

Академик НАН Украины В. П. Шевченко, А. С. Гольцев,
Т. О. Филимонова

Использование итерационной теории изгиба ортотропных пластин при сосредоточенных температурных воздействиях

The temperature moments caused by a concentrated “bending” heat source are determined on the base of the iterative theory for orthotropic plates. The solution is obtained by means of a two-dimensional integral Fourier transformation using the special G-function. The numerical investigations are devoted to estimating the correction introduced by the iterative theory for thin orthotropic plates in comparison with the classical theory.

Работа посвящена использованию одной из уточненных теорий анизотропных пластин, учитывающих конечную сдвиговую жесткость [1]. Она применяется для расчета термоупругого состояния, вызванного действием сосредоточенного “изгибного” источника тепла.

1. Рассмотрим тонкую ортотропную пластину толщиной $2h$, находящуюся в условиях теплового контакта с внешней средой нулевой температуры. Условия теплообмена на лицевых поверхностях пластины одинаковы. Пластина находится под действием источников и стоков тепла объемной плотности W_0 , закон распределения которых по толщине описывается нечетной функцией. Это приводит к возникновению “изгибных” источников тепла. В рассматриваемых условиях теплообмена воздействие этих источников вызывает лишь состояние термоупругого изгиба [2].

Для записи исходных уравнений используем безразмерную систему координат x_i ($i = \overline{1, 3}$), значения которых определим в отношении к полутолщине оболочки h . Оси координат совместим с главными осями ортотропии. Тогда уравнение теплопроводности, учитывающее линейное распределение температуры по толщине пластины и конвективный теплообмен с внешней средой по закону Ньютона, имеет вид [3–5]

$$\left(\lambda_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) T_2(x_1, x_2) - 3(1 + \text{Bi}) T_2(x_1, x_2) = -3W_2(x_1, x_2);$$

$$\lambda_1 = \frac{\lambda_{11}}{\lambda_{33}}, \quad \lambda_2 = \frac{\lambda_{22}}{\lambda_{33}}, \quad (1)$$

$$W_2(x_1, x_2) = \frac{1}{2\lambda_{33}} \int_{-1}^1 x_3 W_0(x_1, x_2, x_3) dx_3,$$

где T_2 — температурный момент; λ_{11} , λ_{22} , λ_{33} — главные коэффициенты теплопроводности; Bi — критерий Био на лицевых поверхностях; W_2 — плотность распределения “изгибных” источников тепла.

Уравнения термоупругости получим с помощью методики вывода уравнений равновесия в перемещениях, учитывая гипотезы итерационной теории изгиба ортотропных пластин [1].

В принятой безразмерной системе координат прогиб пластины W должен удовлетворять следующему уравнению:

$$D_1 \frac{\partial^4 W}{\partial x_1^4} + D_3 \frac{\partial^4 W}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + D_2 \frac{\partial^4 W}{\partial x_2^4} = -\beta_1^0 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x_1^2} - \beta_2^0 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x_2^2} - \frac{3}{5} \left\{ \frac{1}{G_1} \left[D_1^2 \frac{\partial^6 W_c}{\partial x_1^6} + \right. \right. \\ \left. \left. + D_1 D_3 \frac{\partial^6 W_c}{\partial x_1^4 \partial x_2^2} + \frac{1}{4} D_3^2 \frac{\partial^6 W_c}{\partial x_1^2 \partial x_2^4} \right] + \frac{1}{G_2} \left[D_2^2 \frac{\partial^6 W_c}{\partial x_2^6} + D_2 D_3 \frac{\partial^6 W_c}{\partial x_2^4 \partial x_1^2} + \frac{1}{4} D_3^2 \frac{\partial^6 W_c}{\partial x_2^2 \partial x_1^4} \right] \right\}; \quad (2)$$

$$D_1 = \kappa D, \quad D_2 = \kappa^{-1} D, \quad D_3 = 2(\nu_2 D_1 + 4G/3), \quad \beta_i^0 = \chi_i D_i \quad (i = 1, 2),$$

$$\chi_1 = \alpha_1 + \nu_2 \alpha_2, \quad \chi_2 = \nu_1 \alpha_1 + \alpha_2, \quad G = \frac{G_{12}}{E}, \quad G_1 = \frac{G_{13}}{E}, \quad G_2 = \frac{G_{23}}{E},$$

$$D = \frac{2}{[3(1 - \nu_1 \nu_2)]}, \quad E = \sqrt{E_1 E_2}, \quad \kappa = \sqrt{\frac{E_1}{E_2}}.$$

Здесь W_c — прогиб пластины по классической теории ортотропных пластин, который является решением уравнения (2) без члена, содержащего фигурные скобки и определяющего добавку, вносимую итерационной теорией; E_1, E_2 — модули Юнга для главных направлений; G_{12}, G_{13}, G_{23} — модули сдвига; ν_1, ν_2 и α_1, α_2 — коэффициенты Пуассона и температурные коэффициенты линейного расширения для главных направлений.

