ДОПОВІДІ НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

3 • 2007

МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

С. П. Дегтярев, Т. А. Саникидзе, А. Ф. Тедеев

О компактности носителя решения одной эволюционной системы, возникающей из модели Бина в теории сверхпроводимости

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. М. Ковалевым)

The paper deals with an evolutionary degenerate system of the p-Laplacian type which is connected to the known Bean's model in type II superconductivity. For this system which describes the distribution of a magnetic field, we have studied the question of compactness of the support of a solution for finite initial data and external forces. We have obtained an estimate for the support of the solution.

В работе мы рассматриваем задачу Коши для следующей вырождающейся квазилинейной системы уравнений относительно неизвестной вектор-функции $\mathbf{H}(x,t) = (H_1(x,t), H_2(x,t), H_3(x,t))$ (здесь и ниже все векторные величины, в отличие от скалярных величин, выделяются полужирным шрифтом):

$$\mathbf{H}_t + \nabla \times [|\nabla \times \mathbf{H}|^{p-2} \nabla \times \mathbf{H}] = \mathbf{F}(x,t), \qquad (x,t) \in Q, \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \qquad (x,t) \in Q, \tag{2}$$

$$\mathbf{H}(x,0) = \mathbf{H}_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}^3. \tag{3}$$

Здесь $Q = \mathbb{R}^3 \times (0,\infty)$, $p > 2$ — заданная константа, $\mathbf{F}(x,t)$ и $\mathbf{H}_0(x)$ — заданные вектор-функции; $\mathbf{H}_t$ — производная по времени t. Для вектор-функции $\mathbf{A}(x)$ символ $\nabla \times \mathbf{A}$ означает $\operatorname{rot} \mathbf{A}$, т. е. векторное произведение векторов $\nabla \equiv (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3)$ и $\mathbf{A}(x)$; символ $\nabla \cdot \mathbf{A}$ — скалярное произведение векторов ∇ и $\mathbf{A}(\mathbf{x})$, т. е. $\nabla \cdot \mathbf{A} = \operatorname{div} \mathbf{A}$; $|\mathbf{A}|$ — абсолютную величину вектора $\mathbf{A}$.

Задача (1)–(3) обычно используется как приближение к известной модели Бина для сверхпроводимости типа II (см., напр., [1, 2] и имеющуюся там библиогр.). При этом вектор $\mathbf{H}(x,t)$ имеет смысл напряженности магнитного поля. Не останавливаясь подробно на точной формулировке модели Бина (отсылаем читателя к работам [1, 2]), отметим, что по самой своей постановке указанная модель подразумевает решение с компактным носителем.

Поэтому естественно возникает вопрос об установлении компактности носителя решения задачи (1)–(3) при финитных данных $\mathbf{H}_0(x)$ и $\mathbf{F}(x,t)$.

До настоящего времени вопрос о финитности решения задачи (1)–(3) при финитных данных исследован не был. Такая финитность была доказана в работе [1] при существенном ограничении, состоящем в предположении о двумерности задачи. А именно, в предположении, что неизвестное поле $\mathbf{H}$ в задаче (1)–(3) является плоским и зависит только от двух пространственных переменных x_1 и x_2, т. е. $\mathbf{H} = (H_1(x_1,x_2,t), H_2(x_1,x_2,t), 0)$. Целью данной работы является доказательство компактности носителя решения $\mathbf{H}(x,t)$ в общей трехмерной постановке. При этом мы используем метод, развитый в работах одного из авторов [3–5].

Приведем теперь некоторые вспомогательные утверждения, используемые в дальнейшем, и сформулируем требования на данные задачи и основной результат.

