

3. Підстригач Я. С., Павлина В. С. Дифференциальные уравнения термодинамических процессов в n -компонентном растворе // Физ.-хим. механика материалов. – 1965. – № 4. – С. 383–389.
4. Бурак Я. Й., Чапля Є. Я. Континуальні моделі термомеханіки бінарних систем // Там же. – 1995. – № 4. – С. 7–15.
5. Бурак Я., Чапля Є. Термодинамічні моделі механіки бінарних систем // Мат. пробл. механіки неоднорідних структур. – Львів: Вид. Ін-ту прикл. пробл. мех. і математики, 2000. – Т. 1. – С. 11–15.
6. Бурак Я. Й. Визначальні співвідношення локально-градієнтної термомеханіки // Доп. НАН України. Сер. А. – 1987. – № 12. – С. 19–23.
7. Бурак Я. Й., Нагірний Т. С., Грицина О. Р. Про один підхід до врахування приповерхневої неоднорідності в термомеханіці твердих розчинів // Там же. – 1991. – № 11. – С. 47–51.

Центр математичного моделювання
 Інституту прикладних проблем механіки
 і математики ім. Я. С. Підстригача
 НАН України, Львів

Надійшло до редакції 17.07.2006

УДК 539.3

© 2007

В. І. Гуляєв, П. З. Луговий, І. В. Горбунович

Вільні коливання бурильних колон, що обертаються

(Представлено академіком НАН України В. Д. Кубенком)

The mathematical models are proposed for the simulation of vibrations of rotating deep drill columns. The factors of their prestressing by gravity forces and torques, the gyroscopic interaction of rotary and linear motions, and a destabilizing effect of the internal flow of a washing liquid are taken into consideration. The essential “numerical rigidity” of the constructed equations is found. A technique for their solution in large segments of the column length is elaborated, and a software is created. The phenomena and effects accompanying the processes of drilling in large depths are discussed.

1. Освоєння техніки та технології буріння глибоких нафтових і газових свердловин є однією з найбільш важливих задач сучасного гірського виробництва. Домінуюче положення в цій технології займає роторний спосіб. Підвищення ефективності буріння глибоких свердловин таким способом тісно пов'язано з проблемою виявлення критичних режимів функціонування бурильних колон (БК) і з розробкою заходів для зниження їх негативного впливу на технологічний процес. Такі режими можуть супроводжуватися ефектами біфуркаційного випинання колон і інтенсифікацією їх вібрацій у випадках рівності частот власних коливань колони та кутової швидкості її обертання. При цьому важливим виявляється не тільки встановлення критичних швидкостей обертання колони, але також і визначення форм її згинання, що дозволяє знаходити зони контактної взаємодії труби колони зі стінкою свердловини й обчислювати реакції цих взаємодій.

У той же час виявлення параметрів процесу буріння, при яких реалізуються критичні стани, може бути здійснено методами математичного моделювання, хоча спроби практичного проведення математичних експериментів з моделювання критичних станів БК пов'язані зі значними обчислювальними труднощами. Вони зумовлені особливостями співвідношень

між геометричними параметрами БК і складною комбінацією сил, що діють на неї при бурінні, оскільки за своїми геометричними параметрами бурильна колона еквівалентна струні з відносно малою згинною та крутильною жорсткістю, яку потрібно розраховувати згідно з теорією балок, щоб правильно описати крайові і локальні ефекти її деформування. Тому застосування цієї теорії на довжинах у декілька кілометрів приводить до появи так званої обчислювальної жорсткості, яка супроводжується істотним погіршенням збіжності обчислювальних алгоритмів [1, 2]. Цьому сприяє також одночасна дія на колону поздовжніх сил ваги, крутного моменту, гіроскопічних і відцентрових сил інерції обертального руху, сил в'язкого тертя та гіроскопічних і відносних сил інерції внутрішніх і зовнішніх потоків промивної рідини. Різні аспекти дії цих сил окремо розглянуті в роботах [3, 4].

2. Рівняння коливань бурильної колони, що обертається. Вважатимемо, що бурильна колона довжиною L обертається з кутовою швидкістю ω . Для описання її коливань введемо інерціальну систему координат $OXYZ$ з початком у точці підвісу та зв'язану з колоною й систему координат $Oxyz$ з осями $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, яка обертається разом з нею. Будемо досліджувати коливання колони в системі координат $Oxyz$, що обертається. Нехай пружні переміщення u, v її елементів уздовж осей Ox і Oy малі і тому можна застосовувати лінійну теорію згину балок.