Методика вывода внутренних силовых факторов в соответствии с итерационной теорией ортотропных пластин [1] позволяет записать формулы для изгибающих (M_1, M_2) и крутящего (H) моментов в таком виде:

$$M_1 = -D_1 \left[\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} + \nu_2 \frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} \right] - \beta_1^0 T_2 - \\ - \frac{3}{5} D_1 \left\{ \frac{D_1}{G_1} \frac{\partial^4 W_c}{\partial x_1^4} + \frac{D_3}{2} \left(\frac{1}{G_1} + \frac{\nu_2}{G_2} \right) \frac{\partial^4 W_c}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \nu_2 \frac{D_2}{G_2} \frac{\partial^4 W_c}{\partial x_2^4} \right\}; \\ M_2 = -D_2 \left[\nu_1 \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} \right] - \beta_2^0 T_2 - \\ - \frac{3}{5} D_2 \left\{ \nu_1 \frac{D_1}{G_1} \frac{\partial^4 W_c}{\partial x_1^4} + \frac{D_3}{2} \left(\frac{\nu_1}{G_1} + \frac{1}{G_2} \right) \frac{\partial^4 W_c}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{D_2}{G_2} \frac{\partial^4 W_c}{\partial x_2^4} \right\}; \\ H = -\frac{4}{3} G \frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{1}{5} G \left\{ \left(\frac{2D_1}{G_1} + \frac{D_3}{G_2} \right) \frac{\partial^4 W_c}{\partial x_1^3 \partial x_2} + \left(\frac{D_3}{G_1} + \frac{2D_2}{G_2} \right) \frac{\partial^4 W_c}{\partial x_1 \partial x_2^3} \right\}. \quad (3)$$

Значения моментов определены в отношении к параметру Eh^2 . Члены, содержащие фигурные скобки, описывают добавку, вносимую итерационной теорией.

Сосредоточенные воздействия моделируются с помощью дельта-функции Дирака (δ). Применительно к сосредоточенным “изгибным” источникам тепла имеем

$$W_2(x_1, x_2) = W_2^* \delta(x_1, x_2), \quad (4)$$

где W_2^* — интенсивность “изгибного” источника тепла. Необходимо отметить, что решение задач о сосредоточенных воздействиях на тонкостенные элементы конструкций заключается в нахождении решений типа пограничного слоя, охватывающего некоторую небольшую

окрестность области вблизи места приложения этого воздействия. При этом рассматриваемый элемент считают “бесконечным” и не учитывают граничные условия на его краях [2].

2. Решение рассматриваемой задачи в классической постановке приведено в [4]. Оно получено методом двумерного интегрального преобразования Фурье. Температурные моменты найдены путем решения задачи в пространстве трансформант с последующим обращением.

Использовать аналогичную методику в случае итерационной теории не удастся. Вследствие наличия в исходных соотношениях (2), (3) производных более высокого порядка, определяющих добавку итерационной теории, решение для температурных моментов в пространстве трансформант имеет более сложную структуру. Это приводит к непреодолимым проблемам на этапе обращения, которые связаны с повышением порядка особенности искомым функций. Используемая методика обращения позволяет построить лишь фундаментальное решение уравнений (1), (2) с правой частью (4) и найти выражение для термоупругого прогиба. В полярной системе координат r, φ оно имеет следующую структуру [6]:

$$W(r, \varphi) = C_0 \left\{ A_0 \ln \frac{\gamma r}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{A_n}{n} \cos 2n\varphi + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos 2n\varphi \times \right. \\ \left. \times \int_0^{\pi/2} K(\theta) G_{n,n}(c(\theta)r) \cos 2n\theta d\theta \right\}; \quad (5)$$

$$C_0 = \frac{3W_2^*}{\pi^2}, \quad K(\theta) = K_c(\theta) + K_i(\theta), \quad A_n = \int_0^{\pi/2} K_c(\theta) \cos 2n\theta d\theta.$$

Здесь $\ln \gamma$ — постоянная Эйлера; ε_n — числовые константы; $K_c(\theta)$, $K_i(\theta)$, $c(\theta)$ — рациональные выражения от тригонометрических полиномов по $\sin \theta$ и $\cos \theta$, коэффициентами которых являются термомеханические параметры; $G_{n,n}(z)$ — специальная G -функция, введенная в [7]. Функция $K_i(\theta)$ в подынтегральном выражении решения (5) определяет поправку итерационной теории.

Решение для термоупругого прогиба в численно-аналитической форме (5) и развитый аппарат специальной G -функции [7] позволяют найти выражения для температурных моментов путем аналитического дифференцирования. При этом необходимо выразить производные в декартовой системе координат x_1, x_2 через производные в полярной системе координат r, φ по известным правилам.

Производные в полярной системе координат находим путем дифференцирования решения (5). Частные производные по координате r запишем

$$\frac{\partial^m W_{(c)}}{\partial r^m} = \frac{C_0}{r^m} \left[C_m + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos 2n\varphi \int_0^{\pi/2} K_{(c)}(\theta) G_{n,n}^{(m)}(c(\theta)r) \cos 2n\theta d\theta \right] \quad (m = \overline{1, 4});$$

$$C_1 = -C_2 = \frac{C_3}{2} = -\frac{C_4}{6} = A_0, \quad G_{n,n}^{(1)}(z) = 2nG_{n,n}(z) - 2G_{n,n+1}(z),$$

$$G_{n,n}^{(2)}(z) = 2n(2n-1)G_{n,n}(z) - 2(4n+1)G_{n,n+1}(z) + 4G_{n,n+2}(z),$$

$$G_{n,n}^{(3)}(z) = 4n(2n^2-3n+1)G_{n,n}(z) - 24n^2G_{n,n+1}(z) + 12(2n+1)G_{n,n+2}(z) - 8G_{n,n+3}(z),$$

$$G_{n,n}^{(4)}(z) = 4n(4n^3 - 12n^2 + 11n - 3)G_{n,n}(z) - 8n(8n^2 - 6n + 1)G_{n,n+1}(z) + \\ + 12(8n^2 + 4n + 1)G_{n,n+2}(z) - 16(4n + 3)G_{n,n+3}(z) + 16G_{n,n+4}(z),$$

где индекс s берется для производных от решения по классической теории.

Частные производные по координате φ имеют следующую структуру:

$$\frac{\partial^k W_{(c)}}{\partial \varphi^k} = B_k \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} A_n n^{k-1} \begin{Bmatrix} \sin 2n\varphi \\ \cos 2n\varphi \end{Bmatrix} + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n n^k \begin{Bmatrix} \sin 2n\varphi \\ \cos 2n\varphi \end{Bmatrix} \times \right. \\ \left. \times \int_0^{\pi/2} K_{(c)}(\theta) G_{n,n}(c(\theta)r) \cos 2n\theta d\theta \right] \quad (k = \overline{1,4});$$

$$\frac{B_1}{-2} = \frac{B_2}{-4} = \frac{B_3}{8} = \frac{B_4}{16} = C_0.$$

Здесь верхнее значение в фигурных скобках берется для нечетных k , а нижнее — для четных k .

Необходимые смешанные производные определяются по формуле

$$\frac{\partial^{m+k} W_{(c)}}{\partial r^m \partial \varphi^k} = \frac{D_{mk}}{r^m} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n n^k \begin{Bmatrix} \sin 2n\varphi \\ \cos 2n\varphi \end{Bmatrix} \int_0^{\pi/2} K_{(c)}(\theta) G_{n,n}^{(m)}(c(\theta)r) \cos 2n\theta d\theta$$

$$(m, k = \overline{1,3}; m + k \leq 4); \quad D_{11} = D_{21} = D_{31} = \frac{D_{12}}{2} = \frac{D_{22}}{2} = \frac{D_{13}}{-4} = -2C_0,$$

где значение в фигурных скобках берется по аналогии с предыдущей формулой.

