алгоритмічний характер, неперервно залежать від параметрів та даних задачі й можуть бути використані як в теоретичних дослідженнях, так і в практиці інженерних розрахунків.

1. *Коляно Ю. М.* Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – Киев: Наук. думка, 1992. – 280 с.
2. *Подстригач Я. С., Ломакин В. А., Коляно Ю. М.* Термоупругость тел неоднородной структуры. – Москва: Наука, 1984. – 368 с.
3. *Сергиенко И. В., Скопецкий В. В., Дейнека В. С.* Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – Киев: Наук. думка, 1991. – 432 с.
4. *Дейнека В. С., Сергиенко И. В., Скопецкий В. В.* Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. – Киев: Наук. думка, 1998. – 614 с.
5. *Ленюк М. П.* Температурні поля в плоских кусково-однорідних ортотропних областях. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1997. – 188 с.
6. *Конет І. М.* Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в ортотропних сферичних областях. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1998. – 209 с.
7. *Конет І. М., Ленюк М. П.* Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в циліндрично-кругових областях. – Чернівці: Прут, 2001. – 312 с.
8. *Конет І. М.* Температурні поля в двоскладових циліндричних тілах // Наук. праці Кам'янець-Подільськ. держ. пед. ун-ту: В 2 т. – Кам'янець-Подільський, 2002. – Т. 2. – С. 18–24.
9. *Конет І. М., Ленюк М. П.* Температурні поля в необмежених тришарових циліндричних областях. – Львів, 2003. – 54 с. – (Препр. / НАН України. Ін-т прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача; 03.01).
10. *Боли Б., Уэйнер Дж.* Теория температурных напряжений. – Москва: Мир, 1964. – 517 с.

Кам'янець-Подільський державний університет
Надійшло до редакції 03.10.2006

УДК 512.4

Я. В. Лавренюк, В. И. Сущанский

Нормальное строение группы локальных изометрий границы сферически однородного дерева

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Н. А. Перестюком)

The normal structure of the locally isometry group $\mathrm{LIsom}\,\partial T$ *of a spherically homogeneous tree boundary is investigated. It is proved that every closed normal subgroup of this group contains a commutant of* $\mathrm{LIsom}\,\partial T$. *The quotient of* $\mathrm{LIsom}\,\partial T$ *by its commutant is found.*

Пусть (T, v_0) — локально конечное дерево с корнем v_0, $V(T)$ — множество его вершин. Расстоянием $d(u, v)$ между вершинами u, $v \in V(T)$ называется длина (число звеньев) кратчайшего пути, соединяющего u, v. Сферой радиуса n (иначе, n-уровнем) корневого дерева (T, v_0) называется множество $V_n(T) = \{v \in V(T) \mid d(v_0, v) = n\}$. В частности, $V_0(T) = \{v_0\}$. Дерево T называется сферически однородным, если валентность каждой его вершины зависит лишь от радиуса сферы, содержащей эту вершину. Сферически однородное дерево T однозначно (с точностью до изоморфизма) характеризуется своим сферическим индексом —

последовательностью $\Theta = \Theta(T) = (a_0, a_1, \ldots)$ натуральных чисел, в которой a_0 — валентность корня v_0, а при $n \geqslant 1$ число $a_n + 1$ — валентность произвольной вершины дерева T из $V_n(T)$. Характеристикой дерева T назовем супернатуральное число $\Omega(T) = \prod\limits_{i=0}^{\infty} a_i$.

Каждое сферически однородное дерево сферического индекса $\Theta = (a_0, a_1, \ldots)$ изоморфно некоторому стандартному дереву T_Θ, которое определяется следующим образом. Множеством вершин $V(T_\Theta)$ является множество всевозможных последовательностей вида

$$(i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}), \qquad i_k \in X_k = \{1, 2, \ldots, a_k\}, \qquad n \geqslant 0,$$

вместе с пустой последовательностью $\varnothing$, которая соответствует случаю $n = 0$. Вершины u, $v \in V(T_\Theta)$ соединяются ребром в дереве T_Θ в том и только в том случае, когда одна из них является непосредственным продолжением другой, т. е. одна из них имеет вид $(i_0, \ldots, i_{n-1}, i_n)$, а другая — $(i_0, \ldots, i_{n-1})$, $i_k \in X_k$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$. Дерево T_Θ, $\Theta = (a_0, a_1, \ldots)$ называют деревом слов над алфавитом $X_0, X_1, X_2, \ldots$, $|X_k| = a_k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Говорят, что вершина v дерева T лежит под вершиной w, если путь, соединяющий корень дерева с вершиной v содержит также вершину w. Символом T_v, $v \in V(T)$, будем обозначать полное поддерево с корневой вершиной v. Оно состоит из всех вершин дерева T, лежащих под вершиной v и соединяющих их ребер. Концом корневого дерева T называется каждый бесконечный путь без повторений, начинающийся в корне дерева. Множество всех концов — границу дерева T — будем обозначать символом ∂T.

На границе ∂T корневого дерева T естественным образом определяется структура ультраметрического пространства. А именно, фиксируем бесконечную строго убывающую последовательность $\overline{\lambda} = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ положительных чисел, сходящуюся к 0. Пусть $k(x_1, x_2)$ — длина общего начала концов x_1, $x_2 \in \partial T$. Положим

$$\rho_\lambda(x_1, x_2) = \begin{cases} \lambda_{k(x_1,x_2)}, & \text{если} \quad x_1 \neq x_2, \\ 0, & \text{если} \quad x_1 = x_2. \end{cases} \tag{1}$$

Функция ρ_λ является ультраметрикой на ∂T, а метрическое пространство $\partial T = (\partial T, \rho_\lambda)$ является компактом. