mathcal{D}(D)$ в топологии, порожденной нормой (1); $H^{-1}(D)$ — пространство, двойственное к $H^1_0(D)$ с соответствующей нормой.

Пусть

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \int\limits_D \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial v_i(x)}{\partial x_j}\frac{\partial w_i(x)}{\partial x_j}\, dx \tag{2}$$

[1]Этот оператор существует в силу теоремы Рисса.

и

$$b(\mathbf{w},p) = -\int\limits_D p(x)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial w_i}{\partial x_i}\,dx - \tag{3}$$

ограниченные билинейные формы на $H_0^1(D)^n \times H_0^1(D)^n$ и $H_0^1(D)^n \times L^2(D)$ соответственно, первая из которых определяет линейный непрерывный оператор $\boldsymbol{\Delta}\colon H_0^1(D)^n \to H^{-1}(D)^n$, а вторая — линейный непрерывный оператор $-\operatorname{div}\colon H_0^1(D)^n \to L^2(D)$, а также транспонированный к нему оператор $\operatorname{grad}\colon L^2(D) \to H^{-1}(D)^n$ равенствами[2]

$$\langle \boldsymbol{\Delta}\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle_{H^{-1}(D)^n\times H_0^1(D)^n} = a(\mathbf{v},\mathbf{w}) \qquad \forall\mathbf{v}=(v_1,\ldots,v_n),\quad \forall\mathbf{w}=(w_1,\ldots,w_n)\in H_0^1(D)^n$$

и

$$(-\operatorname{div}\mathbf{w},p)_{L^2(D)} = \langle \mathbf{w},\operatorname{grad}p\rangle_{H_0^1(D)^n\times H^{-1}(D)^n} = b(\mathbf{w},p),$$
$$\forall\mathbf{w}=(w_1,\ldots,w_n)\in H_0^1(D)^n, \qquad \forall p\in L^2(D).$$

Пусть состояние системы характеризуется функциями $\mathbf{v}=(v_1,\ldots,v_n)\in H_0^1(D)^n$ и $p\in$ $\in L^2(D)$, удовлетворяющими линеаризованной задаче Навье–Стокса[3]:

$$-\nu\boldsymbol{\Delta}\mathbf{v}+\operatorname{grad}p=\mathbf{f} \quad \text{в} \quad D, \tag{4}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v}=q \quad \text{в} \quad D. \tag{5}$$

Здесь $\nu=\text{const}>0$, $\mathbf{f}(x)=(f_1(x),\ldots,f_n(x))$ и $q(x)$ — неизвестные функции, принадлежащие множеству

$$G_0 := \Bigg\{(\widetilde{\mathbf{f}},\widetilde{q})\in L^2(D)^n\times L^2(D) : (Q_1(\widetilde{\mathbf{f}}-\mathbf{f}_0),\widetilde{\mathbf{f}}-\mathbf{f}_0)_{L^2(D)^n} +$$
$$+(Q_2(\widetilde{q}-q_0),q-q_0)_{L^2(D)}\leqslant 1,\ \int\limits_D \widetilde{q}(x)\,dx=0\Bigg\},$$

а $\mathbf{f}_0\in L^2(D)^n$ и $q_0\in L^2(D)$ — заданные функции, причем $\int\limits_D q_0(x)\,dx=0$, Q_1 и Q_2 — непрерывные, неотрицательно определенные самосопряженные операторы, заданные в $L^2(D)^n$ и $L^2(D)$ соответственно, обратные для которых ограничены.

Задача состоит в том, чтобы по наблюдениям элементов вида

$$y_1(\mathbf{v};\eta_1)=C_1\mathbf{v}+\eta_1, \qquad y_2(p;\eta_2)=C_2p+\eta_2, \tag{6}$$

[2] Очевидно, оператор $\boldsymbol{\Delta}$ действует по формуле $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{v}=(\Delta v_1,\ldots,\Delta v_n)$ $\forall\mathbf{v}=(v_1,\ldots,v_n)\in H_0^1(D)^n$, в которой оператор Лапласа Δ определяется соотношением $\langle\Delta\varphi,\psi\rangle_{H^{-1}(D)\times H_0^1(D)} = \int\limits_D\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\partial\varphi(x)}{\partial x_j}\dfrac{\partial\psi(x)}{\partial x_j}\,dx$, $\forall\varphi$, $\forall\psi\in H_0^1(D)$, а операторы div и grad определяются формулами $\operatorname{div}\boldsymbol{w}=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial w_i}{\partial x_i}$ и $\operatorname{grad}p=\left(\dfrac{\partial p}{\partial x_1},\ldots,\dfrac{\partial p}{\partial x_n}\right)$ $\forall\boldsymbol{w}=(w_1,\ldots,w_n)\in H_0^1(D)^n$ и $\forall p\in L^2(D)$, в которых производные понимаются в смысле распределений в D.

[3] Отметим, что если $(\mathbf{v}_1,p_1)$ и $(\mathbf{v}_2,p_2)$ — два решения задачи (4), (5), то $\mathbf{v}_1=\mathbf{v}_2$ и $p_1-p_2=c=\text{const}$.

принадлежащих сепарабельным гильбертовым пространствам H_1 и H_2 над $\mathbb{R}$ соответственно, оценить значение линейного функционала

$$l(\mathbf{v},p) := \int_D (\mathbf{l}_1(x), \mathbf{v}(x))_{\mathbb{R}^n}\, dx + \int_D l_2(x)p(x)\, dx \tag{7}$$

в классе оценок вида

$$\widehat{l(\mathbf{v},p)} := (y_1(\mathbf{v};\eta_1), u_1)_{H_1} + (y_2(p;\eta_2), u_2)_{H_2} + c, \tag{8}$$

где $(\mathbf{v},p)$ — неизвестное решение задачи (4), (5); $\mathbf{l}_1$ и l_2 — заданные элементы из $L^2(D)^n$ и $L^2(D)$, $u_1 \in H_1$, $u_2 \in H_2$, $c \in \mathbb{R}$, $C_1 \in \mathcal{L}(L^2(D)^n, H_1)$ и $C_2 \in \mathcal{L}(L^2(D), H_2)$ — линейные непрерывные операторы, причем ограничение оператора C_2 на подпространство $\mathrm{Ker}(\mathrm{grad}) = \{t\colon t = \mathrm{const}$ в $D\}$ предполагается инъективным, $(\eta_1,\eta_2) \in G_1$, а через G_1 обозначено множество случайных элементов $\widetilde{\eta}_1 \in L^2(\Omega, H_1)$ и $\widetilde{\eta}_2 \in L^2(\Omega, H_2)$ с нулевыми средними, удовлетворяющих условию $\mathbb{E}(\widetilde{Q}_1\widetilde{\eta}_1,\widetilde{\eta}_1)_{H_1} + \mathbb{E}(\widetilde{Q}_2\widetilde{\eta}_2,\widetilde{\eta}_2)_{H_2} \leqslant 1$, в котором $\widetilde{Q}_1$ и $\widetilde{Q}_2$ — заданные в H_1 и H_2 ограниченные самосопряженные положительно определенные операторы, имеющие ограниченные обратные, и символом $\mathbb{E}\xi$ обозначено математическое ожидание случайной величины $\xi = \xi(\omega)$.

Определение 1. Оценку вида

$$\widehat{\widehat{l(\mathbf{v},p)}} = (y_1(\mathbf{v};\eta_1), \widehat{u}_1)_{H_1} + (y_2(p;\eta_2), \widehat{u}_2)_{H_2} + \widehat{c} \tag{9}$$