В представленных формулах для производных вместе с коэффициентами Фурье находятся возрастающие сомножители n^{k-1} и n^k ($k \leq 4$). Для коэффициентов Фурье, не содержащих специальную G -функцию (A_n), аналитически доказано, что они стремятся к нулю быстрее, чем $1/n^4$. Для коэффициентов Фурье, которые содержат специальную G -функцию, аналитически доказать такую же сходимость не удалось. Однако численный анализ показывает, что частичные суммы этих рядов быстро стабилизируются ($n \leq 7$) и являются постоянными при учете достаточно большого количества членов этих рядов ($n \leq 30$). При проведении практических расчетов достаточно ограничиться десятью членами каждого ряда.

Асимптотическое поведение температурных моментов определяется с помощью свойств специальной функции $G_{n,n}(z)$ при $|z| \rightarrow 0$ [7]. С учетом этих свойств получены следующие формулы:

$$M_i \approx C_i r^{-4} \quad (i = 1, 2); \quad H \approx C_3 r^{-4}. \quad (6)$$

Здесь C_i ($i = \overline{1,3}$) — коэффициенты, не зависящие от полярной координаты r . Формулы (6) существенно отличаются от аналогичных зависимостей классической теории, в соответствии с которой поведение изгибающих моментов в окрестности особой точки описывается функцией $\ln r$, а крутящий момент ограничен [4, 5]. Это отличие объясняется наличием производных более высокого порядка в исходных соотношениях итерационной теории.

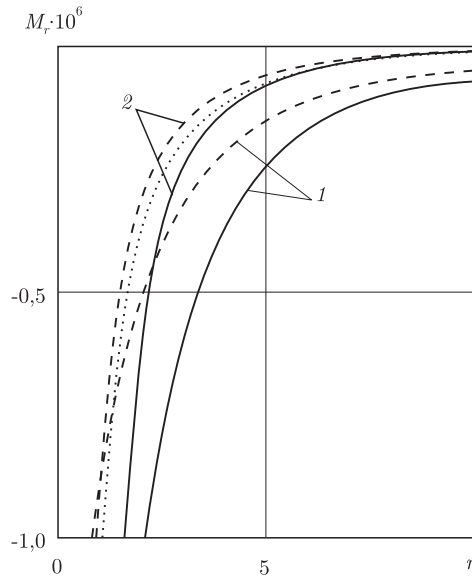


Рис. 1

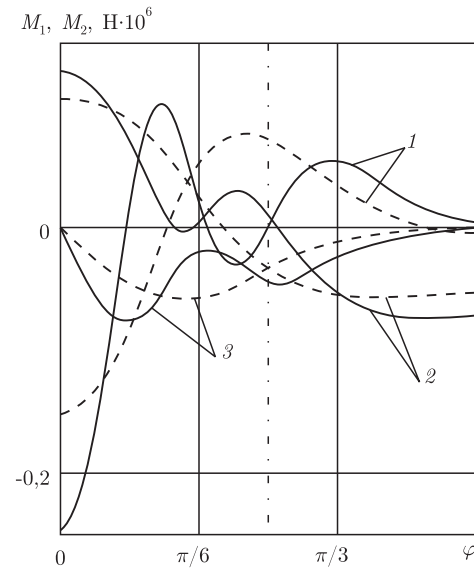


Рис. 2

Рассматриваемая итерационная теория изгиба ортотропных пластин не дает эффекта уточнения при ее использовании для изотропных материалов. В этом случае при расчете внутренних силовых факторов добавки итерационной теории для прогиба из уравнения (2) и для моментов из формул (3) дают одну и ту же величину, но с противоположными знаками. Это доказано аналитически и подтверждено численно. Поэтому для изотропных материалов значения температурных моментов по итерационной и классической теориям совпадают.

3. Полученное решение использовано для оценки величины поправки, вносимой итерационной теорией. Численные исследования проведены для пластины, изготовленной из стеклопластика косоугольной намотки, обладающего сильной анизотропией [8]. Его термомеханические параметры имеют следующие значения: $E_1 = 3673$ МПа; $E_2 = 980,7$ МПа; $G_{12} = 392,3$ МПа; $\nu_1 = 0,2798$; $\alpha_1 = 0,7 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$; $\alpha_2 = 3,8 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$; $\lambda_{11}/\lambda_{22} = 2,306$. Считалось, что $\lambda_{33} = \lambda_{22}$. Недостающие значения модулей сдвига G_{13} и G_{23} взяты таким образом, что они соотносятся с модулем сдвига G_{12} так же, как аналогичные величины для ортотропного стеклопластика СВМ (1 : 5) [1], т.е. $G_{13} = 240,2$ МПа; $G_{23} = 160,1$ МПа. Рассматривался случай сильной термоизоляции ($Bi = 0,001$) при действии “изгибного” источника тепла единичной интенсивности ($W_2^* = 1 \text{ K}$).

