Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

3 • 2007

ЕНЕРГЕТИКА

УДК 621.318.3.001.2

Член-корреспондент НАН Украины **А. Е. Божко**

Распространение гипотезы о переходных процессах в электроцепях на полигармонические входные воздействия

The hypothesis about the transient processes in electric circuits with polyharmonic input voltages is developed. The electric current in an RL circuit is calculated.

В работах [1–3] представлена концепция о переходных процессах в электроцепях, базирующаяся на разложении переднего фронта единичной функции $1(t)$ на ряд составляющих, включающий для синусоидального входного напряжения $U_{\text{вх}} = U_a \sin(\omega t \pm \varphi)$, где U_a — амплитуда; ω — круговая частота ($\omega = 2\pi f$, f — частота); φ — угол сдвига; t — время, слагаемые $(U_0 = \pm U_a e^{-\alpha_0 t} \sin\varphi)$, $(U_1 = U_a(1 - e^{-\alpha_1 t})\sin(\omega t \pm \varphi))$, $\Bigl(U_2 = \sum\limits_{k=1}^{n} U_{ak} e^{-\alpha_k t} \sin\omega_k t\Bigr)$, $U_{ak} = \dfrac{U_a \sin\varphi}{\pi}\left|\dfrac{1}{\omega_k}\right|$.

В выражениях этих составляющих α_0, α_1, α_k — коэффициенты затухания; U_{ak}, ω_k — амплитуда и круговая частота k-й гармоники, $k = \overline{1,n}$. В этих же работах [1–3] даны решения задач о переходных процессах для электроцепей с RL и RC элементами. Следует заметить, что конечные выражения, описывающие изменения тока в цепи с RL элементами и напряжения в цепи с RC элементами при коэффициентах α_0, α_1, α_k, равных ∞, полностью совпадают с результатами, определяемыми классическими методами [4]. Известно [5], что единичная функция $1(t)$ может быть представлена односторонним Фурье-разложением вида

$$1(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\sin\omega t}{\omega} d\omega. \qquad (1)$$

С практической точки зрения выражение (1) записывается так:

$$1(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \frac{[\sin\omega_k t]}{\omega_k}, \qquad n \to \infty,$$

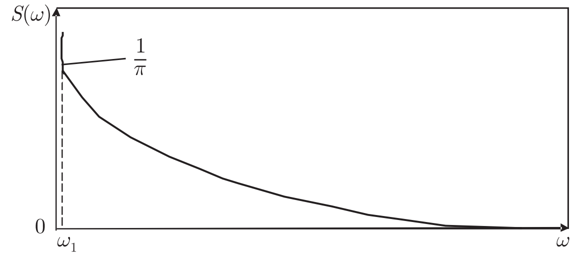

Рис. 1

откуда четко видно, что единичная функция $1(t)$ включает в себя постоянную составляющую и совокупность (n) гармоник с уменьшающимися амплитудами по закону $1/(\pi\omega_k)$, $k = \overline{1,n}$. Спектр этой функции показан на рис. 1, из которого видно, что при низких частотах амплитуды $1/(\pi\omega_k)$ значительно больше, чем при больших ω_k. Так, например, если $\omega_1 = 0{,}01$, то уже при $\omega_k = 1$ амплитуда k-й гармоники уменьшилась в 100 раз.

Из такого примера ясно, что существенные по амплитуде гармоники единичной функции $1(t)$ расположены в основном в низкочастотном диапазоне. В результате экспериментальной проверки с помощью Брюль–Къеровского анализатора спектра сигналов спектра функции $E \cdot 1(t)$, где E — const, факт такого спектрального разложения подтвердился. Однако в результате эксперимента обнаружено отличие, заключающееся в том, что гармоники $\sin\omega_k t$, $k = \overline{1,n}$, присутствовали непродолжительное время, т. е. затухали, хотя анализатор постоянную составляющую пропускал. И это привело к выводу, что функция $E \cdot 1(t)$ может быть представлена в другом виде:

$$E \cdot 1(t) = E(1 - e^{-\alpha t}) + \sum_{k=1}^{m} U_{ak} e^{-\alpha_k t} \sin\omega_k t \tag{2}$$

при $t = 0 \div \infty$ и где $U_{ak} = (E/\pi)(|1/\omega_k|)$.

Выражение (2) сравним с выражением [5]

$$E \cdot 1(t) = \begin{cases} E & \text{при} \quad t > 0, \\ 0 & \text{при} \quad t \leqslant 0. \end{cases} \tag{3}$$

Из (2)

$$E \cdot 1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t \leqslant 0, \\ E & \text{при} \quad t > 0, \end{cases}$$

т. е. (2) совпадает с (3).

В выражении (2) α и α_k — коэффициенты затухания. Если $\alpha = \alpha_k = \infty$, то (2) становится также (3). Если же

$$E \cdot 1(t) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad t \geqslant 0, \\ 0 & \text{при} \quad t < 0, \end{cases}$$

то $E \cdot 1(t)$ может быть представлена в виде

$$E \cdot 1(t) = E(1 - e^{-\alpha t}) + \sum_{k=1}^{n} U_{ak} e^{-\alpha_k t} \cos\omega_k t,$$

где $U_{ak} = (E/\pi)(|1/\omega_k|)$, $\sum\limits_{k=1}^{n} U_{ak} = E$.

Исходя из такого сравнения, мы разработали гипотезу исследования переходных процессов электроцепей с учетом разложения скачков входных напряжений на составляющие вида (2) [2, 3]. Для синусоидальных входных напряжений такое разложение приемлемо при $\varphi \neq 0$ на составляющие U_0, U_1, U_2 [3].

В связи с представленной гипотезой целесообразно рассмотреть переходные процессы в электроцепях и при полигармонических входных напряжениях. Подтверждением этому является то, что импульсные входные сигналы (реально существующие) могут быть разложены в гармонический ряд [4, 5], являющийся полигармоническим. Дополнением к такой целесообразности данного исследования является необходимость в воспроизведении полигармонических вибраций электродинамическими или электромагнитными вибростендами, входные электроцепи которых представляют собой в основном RL звенья, а управляющие сигналы в этом случае являются полигармоническими [6, 7].

Здесь рассмотрим электроцепь с RL элементами. Примем, что входное напряжение этой электроцепи имеет вид

$$U_{\text{вх}} = \sum_{l=1}^{n} U_l = \sum_{l=1}^{n} U_{al} \sin(\omega_l t \pm \varphi_l), \tag{4}$$

где U_{al}, ω_l, φ_l — амплитуда, круговая частота и угол сдвига l-й гармоники соответственно. При решении задачи о переходных процессах учтем, что RL цепь является линейной. Поэтому в этом решении справедлив принцип суперпозиции, т. е. общий отклик на воздействие в виде (4) определяется как сумма n откликов на воздействия

$$U_{al} \sin(\omega_l t \pm \varphi_l), \qquad l = \overline{1,n}. \tag{5}$$

При $|\varphi_l| > 0$ функция (5) в соответствии с представляемой гипотезой разлагается на составляющие

$$\left.\begin{aligned} &U_{0l}(t) = \pm U_{al} e^{-\alpha_{0l} t} \sin\varphi_l; \\ &U_{1l}(t) = U_{al}(1 - e^{-\alpha_{1l} t}) \sin(\omega_l t \pm \varphi_l); \\ &U_{2l} = \sum_{s=1}^{m} U_{als} e^{-\alpha_{ls} t} \sin\omega_{ls} t, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

где α_{0l}, α_{1l}, α_{ls} — коэффициенты затухания; U_{als}, ω_{ls} — амплитуды и круговые частоты гармоник разложения $U_l(t)$ $\left(U_{als} = \dfrac{U_{al}\sin\varphi_l}{\pi}\left|\dfrac{1}{\omega_{ls}}\right|\right)$.

Если же угол $\varphi_l = 0$, то такое разложение (6) отсутствует и отклик (реакция) электроцепи происходит от действия каждого напряжения $U_l(t) = U_{al}\sin\omega_l t$, $l = \overline{1,n}$.

Решить задачу можно с помощью классического или операционного метода [5, 8]. Но в работе [8] приведено решение задач о переходном процессе в цепи RL при входных напряжениях $U_c = U_m e^{-\alpha t}$ (с. 45), $U_b = U_m \sin(\omega t + \Psi)$ (с. 38), $U_d = U_m e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \Psi)$ (с. 49).

В нашем случае из (6) $U_{0l}(t)$ соответствует U_c, $U_{1l}(t) = U_{1l_1} - U_{1l_2} = U_{al}\sin(\omega_l t \pm \varphi_l) - U_{al} e^{-\alpha_{1l} t} \sin(\omega_l t \pm \varphi_l)$ соответствует $U_b + U_d$ и $U_{ls}(t)$ соответствует U_d при $\Psi = 0$. Поэтому воспользуемся готовыми решениями из [8] для RL цепи. Тогда

$$i_{0l}(t) = \frac{U_{al}\sin\varphi_l}{R - L\alpha_{0l}}(e^{-\alpha_{0l} t} - e^{-\delta t}), \tag{7}$$

где δ — коэффициент затухания ($\delta = R/L$), $i_{1b}(t) = i_{1l_1}(t) - i_{1l_2}(t)$ и

$$i_{1l_1} = I_{1l_1}[\sin(\omega_l t + \Psi_l) - e^{-\delta t}\sin\Psi_l], \tag{8}$$

где $I_{1l_1} = U_{al}/\sqrt{R^2 + \omega_l^2 L^2}$; $\Psi_l = \pm\varphi_l - \Psi_{Ll}$; $\Psi_{Ll} = \operatorname{arctg}(\omega_l L/R)$;

$$i_{1l_2} = \frac{U_{al}}{(R - \alpha_l L)^2 + \omega_l^2 L^2}\{[(\alpha_l L - R)(\pm\sin\varphi_l) + \omega_l L\cos\varphi_l]e^{-\delta t} + \\ + e^{-\alpha_l t}[(R - \alpha_l L)\sin(\omega_l t \pm \varphi_l) - \omega_l L\cos(\omega_l t \pm \varphi_l)]\}, \tag{9}$$

$$i_{ls} = \frac{U_{als}}{(R - \alpha_{ls} L)^2 + \omega_{ls}^2 L^2}\{(\alpha_{ls} L - R)\omega_{ls} L e^{-\delta t} + \\ + e^{-\alpha_{ls} t}[(R - \alpha_{ls} L)\sin\omega_{ls} t - \omega_{ls} L\cos\omega_{ls} t]\}. \tag{10}$$

Ток $i_{Ll}(t)$ в цепи RL равен

$$i_{Ll}(t) = i_{ol}(t) + i_{1l_1}(t) - i_{1l_2}(t) + \sum_{s=1}^{m} i_{ls}(t), \qquad l = \overline{1, n},$$

или, с учетом выражений (7)–(10),

$$i_{Ll}(t) = \frac{U_{al}\sin\varphi_l}{R - L\alpha_{0l}}(e^{-\alpha_0 t} - e^{-\delta t}) + \frac{U_{al}}{\sqrt{R^2 + \omega_l^2 L^2}}[\sin(\omega_l t + \Psi_l) - (\sin\Psi_l)e^{-\delta t}] - \\ - \frac{U_{al}}{(R - \alpha_l L)^2 + \omega_l^2 L^2}\{[(\alpha_l L - R)(\pm\sin\varphi_l) + \omega_l L\cos\varphi_l]e^{-\delta t} + \\ + e^{-\alpha_l t}[(R - \alpha_l L)\sin(\omega_l t \pm \varphi_l) - \omega_l L\cos(\omega_l t \pm \varphi_l)]\} + \sum_{s=1}^{m}\frac{U_{als}}{(R - \alpha_{ls} L)^2 + \omega_{ls}^2 L^2} \times \\ \times \{(\alpha_{ls} L - R)\omega_{ls} L e^{-\delta t} + + e^{-\alpha_{ls} t}[(R - \alpha_{ls} L)\sin\omega_{ls} t - \omega_{ls} L\cos\omega_{ls} t]\}. \tag{11}$$

Проверим полученное соотношение (11) следующим образом. При $t = 0$, $i_{Ll}(0) = 0$; при $t = \infty$

$$i_{Ll}(\infty) = \frac{U_{al}}{\sqrt{R^2 + \omega_l^2 L^2}}\sin(\omega_l t + \Psi_l). \tag{12}$$

Далее при $\alpha_{0l} = \alpha_l = \alpha_{ls} = \infty$

$$i_{Ll}(t) = \frac{U_{al}}{\sqrt{R^2 + (\omega_l^L)^2}}[\sin(\omega_l t + \Psi_l) - e^{-\delta t}\sin\Psi_l]. \tag{13}$$

Данная проверка подтверждает правильность приведенных решений, т. е. выражения (12), (13) полностью идентичны классическим результатам.