Колівання БК описується рівняннями її руху в площинах xOz і yOz відповідно:

$$\frac{d^2 M_y}{dz^2} = q_x, \quad \frac{d^2 M_x}{dz^2} = q_y. \quad (1)$$

Тут M_x, M_y — внутрішні моменти в розглянутому перерізі балки, що діють відносно осей, які проходять через центр перерізу паралельно осям Ox та Oy ; q_x і q_y — інтенсивності зовнішніх навантажень, спрямованих паралельно відповідним осям. Оскільки балка попередньо напружена зовнішньою поздовжньою силою T і зовнішнім крутним моментом M_z , які спричиняють додаткові згинальні моменти в балці при її деформуванні, для згинальних моментів використовуються формули [1, 3]

$$M_x = EI \frac{d^2 v}{dz^2} - Tv - M_z \frac{du}{dz}, \quad M_y = EI \frac{d^2 u}{dz^2} - Tu + M_z \frac{dv}{dz}, \quad (2)$$

в яких другі доданки в правих частинах визначають додаткові згинальні моменти, що зумовлені ексцентриситетом поздовжньої сили розтягу T , а треті — є проекціями зовнішнього крутного моменту M_z на осі Ox і Oy при викривленні осевої лінії балки.

Для обчислення складових q_x і q_y поперечного розподіленого навантаження на балку необхідно враховувати, що в межах $0 < z < L$ на неї не діють будь-які активні сили, і роль зовнішніх сил відіграють сили інерції, викликані обертанням балки та її пружними коливаннями. Тому вектор \vec{q} цього навантаження знаходиться за допомогою рівності $\vec{q} = -\rho F \vec{a}$, де ρ — щільність матеріалу балки; F — площа її поперечного перерізу; \vec{a} — абсолютне прискорення розглянутого елемента. Визначаючи вектор \vec{q} , враховуємо, що механічна поведінка балки розглядається в системі координат $Oxyz$, яка обертається; у зв'язку з цим рух кожного елемента є складним. У цьому випадку його абсолютне прискорення \vec{a} підраховується за формулою Коріоліса $\vec{a} = \vec{a}^e + \vec{a}^r + \vec{a}^c$, де $\vec{a}^e, \vec{a}^r, \vec{a}^c$ — вектори переносного, відносного і коріолісового прискорення, відповідно [2].

Використовуючи знайдені значення компонент прискорень, одержимо складові вектора сил інерції обертального руху

$$q_x^\omega = -\rho F \left(-\omega^2 u - 2\omega \frac{dv}{dt} + \frac{d^2 u}{dt^2} \right), \quad q_y^\omega = -\rho F \left(-\omega^2 v - 2\omega \frac{du}{dt} + \frac{d^2 v}{dt^2} \right). \quad (3)$$

При русі зі швидкістю V в каналі деформованої труби промивної рідини щільністю ρ_p на БК діють додаткові поперечні сили інерції [3]

$$q_x^p = V^2 \rho_p F_p \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2V \rho_p F_p \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t}, \quad q_y^p = V^2 \rho_p F_p \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 2V \rho_p F_p \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial t}, \quad (4)$$

які також дестабілізують її форму рівноваги.

Після переходу від звичайних похідних до частинних на основі співвідношень (1)–(4) будуються рівняння коливань балки, що обертається з внутрішнім потоком рідини, яка напружена поздовжньою силою T та крутним моментом M_z

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} - \frac{\partial}{\partial z} \left(T \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(M_z \frac{\partial v}{\partial z} \right) - (\rho F + \rho_p F_p) \omega^2 u - 2(\rho F + \rho_p F_p) \omega \frac{\partial v}{\partial t} + \\ + V^2 \rho_p F_p \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2V \rho_p F_p \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t} + \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \\ EI \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} - \frac{\partial}{\partial z} \left(T \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(M_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) - (\rho F + \rho_p F_p) \omega^2 v + 2(\rho F + \rho_p F_p) \omega \frac{\partial u}{\partial t} + \\ + V^2 \rho_p F_p \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 2V \rho_p F_p \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial t} + \rho F \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Рівняння можуть бути використані для дослідження вільних коливань БК і моделювання перехідних режимів розгону і гальмування її обертання. Наявність у них доданків з коефіцієнтами M_z і $(\rho F + \rho_p F_p)$ робить цю систему зв'язаною, що виключає можливість коливань БК за плоскими формами з однією спільною фазою [2].