Результаты численных исследований, представленные на рис. 1, 2, характеризуют поведение температурных моментов в ближайшей окрестности сосредоточенного “изгибного” источника тепла. Значения моментов даны в тех же единицах, что и в формулах (3). Сплошными линиями показаны графики для моментов, посчитанных по итерационной теории, штриховыми — по классической теории. Пунктирная линия соответствует графику для изотропного материала ($E = \sqrt{E_1 E_2}$; $\nu = \sqrt{\nu_1 \nu_2}$; $\alpha = \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}$).

На рис. 1 представлены графики изменения радиального момента M_r (M_1 по оси x_1 или M_2 по оси x_2) от радиальной координаты r . Цифрами 1 и 2 обозначены кривые для точек на оси x_1 ($\varphi = 0$) и x_2 ($\varphi = \pi/2$). На рис. 2 показаны графики изменения температурных моментов от угловой координаты φ при $r = 5$. Кривые 1, 2 и 3 соответствуют

графикам изгибающих моментов M_1 , M_2 и крутящего момента H . Штрихпунктирная прямая — координатная линия $\varphi = \pi/4$, которая является осью симметрии для аналогичных графиков в случае изотропного материала [4].

Представленные графики демонстрируют существенное отличие значений температурных моментов в ближайшей окрестности точки сосредоточенного температурного воздействия. Уточнение итерационной теории можно не учитывать лишь на расстоянии $r \geq 10$ на оси с большим значением модуля Юнга и на расстоянии $r \geq 5$ на оси с меньшим значением модуля Юнга, когда абсолютные значения радиальных моментов близки к нулю. Абсолютные величины радиальных моментов по итерационной теории больше абсолютных значений по классической теории для всех точек главных осей ортотропии. Закономерности изменения внутренних силовых факторов в зависимости от угловой координаты φ по итерационной и классической теориям одинаковы. Однако поведение температурных моментов, согласно итерационной теории, носит более сложный “осциллирующий” характер. Направления, в которых расхождения в значениях температурных моментов достигают максимума, находятся ближе к оси с большим значением модуля Юнга, т. е. в диапазоне $0 \leq \varphi \leq \pi/4$.

Таким образом, обобщая полученные результаты, можно заключить, что итерационная теория, учитывающая конечную сдвиговую жесткость, вносит существенное уточнение в значения температурных моментов для ортотропных пластин, находящихся в условиях термоупругого изгиба.

1. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. — Москва: Наука, 1987. — 360 с.
2. Шевченко В. П. Методы фундаментальных решений в теории ортотропных оболочек // Концентрация напряжений / Под ред. А. Н. Гузя, А. С. Космодамианского, В. П. Шевченко — Киев: А. С. К., 1998. — 387 с. (Механика композитов: В 12 т. Т. 7). — С. 159–196.
3. Подстригач Я. С., Швец Р. Н. Термоупругость тонких оболочек. — Киев: Наук. думка, 1978. — 344 с.
4. Гольцев А. С. Фундаментальное решение уравнений термоупругого изгиба тонких ортотропных пластин // Теорет. и прикл. механика. — 1998. — Вып. 28. — С. 87–92.
5. Гольцев А. С. Термоупругое состояние ортотропных пластин под действием сосредоточенных источников тепла при произвольном теплообмене // Вісн. Донецьк. ун-ту. Сер. А. Природничі науки. — 2000. — Вип. 1. — С. 36–40.
6. Гольцев А. С., Филлимонова Т. О. Фундаментальное решение уравнений термоупругого изгиба ортотропных пластин по итерационной теории // Там же. — 2005. — Вип. 1. — С. 115–118.
7. Хижняк В. К., Шевченко В. П. Смешанные задачи теории пластин и оболочек: Уч. пособие. — Донецк: Изд. Донецк. гос. ун-та, 1980. — 128 с.
8. Космодамианский А. С., Калоеров С. А. Температурные напряжения в многосвязных пластинках. — Киев; Донецк: Вища шк., 1983. — 160 с.

Донецкий национальный университет

Поступило в редакцию 11.07.2006