Мы будем пользоваться следующим легко проверяемым интегральным тождеством:

$$\int\limits_{\Omega} \mathbf{A}(x)\cdot(\nabla\times\mathbf{B}(x))\,dx = \int\limits_{\Omega}(\nabla\times\mathbf{A}(x))\cdot\mathbf{B}(x)\,dx, \tag{4}$$

справедливым для области Ω с достаточно гладкой границей и векторных полей $\mathbf{A}(x)$ и $\mathbf{B}(x)$ таких, что $\mathbf{A}(x)$, $\mathbf{B}(x)$, $\nabla\times\mathbf{A}(x)$, $\nabla\times\mathbf{B}(x)\in L_2(\Omega)$ и $\mathbf{B}(x)=0$ при $x\in\partial\Omega$ (или $\mathbf{A}(x)=0$ при $x\in\partial\Omega$).

Для векторного поля $\mathbf{A}(x) = (A_1(x), A_2(x), A_3(x))$ и скалярной функции $a(x)$, обладающих соответствующими обобщенными производными, справедливы также формулы

$$\nabla\times(a(x)\mathbf{A}(x)) = a(x)\nabla\times\mathbf{A}(x) + (\nabla a(x))\times\mathbf{A}(x), \tag{5}$$

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{A}(x) = -\triangle\mathbf{A}(x) + \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}(x)), \tag{6}$$

где $\nabla a(x)$ — градиент $a(x)$; $\triangle$ — оператор Лапласа.

Из соотношения (6) следует важное и используемое ниже неравенство. Пусть $\mathbf{A}(x)=0$ при $x\in\partial\Omega$, $\nabla\cdot\mathbf{A}(x)$, $\nabla\times\mathbf{A}(x)\in L_p(\Omega)$. Тогда

$$\|D\mathbf{A}(x)\|_{L_p(\Omega)} \leqslant C(\|\nabla\times\mathbf{A}(x)\|_{L_p(\Omega)} + \|\nabla\cdot\mathbf{A}(x)\|_{L_p(\Omega)}). \tag{7}$$

Здесь и далее C обозначает все абсолютные константы (зависимость от данных задачи оговаривается отдельно), $D\mathbf{A}(x)$ — вектор (совокупность) всех производных первого порядка по пространственным переменным от компонент вектора $\mathbf{A}(x)$, т. е. $D\mathbf{A} = \{\partial A_i(x)/\partial x_j : i,j=\overline{1,3}\}$. При этом мы говорим, например, что вектор-функция $\mathbf{A}\in L_r(\Omega)$, если каждая компонента вектор-функции принадлежит указанному пространству, и используем также обозначения

$$\|\mathbf{A}(x)\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{3}|A_i(x)|^p\,dx\right)^{1/p}, \qquad \|D\mathbf{A}(x)\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{3}|\nabla A_i(x)|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

Кроме того, всюду ниже мы обозначаем $|D\mathbf{A}(x)|^p \equiv \sum\limits_{i,j=1}^{3}\left|\dfrac{\partial A_i(x)}{\partial x_j}\right|^p$.

Соотношение (7) следует из общей теории эллиптических краевых задач, примененной к задаче (ср. [1, 2]):

$$\triangle \mathbf{A}(x) = -\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}(x)) + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}(x)), \qquad x \in \Omega,$$

$$\mathbf{A}(x) = 0, \qquad x \in \partial\Omega.$$

Отметим также, что в силу уравнения последней задачи и известных свойств Ньютонова потенциала неравенство (7) справедливо также при $\Omega = \mathbb{R}^3$.

Далее, для вектор-функции $\mathbf{U}(x)$ такой, что $\mathbf{U}(x) = 0$ при $x \in \partial\Omega$, $\mathbf{U}(x) \in L_\varepsilon(\Omega)$, $D\mathbf{U}(x) \in L_p(\Omega)$ справедливо такое же, как и для скалярных функций, мультипликативное неравенство Ниренберга–Гальярдо ($q > \varepsilon > 0$):

$$\|\mathbf{U}(x)\|_{L_q(\Omega)} \leqslant C\|D\mathbf{U}(x)\|^{\alpha}_{L_p(\Omega)}\|\mathbf{U}(x)\|^{1-\alpha}_{L_\varepsilon(\Omega)}, \tag{8}$$

где показатель α находится из соотношения

$$\frac{1}{q} = \alpha\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{3}\right) + (1-\alpha)\frac{1}{\varepsilon}. \tag{9}$$

При этом ограничения на $q > 0$ при заданных p и ε соответствующим образом следуют из (9), в котором $\alpha \in (0, 1)$.