Розглянемо алгоритм дослідження вільних коливань БК. Нехай на кінцях $z = 0$, $z = L$ колона шарнірно закріплена і реалізуються крайові умови

$$\begin{aligned} u(0) = v(0) = 0, \quad u''_{zz}(0) = v''_{zz}(0) = 0, \\ u(L) = v(L) = 0, \quad u''_{zz}(L) = v''_{zz}(L) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Тоді періодичний розв'язок однорідної системи (5), (6) можна будувати методом відокремлення змінних за допомогою підстановки

$$u(z, t) = U_s(z) \sin(ct) + U_c(z) \cos(ct), \quad v(z, t) = V_s(z) \sin(ct) + V_c(z) \cos(ct), \quad (7)$$

де c — частота вільних коливань.

Підставляючи (7) у (5) та прирівнюючи нулю доданки, що містять $\sin(ct)$ і $\cos(ct)$, отримаємо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} EI \frac{d^4 U_s}{dz^4} - \frac{d}{dz} \left(T \frac{dU_s}{dz} \right) - M_z \frac{d^3 V_s}{dz^3} - \rho F \omega^2 U_s + 2\rho F \omega c V_c - \rho F c^2 U_s = 0, \\ EI \frac{d^4 U_c}{dz^4} - \frac{d}{dz} \left(T \frac{dU_c}{dz} \right) - M_z \frac{d^3 V_c}{dz^3} - \rho F \omega^2 U_c - 2\rho F \omega c V_s - \rho F c^2 U_c = 0, \\ EI \frac{d^4 V_s}{dz^4} - \frac{d}{dz} \left(T \frac{dV_s}{dz} \right) + M_z \frac{d^3 U_s}{dz^3} - \rho F \omega^2 V_s - 2\rho F \omega c U_c - \rho F c^2 V_s = 0, \\ EI \frac{d^4 V_c}{dz^4} - \frac{d}{dz} \left(T \frac{dV_c}{dz} \right) + M_z \frac{d^3 U_c}{dz^3} - \rho F \omega^2 V_c + 2\rho F \omega c U_s - \rho F c^2 V_c = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Системі (8) відповідають граничні умови, які випливають з (6),

$$\begin{aligned}
 U_s(0) &= U_c(0) = V_s(0) = V_c(0) = 0, \\
 U''_{s,zz}(0) &= U''_{c,zz}(0) = V''_{s,zz}(0) = V''_{c,zz}(0) = 0, \\
 U_s(L) &= U_c(L) = V_s(L) = V_c(L) = 0, \\
 U''_{s,zz}(L) &= U''_{c,zz}(L) = V''_{s,zz}(L) = V''_{c,zz}(L) = 0.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Значення c_i , при яких система (8), (9) поряд із тривіальними має нетривіальні розв'язки, є власними. Вони дорівнюють частотам власних коливань БК.

Для обчислення частот c_i при фіксованих значеннях T , M_z , ω , V використовується метод перебору. При його використанні систему (8), (9) записують у векторній формі

$$\frac{d\vec{y}}{dz} = F(z)\vec{y} + c^2 G\vec{y} + cH\vec{y}, \tag{10}$$

$$A\vec{y}(0) = 0, \quad B\vec{y}(L) = 0. \tag{11}$$

Тут $\vec{y}(z)$ — шістнадцятивимірний вектор невідомих, який об'єднує шукані змінні $U_s(z)$, $U_c(z)$, $V_s(z)$, $V_c(z)$ та їх похідні; $F(z)$ — змінна матриця коефіцієнтів розміром 16×16 ; A , B — постійні матриці розміром 8×16 , побудовані з крайових умов (11).

Розв'язки системи (10) будують у формі Коші [1]

$$\vec{y}(z) = Y(z)\vec{C}, \tag{12}$$

де $Y(z)$ — матриця Коші розміром 16×16 розв'язків системи (10) з початковими умовами $Y(0) = E$; E — одинична матриця; $\vec{C} = (c_1, c_2, \dots, c_{16})^T$ — шуканий шістнадцятивимірний вектор невідомих. Його компоненти знаходяться із системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яка будується в результаті підстановки правої частини (12) в ліві частини умов (11). Значення c_i , при яких визначник матриці коефіцієнтів у (11) обертається в нуль, дорівнюють частотам вільних коливань пружної системи. Форми вільних коливань будуються за допомогою рівності (12) підстановкою в її праву частину знайденого вектора \vec{C} . При реалізації такого підходу матриця $Y(z)$ будується шляхом інтегрування системи (8) методом Еверхарта, який є високоточним на великих відрізках інтегрування.

3. Аналіз результатів. З метою перевірки достовірності проведених обчислень розглянуто більш простий випадок, в якому можливий аналітичний розв'язок системи (8). Нехай $M_z = 0$ і $T = \text{const}$. Тоді система (8) розділяється на дві незв'язні підсистеми

$$\left. \begin{aligned}
 EI \frac{d^4 U_s}{dz^4} - T \frac{d^2 U_s}{dz^2} - \rho F \omega^2 U_s + 2\rho F \omega c V_c - \rho F c^2 U_s &= 0, \\
 EI \frac{d^4 V_c}{dz^4} - T \frac{d^2 V_c}{dz^2} - \rho F \omega^2 V_c + 2\rho F \omega c U_s - \rho F c^2 V_c &= 0,
 \end{aligned} \right\} \tag{13}$$

$$\left. \begin{aligned}
 EI \frac{d^4 U_c}{dz^4} - T \frac{d^2 U_c}{dz^2} - \rho F \omega^2 U_c - 2\rho F \omega c V_s - \rho F c^2 U_c &= 0, \\
 EI \frac{d^4 V_s}{dz^4} - T \frac{d^2 V_s}{dz^2} - \rho F \omega^2 V_s - 2\rho F \omega c U_c - \rho F c^2 V_s &= 0.
 \end{aligned} \right\} \tag{14}$$

Підсистема (13) має розв'язки

$$U_s(z) = U_{sn} \sin \frac{n\pi z}{L}, \quad V_c(z) = V_{cn} \sin \frac{n\pi z}{L}. \quad (15)$$

Підставляючи їх у (13), отримаємо однорідну систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} \left[EI \frac{n^4 \pi^4}{L^4} + T \frac{n^2 \pi^2}{L^2} - \rho F (\omega^2 + c^2) \right] U_{sn} + 2\rho F \omega c V_{cn} &= 0, \\ 2\rho F \omega c U_{sn} + \left[EI \frac{n^4 \pi^4}{L^4} + T \frac{n^2 \pi^2}{L^2} - \rho F (\omega^2 + c^2) \right] U_{sn} &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Вона має нетривіальні розв'язки при умові

$$\left(EI \frac{n^4 \pi^4}{L^4} + T \frac{n^2 \pi^2}{L^2} - \rho F \omega^2 - \rho F c^2 \right)^2 - 4\rho^2 F^2 \omega^2 c^2 = 0. \quad (17)$$

Із (17) випливають вирази для частот c_n вільних коливань стержня, що обертається

$$c_{1,2,3,4} = \pm \omega \pm \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{1}{\rho F} \left(EI \frac{n^2 \pi^2}{L^2} + T \right)}. \quad (18)$$

Для тестування методики чисельного дослідження вільних коливань буриньних колон були чисельно знайдені значення частот вільних коливань трубчастих стержнів, що обертаються та розтягнуті постійною силою T . Розглянуто випадок $L = 7000$ м, $d_1 = 0,355$ м, $d_2 = 0,327$ м, $\omega = 4$ с⁻¹, $T = 8 \cdot 10^6$ Н. За допомогою формули (18) знайдені перші частоти $c_{1,1} = 3,88263634$ с⁻¹, $c_{1,2} = 4,11736365$ с⁻¹ для $n = 1$ та $c_{2,1} = 3,76527228$ с⁻¹, $c_{2,2} = 4,23472771$ с⁻¹ для $n = 2$. Ці значення з точністю до восьмого знаку збігаються із значеннями $c_{1,1}$, $c_{1,2}$, $c_{2,1}$ та $c_{2,2}$, які знайдені чисельно згідно з запропонованою методикою.

Далі розв'язувалися задачі, пов'язані з визначенням частот розглянутої БК, яка попередньо напружена крутним моментом M_z та поздовжньою силою $T(z)$, що лінійно змінюється вздовж осі OZ . Своім нижнім кінцем БК впирається у дно свердловини, тому на цей кінець діє стискаюча сила реакції $T(L) = R = -1,6 \cdot 10^5$ Н, на верхній кінець БК діє поздовжня сила розтягу $T(0) = G + R$, де G — сила ваги всієї БК.

Значення трьох нижчих частот c_i ($i = \overline{1,3}$) для різних комбінацій кутової швидкості ω та моменту M_z наведені в табл. 1. Легко помітити, що c_i істотно залежать від ω і M_z , однак чітка закономірність в цих залежностях при обраних параметрах ω та M_z не прослідковується.

На рис. 1 наведені три перші форми вільних коливань БК для випадку $\omega = 4$ с⁻¹, $M_z = 8 \cdot 10^4$ Нм. Вони являють собою спіральні криві, причому в верхній частині БК, яка

Таблиця 1. Значення частот вільних коливань буриньної колони

ω , рад/с M_z ,	Н · м	c_1 , рад/с	c_2 , рад/с	c_3 , рад/с
4	$8 \cdot 10^4$	0,02745	0,03769	0,09251
	$15,8 \cdot 10^4$	0,02153	0,04360	0,06491
10	$8 \cdot 10^4$	0,01678	0,05473	0,08822
	$15,8 \cdot 10^4$	0,03625	0,10799	0,17982