В итоге общий ток $i_{L\Sigma}(t)$ в RL цепи при полигармоническом входном напряжении

$$U_{\text{вх}}(t) = \sum_{l=1}^{n} U_{al}\sin(\omega_l t \pm \varphi_l)$$

определяется выражением

$$i_{L\Sigma}(t)=\sum_{l=1}^{n}i_{Ll}(t)=\sum_{l=1}^{n}\Big\langle\frac{U_{al}\sin\varphi_l}{R-L\alpha_{0l}}(e^{-\alpha_{0l}t}-e^{-\delta t})+$$

$$+\frac{U_{al}}{\sqrt{R^2+\omega_l^2L^2}}[\sin(\omega_lt+\varphi_l)-e^{-\delta t}\sin\Psi_l]-$$

$$-\frac{U_{al}}{(R-\alpha_lL)^2+\omega_l^2L^2}\{[(\alpha_lL-R)(\pm\sin\varphi_l)+\omega_lL\cos\varphi_l]e^{-\delta t}+$$

$$+e^{-\alpha_lt}[(R-\alpha_lL)\sin(\omega_lt\pm\varphi_l)-\omega_lL\cos(\omega_lt\pm\varphi_l)]\}+\sum_{s=1}^{m}\frac{U_{als}}{(R-\alpha_{ls}^2L)^2+\omega_{ls}^2L^2}\times$$

$$\times\{(\alpha_{ls}L-R)\omega_{ls}Le^{-\delta t}+e^{-\alpha_{ls}t}[(R-\alpha_{ls}L)\sin\omega_{ls}t-\omega_{ls}L\cos\omega_{ls}t]\}\Big\rangle. \qquad (14)$$

С учетом того, что $i_{Ll}(t)$, полностью соответствуя классическому решению при $\alpha_{0l}=$ $=\alpha_l=\alpha_{ls}=\infty$ и при $t=0$, $t=\infty$, являются правильно определенными, то и $i_{L\Sigma}(t)=$ $=\sum\limits_{l=1}^{n}i_{Ll}(t)$, определяемый выражением (14), найден правильно.

Как и в работах [2, 3], здесь пока не известными являются коэффициенты затухания $\alpha_{0l}=\alpha_l=\alpha_{ls}$. Их определения требуют дальнейших исследований. Известно, что $\alpha_{0l}>\delta$; $\alpha_l>\delta$; $\alpha_{ls}>\delta$.

Решение задачи по предлагаемому методу для электроцепи с RC элементами подобны для напряжения U_c на емкости C. В этом решении необходимо вместо $\delta=R/L$ подставить $1/RC$ и вместо U_{al}/L подставить $U_{al}/(RC)$.

Заметим, что предлагаемые выводы в соответствии с рассматриваемой гипотезой о переходных процессах в электроцепях претендовать на абсолют (аксиому) пока не имеют права. Однако, как указывал Жюль Верн, “гипотезы развивают науку”. Поэтому автор надеется, что в будущем данный подход в решении задачи о переходных процессах в электроцепях может занять аксиоматическое место.

1. *Божко А. Е.* К концепции о переходных процессах в электрических цепях // Доп. НАН України. – 2003. – № 12. – С. 72–75.
2. *Божко А. Е.* Новая интерпретация переходных процессов в электрических цепях // Там же. – 2004. – № 9. – С. 83–87.
3. *Божко А. Е.* О новой трактовке переходных процессов в электрических цепях переменного тока // Там же. – 2005. – № 4. – С. 81–86.
4. *Бессонов Л. А.* Теоретические основы электротехники. – Москва: Высш. шк., 1978. – 528 с.
5. *Андре Анго.* Математика для электро- и радиоинженеров. – Москва: Наука, 1965. – 780 с.
6. *Божко А. Е.* Воспроизведение случайных вибраций. – Киев: Наук. думка, 1984. – 216 с.
7. *Вибрации* в технике // Под ред. д. т. н., проф. М. Д. Генкина. – Москва: Машиностроение, 1981. – Т. 5. – 496 с.
8. *Гинзбург С. Г.* Методы решения задач по переходным процессам в электрических цепях. – Москва: Сов. радио, 1959. – 404 с.

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 02.08.2006