Отметим, что константы C в соотношениях (7) и (8) не зависят от размеров области Ω. Для (8) это хорошо известно, а для (7) это легко проверяется путем сведения соотношения (7) к области какого-либо стандартного размера путем замены независимых переменных $x = ky$ (легко убедиться, что неравенство (7) не зависит от такой замены).

Сформулируем теперь требования к данным задачи (1)–(3). Пусть $\mathbf{H}_0(x)$ — измеримая финитная вектор-функция, обладающая обобщенными производными первого порядка по x, и такая, что

$$\nabla \cdot \mathbf{H}_0(x) = 0, \qquad |\nabla \times \mathbf{H}_0(x)| \in L_p(\mathbb{R}^3),$$

$$|\nabla \times [|\nabla \times \mathbf{H}_0|^{p-2}\nabla \times \mathbf{H}_0]| \in L_2(\mathbb{R}^3).$$

Пусть, далее, $\mathbf{F}(x,t)$ — финитная при каждом $t \geqslant 0$ измеримая вектор-функция, обладающая фигурирующими ниже обобщенными производными, и такая, что

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(x,t) = 0, \qquad \mathbf{F}_t(x,t), \qquad \nabla \times \mathbf{F}_t(x,t) \in L_p(Q_T) \qquad \forall T > 0,$$

$$Q_T = \mathbb{R}^3 \times (0,T), \qquad \mathbf{F}(x,t) \in L_2(Q).$$

Обозначим

$$f(t) = \sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}\inf_{r>0}\{r > 0\colon \mathbf{F}(x,\tau) \equiv 0,\ H_0(x) \equiv 0,\ |x| > r\}.$$

Из этого определения следует, что $\mathbf{F}(x,\tau) \equiv 0$ при $|x| > f(t)$, $\tau \in [0,t]$; $\mathbf{H}_0(x) = 0$, $|x| > f(t)$, т. е. $f(t)$ — размер точной границы носителей функций $\mathbf{H}_0(x)$ и $\mathbf{F}(x,t)$.

Под слабым решением задачи (1)–(3) будем понимать вектор-функцию $\mathbf{H}(x,t) \in L_2(0,T; W^1_p(\mathbb{R}^3))$ $\forall T > 0$ такую, что $\nabla \cdot \mathbf{H}(x,t) = 0$ почти всюду в Q и выполнено интегральное тождество

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}[-\mathbf{H}\mathbf{\Phi}_t + |\nabla \times \mathbf{H}|^{p-2}(\nabla \times \mathbf{H}) \cdot (\nabla \times \mathbf{\Phi})]\,dxdt = \int_{\mathbb{R}^3}\mathbf{H}_0(x) \cdot \mathbf{\Phi}(x,0)\,dx \tag{10}$$

для любой финитной по x вектор-функции $\mathbf{\Phi}(x,t) \in W_2^1(0,T;W_p^1(\mathbb{R}^3))$ такой, что $\nabla\cdot\mathbf{\Phi}(x,t) = 0$ почти всюду и $\mathbf{\Phi}(x,T) \equiv 0$ в $\mathbb{R}^3$.

Следующая теорема утверждает существование и свойства слабого решения задачи (1)–(3) и следует из результатов работ [1, 2] (см., в частности, теорему 2.2 в [1]).

Теорема 1. *При сделанных выше предположениях о данных задачи* (1)–(3) *эта задача имеет единственное слабое решение, причем* $\mathbf{H}_t(x,t)$ *(а следовательно, и* $\nabla\times(|\nabla\times\mathbf{H}|^{p-2}\nabla\times\times\mathbf{H})$*) принадлежат* $L_2(Q_T)$ $\forall T>0$ *и справедливы оценки*

$$\sup_{0<\tau<T}\int\limits_{\mathbb{R}^3}|\mathbf{H}|^2(x,\tau)\,dx+\int\limits_0^T\!\!\int\limits_{\mathbb{R}^3}|\nabla\times\mathbf{H}|^p\,dxd\tau \leqslant C\left(\int\limits_{\mathbb{R}^3}|\mathbf{H}_0|^2(x)\,dx+\int\limits_0^\infty\!\!\int\limits_{\mathbb{R}^3}|\mathbf{F}|^2dxd\tau\right),$$

$$\int\limits_0^T\!\!\int\limits_{\mathbb{R}^3}|\mathbf{H}_t|^2dxd\tau+\sup_{0<\tau<T}\int\limits_{\mathbb{R}^3}|\nabla\times\mathbf{H}|^p(x,\tau)\,dx\leqslant C(\mathbf{H}_0,\mathbf{F}).$$

Из этой теоремы следует, что при сделанных предположениях уравнение (1) выполнено не только в слабом смысле, но и почти всюду, т. е. слабое решение является, по существу, сильным решением.

Сформулируем теперь основной результат.

Теорема 2. *Пусть выполнены сформулированные выше условия на данные* $\mathbf{H}_0(x)$ *и* $\mathbf{F}(x,t)$*. Тогда решение* $\mathbf{H}(x,t)$ *задачи* (1)–(3) *финитно при каждом* $t>0$*, причем носитель функции* $\mathbf{H}(\cdot,t)$ *обладает свойством*

$$\operatorname{supp}(\mathbf{H}(\cdot,t))\subset\{x\in\mathbb{R}^3\colon |x|<\max\{4f(t),C(\mathbf{H}_0,\mathbf{F})t^{2/k}\}\},\tag{11}$$

где $k=3(p-2)+2p$.

Доказательство. Как отмечено выше, из теоремы 1 следует, что уравнение (1) выполняется почти всюду в поточечном смысле. Ниже для получения некоторых интегральных оценок мы будем умножать уравнение (1) на некоторые пробные функции с последующим интегрированием по частям. Все эти операции легко оправдываются использованием стекловских усреднений с последующим предельным переходом в окончательных соотношениях.

Пусть $t>0$ фиксировано, $B_1 \Subset B_2$ — два открытых множества с достаточно гладкой границей, причем $B_2\bigcap(\operatorname{supp}\mathbf{H}_0\bigcup\operatorname{supp}\mathbf{F}(\cdot,\tau))=\varnothing$, $0<\tau\leqslant t$, и пусть $\zeta(x)$ — гладкая срезающая функция множества B_2, $\zeta(x)=1$ на B_1, $\zeta(x)=0$ вне B_2. Пусть еще $s>0$.

Умножим систему (1) скалярно на вектор-функцию $\mathbf{H}(x,\tau)\zeta^s(x)$ и проинтегрируем по $Q_t=\mathbb{R}^3\times(0,t)$. В результате, пользуясь (4) и (5), получим

$$\frac{1}{2}\int\limits_{B_2}\mathbf{H}^2(x,t)\zeta^s(x)\,dx+\int\limits_0^t\!\!\int\limits_{B_2}|\nabla\times\mathbf{H}|^p(x,\tau)\zeta^s(x)\,dxd\tau=$$

$$=-s\int\limits_0^t\!\!\int\limits_{B_2}|\nabla\times\mathbf{H}|^{p-2}(\nabla\times\mathbf{H})\cdot(\nabla\zeta\times\mathbf{H})\zeta^{s-1}(x)\,dxd\tau\equiv I.\tag{12}$$

Оценим интеграл I в правой части последнего неравенства по неравенству Юнга с ε, учитывая, что $|\nabla\zeta \times \mathbf{H}| \leqslant C|\nabla\zeta|\,|\mathbf{H}|$:

$$|I| \leqslant \varepsilon \int\limits_0^t \int\limits_{B_2} |\nabla \times \mathbf{H}|^p \zeta^s dx d\tau + C_\varepsilon \int\limits_0^t \int\limits_{B_2} |\mathbf{H}|^p \zeta^{s-p} |\nabla\zeta|^p \, dx d\tau. \tag{13}$$

Выбирая ε достаточно малым, из предыдущего неравенства, ввиду произвольности $t > 0$, получаем

$$\sup_{0<\tau<t} \int\limits_{B_2} \mathbf{H}^2(x,\tau)\zeta^s dx + \int\limits_0^t \int\limits_{B_2} |\nabla \times \mathbf{H}|^p \zeta^s dx d\tau \leqslant C \int\limits_0^t \int\limits_{B_2} |\mathbf{H}|^p \zeta^{s-p} |\nabla\zeta|^p \, dx d\tau. \tag{14}$$

Далее, так как в силу (2) $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$, то

$$\nabla \cdot \zeta^s \mathbf{H}(x,t) = \zeta^s \nabla \cdot \mathbf{H} + s\zeta^{s-1} \nabla\zeta \cdot \mathbf{H} = s\zeta^{s-1}\nabla\zeta \cdot \mathbf{H}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{B_2} |\nabla \cdot \zeta^s \mathbf{H}|^p dx \leqslant C \int\limits_{B_2} |\mathbf{H}|^p \zeta^{ps-p}(x) |\nabla\zeta|^p \, dx. \tag{15}$$

Заметим теперь, что

$$\nabla \times (\zeta^s \mathbf{H}) = \zeta^s \nabla \times \mathbf{H} + s\zeta^{s-1} \nabla\zeta \times \mathbf{H},$$

и поэтому

$$|\nabla \times (\zeta^s \mathbf{H})|^p = C(\zeta^{ps} |\nabla \times \mathbf{H}|^p + |\mathbf{H}|^p \zeta^{ps-p} |\nabla\zeta|^p). \tag{16}$$

Ввиду того, что $p > 2$, $\zeta^{ps} \leqslant \zeta^s$, $\zeta^{ps-p} \leqslant \zeta^{s-p}$, $\zeta^{2s} \leqslant \zeta^s$, из соотношений (16), (15) и (14) получаем

$$\sup_{0<\tau<t} \int\limits_{B_2} (\zeta^s \mathbf{H}(x,\tau))^2 dx + \int\limits_0^t \int\limits_{B_2} |\nabla \times \zeta^s \mathbf{H}|^p \, dx d\tau + \int\limits_0^t \int\limits_{B_2} |\nabla \cdot \zeta^s \mathbf{H}|^p \, dx d\tau \leqslant$$
$$\leqslant C \int\limits_0^t \int\limits_{B_2} |\mathbf{H}|^p \zeta^{s-p} |\nabla\zeta|^p \, dx d\tau.$$

Применяя теперь неравенство (7) к функции $\mathbf{A} = \zeta^s \mathbf{H}(x,t)$, из последнего неравенства имеем

$$\sup_{0<\tau<t} \int\limits_{B_2} (\zeta^s \mathbf{H}(x,\tau))^2 dx + \int\limits_0^t \int\limits_{B_2} |D\zeta^s \mathbf{H}|^p \, dx d\tau \leqslant C \int\limits_0^t \int\limits_{B_2} |\mathbf{H}|^p \zeta^{s-p} |\nabla\zeta|^p \, dx d\tau. \tag{17}$$

Пусть по-прежнему $t > 0$ фиксировано. Зафиксируем число $R \geqslant 8f(t)$. Для $n = 0, 1, 2, \ldots$ рассмотрим монотонно убывающую последовательность $R_n = R(1 + 2^{-n-1})$ и монотонно возрастающую последовательность $r_n = R(1 - 2^{-n-1})/2$. Обозначим для $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$C_n = \{x \in \mathbb{R}^3 \colon r_n < |x| < R_n\}.$$

Легко видеть, что $\{C_n\}$ представляет собой последовательность сжимающихся кольцеобразных областей.