будем называть минимаксной оценкой $l(\mathbf{v},p)$, если элементы $\widehat{u}_1 \in H_1$, $\widehat{u}_2 \in H_2$ и число $\widehat{c}$ определятся из условия

$$\sigma(u_1,u_2,c)\colon = \sup_{(\widetilde{\mathbf{f}},\widetilde{q})\in G_0, (\widetilde{\eta}_1,\widetilde{\eta}_2)\in G_1} \sup_{a\in\mathbb{R}} \mathbb{E}|l(\widetilde{\mathbf{v}},\widetilde{p}+a) - \widehat{l(\widetilde{\mathbf{v}},\widetilde{p}+a)}|^2 \to \inf_{u_1\in H_1, u_2\in H_2, c\in\mathbb{R}}, \tag{10}$$

где

$$\widehat{l(\widetilde{\mathbf{v}},\widetilde{p}+a)} = (y_1(\widetilde{\mathbf{v}};\widetilde{\eta}_1), u_1)_{H_1} + (y_2(\widetilde{p}+a;\widetilde{\eta}_2), u_2)_{H_2} + c,$$

а $(\widetilde{\mathbf{v}},\widetilde{p})$ — некоторое решение задачи (4), (5) при $\mathbf{f}(x) = \widetilde{\mathbf{f}}(x)$, $q(x) = \widetilde{q}(x)$. Величину $r(\mathbf{v},p) = \left\{\mathbb{E}|l(\mathbf{v},p) - \widehat{\widehat{l(\mathbf{v},p)}}|^2\right\}^{1/2}$ будем называть ошибкой минимаксного оценивания выражения $l(\mathbf{v},p)$.

Представления для минимаксных оценок и ошибок оценивания. Введем в рассмотрение при фиксированных $(u_1,u_2) \in U := \left\{(u_1,u_2) \in H_1\times H_2\colon \int_D (l_2(x) - C_2^t J_{H_2}u_2(x))\, dx = 0\right\}$, пару функций $(\mathbf{z}_1(\cdot;u_1,u_2), z_2(\cdot;u_1,u_2)) \in H_0^1(D)^n \times L^2(D)$ как решение следующей краевой задачи[4]:

$$-\nu\boldsymbol{\Delta}\mathbf{z}_1(\cdot;u_1,u_2) + \mathrm{grad}\, z_2(\cdot;u_1,u_2) = \mathbf{l}_1 - C_1^t J_{H_1}u_1 \quad \text{в} \quad D, \tag{11}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{z}_1(\cdot;u_1,u_2) = -l_2 + C_2^t J_{H_2}u_2 \quad \text{в} \quad D, \tag{12}$$

[4]Легко видеть, что в силу предположения об инъективности ограничения оператора C_2 на подпространство $\mathrm{Ker}(\mathrm{grad}) = \{t\colon t = \mathrm{const}$ в $D\}$, множество U непусто.

$$\int\limits_D Q_2^{-1} z_2(x; u_1, u_2)\, dx = 0, \tag{13}$$

где $C_1^t\colon H_1' \to L^2(D)^n$ и $C_2^t\colon H_2' \to L^2(D)$ — операторы, транспонированные к C_1 и C_2 и определяемые соотношениями $\int\limits_D (v(x), C_1^t w(x))_{\mathbb{R}^n}\, dx = \langle Cv, w\rangle_{H_1\times H_1'}$ для всех $v \in L^2(D)^n$, $w \in H_1'$, $\int\limits_D v(x) C_2^t w(x)\, dx = \langle Cv, w\rangle_{H_2\times H_2'}$ для всех $v \in L^2(D)$, $w \in H_2'$. Функции $\mathbf{z}_1(x; u_1, u_2)$, $z_2(x; u_1, u_2)$ определяются из уравнений (11)–(13) единственным образом. В самом деле, условие $(u_1, u_2) \in U$ совпадает с необходимым и достаточным условием разрешимости краевой задачи (11)–(12). Пусть $(\mathbf{z}_1(\cdot; u), z_2^{(0)}(\cdot; u)) \in H^1(D)^n \times L^2(D)$ — некоторое решение задачи (11)–(12). Положим

$$c = -\frac{(Q_2^{-1} z_2^{(0)}(\cdot; u_1, u_2), 1)_{L^2(D)}}{(Q_2^{-1} 1, 1)_{L^2(D)}}.$$

Тогда пара $(\mathbf{z}_1(x; u), z_2(x; u))$, где $z_2(x; u) = z_2^{(0)}(x; u) + c$ — единственное решение задачи (11)–(13).