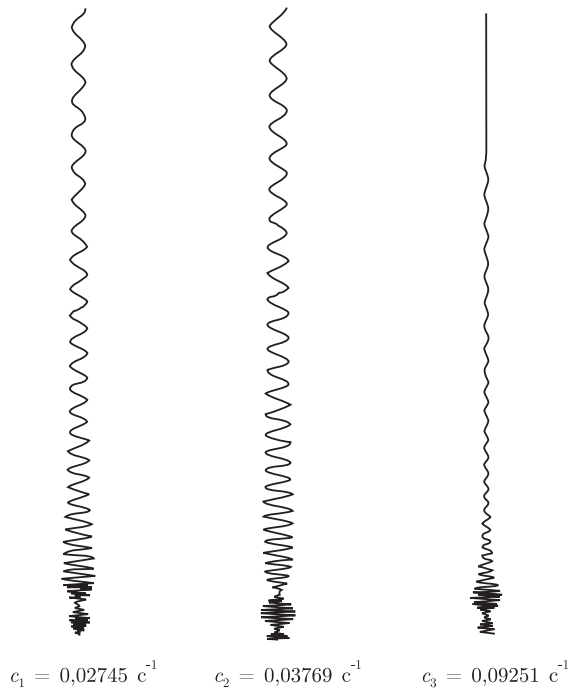


Рис. 1. Форми вільних коливань бурильної колони довжиною 7000 м

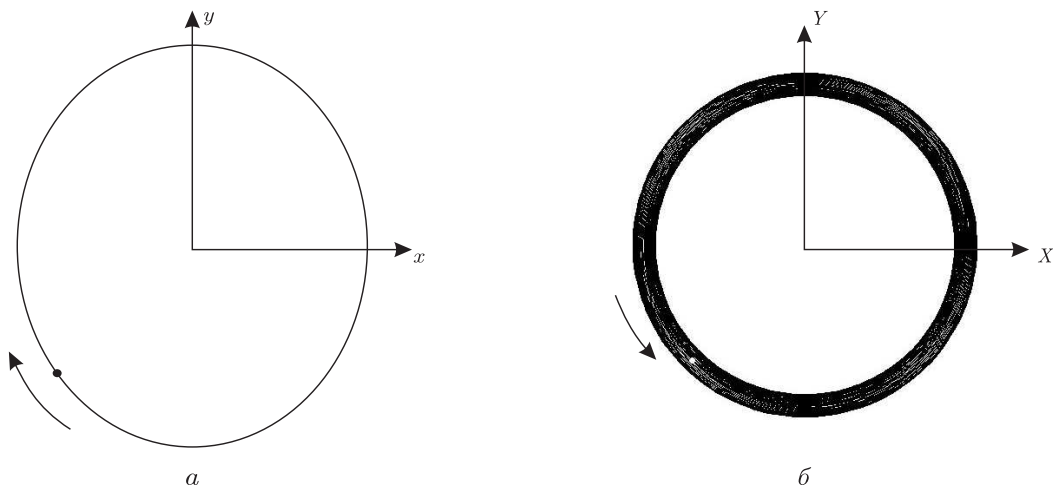


Рис. 2. Траєкторія руху елемента бурильної колони у точці $z = 5691$ м в системі координат, що обертається (а), та в нерухомій (б)

напружена більшою силою $T(z)$, кроки спіралей порівняно великі, в нижній частині вони зменшуються і на спіралях з'являються вузлові точки.

У розглянутому випадку кожна із точок БК здійснює відносний періодичний рух з періодом $T_i = 2\pi/c_i$, рухаючись в системі координат $Oxyz$, що обертається по замкнених еліптичних траєкторіях з різними орієнтаціями півосей. На рис. 2, *a* показана така крива для елемента БК у перерізі $z = 5691$ м. Зафарбованим кружком виділено положення елемента при $t = 0$. В інших перерізах БК елементи рухаються по траєкторіях з іншими співвідношеннями між півосями еліпсів і з іншими початковими положеннями.

У той же час в нерухомій системі координат $OXYZ$ рух елементів не є періодичним. Рис. 2, б ілюструє характер абсолютного руху в тому ж перерізі $z = 5691$ м на відріжку часу $0 \leq t \leq 100$ с. Можна бачити, що траєкторія руху заповнює кільцеву область з найбільшим та найменшим радіусами, що дорівнюють найбільшим та найменшим півосям еліпса.

1. Гуляев В. И., Луговой П. З., Белова М. А., Соловьев И. Л. Устойчивость прямолинейной формы равновесия вращающихся бурильных колонн // Прикл. механика. – 2006. – 42, № 6.
2. Гуляев В. И., Гайдайчук В. В., Соловьев И. Л., Горбунович И. В. Компьютерное моделирование критических состояний колонн глубокого бурения // Тр. междунар. научно-техн. конф. “Вычислительная механика деформируемого твердого тела”. – Москва, 2006. – Т. 1. – С. 122–129.
3. Феодосьев В. И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. – Москва: Наука, 1967. – 237 с.
4. Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций. – Москва: Мир, 1971. – 192 с.

Національний транспортний університет, Київ
Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ

Надійшло до редакції 10.07.2006

УДК 532.528

© 2007

Член-корреспондент НАН України Ю. Н. Савченко, Ю. А. Семенов

Гидродинамическое сопротивление поверхности со смешанными граничными условиями

The boundary layer near a solid wall, at which a sliding condition periodically appears, is considered. The problem is solved numerically using an explicit finite-difference method. The calculations are presented in terms of the velocity profile and the drag coefficient as functions of the Reynolds number and the scale factor of the sliding region. The obtained results show that a drag benefit increases with the scale factor of the sliding region. In order to reduce the drag force by two times, the total area of the sliding region should be no less than 70% of the total area of the wall.

Снижение сопротивления трения, обусловленного прилипанием жидкости к обтекаемой поверхности и касательным напряжением в пограничном слое, остается до настоящего времени фундаментальной проблемой гидродинамики. Существующие методы снижения сопротивления трения можно разделить на две группы: по воздействию на течение в пограничном слое и по воздействию на контакт жидкости с поверхностью. К первой группе относятся методы, способствующие ламинаризации пограничного слоя и снижению уровня турбулентности, в частности, путем отсоса пограничного слоя, вдува микропузырьков газа, использование полимерных добавок, поверхностно активных веществ, упруго-деформируемых покрытий [1–3].

Ко второй группе относятся методы, обеспечивающие снижение сопротивления трения за счет изменения свойств контакта жидкость — твердая поверхность. Это достигается путем применениядвигающихся вдоль потока поверхностей, гидрофобных покрытий, а также с помощью воздушного либо парового зазора между потоком жидкости и обтекаемой