Пусть, далее, $\{\zeta_n(x)\}$ — последовательность гладких срезающих функций таких, что

$$\zeta_n(x) = 1, \qquad x \in C_{n+1}; \qquad \zeta_n(x) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^3 \setminus C_n; \qquad |\nabla \zeta_n(x)| \leqslant \frac{C2^n}{R}. \tag{18}$$

Отметим, что в силу выбора параметра R носители функций $\zeta_n(x)$ не пересекаются с носителями функций $\mathbf{H}_0(x)$ и $\mathbf{F}(x,t)$.

Применим теперь неравенство (17) к областям $B_1 = C_{n+1}$, $B_2 = C_n$ $(n \geqslant 1)$ и $\zeta(x) = \zeta_n(x)$. Ввиду (18) это дает

$$\sup_{0<\tau<t} \int\limits_{C_n} (\zeta_n^s \mathbf{H}(x,\tau))^2 dx + \int\limits_0^t \int\limits_{C_n} |D\zeta_n^s \mathbf{H}|^p \, dx d\tau \leqslant C \frac{2^{np}}{\mathbb{R}^p} \int\limits_0^t \int\limits_{C_n} |\mathbf{H}|^p \, dx d\tau.$$

Используя определение последовательности $\zeta_n(x)$, последнее неравенство записываем в виде

$$\sup_{0<\tau<t} \int\limits_{C_n} (\zeta_n^s \mathbf{H}(x,\tau))^2 dx + \int\limits_0^t \int\limits_{C_n} |D\zeta_n^s \mathbf{H}|^p \, dx d\tau \leqslant C \frac{2^{np}}{\mathbb{R}^p} \int\limits_0^t \int\limits_{C_{n-1}} |\zeta_{n-1}^s \mathbf{H}|^p \, dx d\tau. \tag{19}$$

Следовательно, вводя обозначение $\mathbf{V}_n(x,t) \equiv \zeta_n^s(x) \mathbf{H}(x,t)$, имеем

$$\sup_{0<\tau<t} \int\limits_{C_n} \mathbf{V}_n^2(x,\tau) \, dx + \int\limits_0^t \int\limits_{C_n} |D\mathbf{V}_n(x,\tau)|^p \, dx d\tau \leqslant C \frac{2^{np}}{\mathbb{R}^p} \int\limits_0^t \int\limits_{C_{n-1}} |\mathbf{V}_{n-1}|^p \, dx d\tau. \tag{20}$$

Применим теперь к интегралу по C_{n-1} по dx в правой части соотношения (20) неравенство (8) с $q = p$, $\varepsilon = 2$. Получим

$$\int\limits_{C_{n-1}} |\mathbf{V}_{n-1}|^p \, dx \leqslant C \Biggl(\int\limits_{C_{n-1}} |D\mathbf{V}_{n-1}|^p \, dx \Biggr)^{\alpha} \Biggl(\int\limits_{C_{n-1}} \mathbf{V}_{n-1}^2 dx \Biggr)^{p(1-\alpha)/2}, \tag{21}$$

где α определяется из соответствующего соотношения (9):

$$\alpha = \frac{3(p-2)}{3(p-2)+2p} = \frac{3(p-2)}{k}, \qquad k = 3(p-2) + 2p.$$