Пользуясь смешанными вариационными формулировками, эквивалентными, соответственно, операторным уравнениям (4), (5) и (11), (12) (см. [1], с. 42, 202, 203), докажем следующее утверждение.

Лемма 1. *Задача нахождения минимаксной оценки выражения* $l(\mathbf{v}, p)$ *эквивалентна задаче оптимального управления системой, описываемой краевой задачей* (11)–(13) *с функцией стоимости вида*

$$I(u_1, u_2) = (Q_1^{-1} \mathbf{z}_1(\cdot; u_1, u_2), \mathbf{z}_1(\cdot; u_1, u_2))_{L^2(D)^n} + (Q_2^{-1} z_2(\cdot; u_1, u_2), z_2(\cdot; u_1, u_2))_{L^2(D)} +$$
$$+ (\widetilde{Q}_1^{-1} u_1, u_1)_{H_1} + (\widetilde{Q}_2^{-1} u_2, u_2)_{H_2} \to \inf_{(u_1, u_2)\in U}. \tag{14}$$

В результате решения задачи оптимального управления (11)–(14) приходим к следующему результату.

Теорема 1. *Существует единственная минимаксная оценка значения* $l(\mathbf{v}, p)$*, которая имеет вид*

$$\widehat{\widehat{l(\mathbf{v}, p)}} = (y_1(\mathbf{v}; \eta_1), \widehat{u}_1)_{H_1} + (y_2(p; \eta_2), \widehat{u}_2)_{H_2} + \widehat{c},$$

где

$$\widehat{c} = \int\limits_D (\widehat{\mathbf{z}}_1(x), \mathbf{f}_0(x))_{\mathbb{R}^n}\, dx - \int\limits_D \widehat{z}_2(x) q_0(x)\, dx, \qquad \widehat{u}_1 = \widetilde{Q}_1 C_1 \widetilde{\mathbf{p}}_1, \qquad \widehat{u}_2 = \widetilde{Q}_2 C_2 \widetilde{p}_2,$$

а функции $\widehat{\mathbf{z}}_1$, $\widetilde{\mathbf{p}}_1 \in H_0^1(D)^n$ *и* $\widehat{z}_2$, $\widetilde{p}_2 \in L^2(D)$ *находятся из решения следующей системы вариационных уравнений:*

$$a(\boldsymbol{\varphi}_1, \widehat{\mathbf{z}}_1) + b(\boldsymbol{\varphi}_1, \widehat{z}_2) = (\mathbf{l}_1 - C_1^t J_{H_1} \widetilde{Q}_1 C_1 \widetilde{\mathbf{p}}_1, \boldsymbol{\varphi}_1)_{L^2(D)^n} \qquad \forall \boldsymbol{\varphi}_1 \in L^2(D)^n, \tag{15}$$

$$b(\widehat{\mathbf{z}}_1, \varphi_2) = -(l_2 - C_2^t J_{H_2} \widetilde{Q}_2 C_2 \widetilde{p}_2, \varphi_2)_{L^2(D)} \qquad \forall \varphi_2 \in L^2(D), \tag{16}$$

$$(Q_2^{-1}\widehat{z}_2, 1)_{L^2(D)} = 0, \tag{17}$$

$$a(\widetilde{\mathbf{p}}_1, \boldsymbol{\psi}_1) + b(\boldsymbol{\psi}_1, \widetilde{p}_2) = (Q_1^{-1}\widehat{\mathbf{z}}_1, \boldsymbol{\psi}_1)_{L^2(D)^n} \qquad \forall \boldsymbol{\psi}_1 \in H_0^1(D)^n, \tag{18}$$

$$b(\widetilde{\mathbf{p}}_1, \psi_2) = -(Q_2^{-1}\widehat{z}_2, \psi_2)_{L^2(D)} \qquad \forall \psi_2 \in L^2(D), \tag{19}$$

$$(l_2 - C_2^t J_{H_2} \widetilde{Q}_2 C_2 \widetilde{p}_2, 1)_{L^2(D)} = 0. \tag{20}$$

Задача (15)–(20) *однозначно разрешима. Погрешность минимаксного оценивания* $r(\mathbf{v}, p)$ *удовлетворяет неравенству* $r(\mathbf{v}, p) \leqslant \sigma(\widehat{u}_1, \widehat{u}_2, \widehat{c}) = l(\widetilde{\mathbf{p}}_1, \widetilde{p}_2)^{1/2}$.