Интегрируя неравенство (21) по времени, вынося $\sup\limits_{0<\tau<t} \int\limits_{C_{n-1}} \mathbf{V}_{n-1}^2(x,\tau) \, dx$ и применяя неравенство Гельдера, получаем для интеграла в правой части (20)

$$\int\limits_0^t \int\limits_{C_{n-1}} |\mathbf{V}_{n-1}|^p \, dx d\tau \leqslant C t^{1-\alpha} \Biggl(\int\limits_0^t \int\limits_{C_{n-1}} |D\mathbf{V}_{n-1}|^p \, dx d\tau \Biggr)^{\alpha} \Biggl(\sup_{0<\tau<t} \int\limits_{C_{n-1}} \mathbf{V}_{n-1}^2(x,\tau) \, dx \Biggr)^{p(1-\alpha)/2}. \tag{22}$$

Обозначим

$$Y_n \equiv \sup_{0<\tau<t} \int\limits_{C_n} \mathbf{V}_n^2(x,\tau)\,dx + \int\limits_0^t \int\limits_{C_n} |D\mathbf{V}_n(x,\tau)|^p\,dxd\tau.$$

Тогда неравенства (20) и (22) дают для $n \geqslant 1$

$$Y_n \leqslant C\frac{2^{np}t^{1-\alpha}}{\mathbb{R}^p} Y_{n-1}^{\alpha+p(1-\alpha)/2} = C\frac{2^{np}t^{2p/k}}{\mathbb{R}^p} Y_{n-1}^{1+p(p-2)/k}.$$

Из итеративной леммы 5.6 из [6] следует, что $Y_n \to 0$ при $n \to \infty$, если достаточно мала величина:

$$C\frac{t^{2p/k}}{\mathbb{R}^p} Y_0^{p(p-2)/k} \leqslant \gamma_0. \tag{23}$$

С другой стороны, в силу теоремы 1 и оценки (7) для всего пространства $\mathbb{R}^3$ для Y_0 справедлива оценка

$$Y_0 \leqslant \sup_{0<\tau<t} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \mathbf{H}^2(x,\tau)\,dx + \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^3} |D\mathbf{H}|^p\,dxd\tau \leqslant C(\mathbf{H}_0, \mathbf{F}).$$

Таким образом, если при фиксированном $t > 0$ число R в (23) выбрано достаточно большим,

$$R \geqslant R(t) \equiv \max\{8f(t), C(\mathbf{H}_0, \mathbf{F})t^{2/k}\},$$

то неравенство (23) выполнено и, следовательно, $Y_n \to 0$ при $n \to \infty$. Последнее же в силу определения величин Y_n и функций $\mathbf{V}_n(x,t)$ означает, что $\mathbf{H}(x,t) \equiv 0$ в шаровом слое $\{x \in \mathbb{R}^3\colon R/2 \leqslant |x| \leqslant R\}$ при любом $R \geqslant R(t)$. Тем самым теорема 2 доказана, так как установлены финитность решения и соотношение (11).

1. *Hong-Ming Yin.* On a p-Laplacian type of evolution system and applications to the Bean model in the type-II superconductivity theory // Quart. Appl. Math. – 2001. – **59**, No 1. – P. 47–66.
2. *Hong-Ming Yin, Ben Q. Li, Jun Zou.* A degenerate evolution system modeling Bean's critical-state type-II superconductors // Discrete and Continuous Dynamical Systems. – 2002. – **8**, No 3. – P. 781–794.
3. *Тедеев А. Ф.* Условия существования и несуществования в целом по времени компактного носителя решений задачи Коши для квазилинейных вырождающихся параболических уравнений // Сиб. мат. журн. – 2004. – **45**, № 1. – С. 189–200.
4. *Andreucci D., Tedeev A. F.* Finite speed of propagation for the thin-film equation and other higher-order parabolic equations with general nonlinearity // Interfaces and Free Boundaries. – 2001. – **3**. – P. 233–264.
5. *Andreucci D., Tedeev A. F.* Universal bounds at the blow-up time for nonlinear parabolic equations // Adv. Different. Equat. – 2005. – **10**, No 1. – P. 89–120.
6. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – Москва: Наука, 1967. – 736 с.

*Институт прикладной математики
и механики НАН Украины, Донецк*

Поступило в редакцию 04.09.2006