Используя теорему 1, получаем представление для минимаксной оценки выражения (7), не зависящее от конкретного вида функционала l.

Теорема 2. *Минимаксная оценка выражения* $l(\mathbf{v}, p)$ *имеет вид*

$$\widehat{\widehat{l(\mathbf{v}, p)}} = l(\widehat{\mathbf{v}}, \widehat{p}),$$

где случайные элементы $\widehat{\mathbf{v}}$, $\widehat{\mathbf{p}}_1 \in L^2(\Omega, H_0^1(D)^n)$ *и* $\widehat{p}$, $\widehat{p}_1 \in L^2(\Omega, L^2(D))$ *находятся из решения системы вариационных уравнений:*

$$a(\boldsymbol{\varphi}_1, \widehat{\mathbf{p}}_1(\cdot, \omega)) + b(\boldsymbol{\varphi}_1, \widehat{p}_2(\cdot, \omega)) =$$
$$= (C_1^t J_{H_1} \widetilde{Q}_1 (y_1(\mathbf{v}, \eta_1(\omega)) - C_1 \widehat{\mathbf{v}}(\cdot, \omega)), \boldsymbol{\varphi}_1)_{L^2(D)^n} \qquad \forall \boldsymbol{\varphi}_1 \in H_0^1(D)^n, \tag{21}$$

$$b(\widehat{\mathbf{p}}_1(\cdot, \omega), \varphi_2) = -(C_2^t J_{H_2} \widetilde{Q}_2 (y_2(p, \eta_2(\omega)) - C_2 \widehat{p}(\cdot, \omega)), \varphi_2)_{L^2(D)} \qquad \forall \varphi_2 \in L^2(D), \tag{22}$$

$$(\widehat{Q}_2^{-1} \widehat{p}_2(\cdot, \omega), 1)_{L^2(D)} = 0, \tag{23}$$

$$a(\widehat{\mathbf{v}}(\cdot, \omega), \boldsymbol{\psi}_1) + (\psi_1, \widehat{p}(\cdot, \omega)) = (Q_1^{-1} \widehat{\mathbf{p}}_1(\cdot, \omega) + f_1^{(0)}, \boldsymbol{\psi}_1)_{L^2(D)^n} \quad \forall \boldsymbol{\psi}_1 \in H_0^1(D)^n, \tag{24}$$

$$b(\widehat{\mathbf{v}}(\cdot, \omega), \psi_2) = -(Q_2^{-1} \widehat{p}_2(\cdot, \omega) + f_2^{(0)}, \psi_2)_{L^2(D)} \qquad \forall \psi_2 \in L^2(D), \tag{25}$$

$$(C_2^t J_{H_2} \widetilde{Q}_2 (y_2(p, \eta_2(\omega)) - C_2 \widehat{p}(\cdot, \omega)), 1)_{L^2(D)} = 0, \tag{26}$$

в которых равенства (21)–(26) *выполняются с вероятностью* 1. *Задача* (21)–(26) *имеет единственное решение.*

Следствие 1. *Пара* $(\widehat{\mathbf{v}}, \widehat{p})$ *может быть взята в качестве хорошей оценки неизвестного решения* $(\mathbf{v}, p)$ *задачи* (4), (5).

1. *Brezzi F., Fortin M.* Mixed and hybrid finite element methods. – New York: Springer, 1991. – 350 p.

Киевский национальный университет
им. Тараса Шевченко

Поступило в редакцию 17.07.2006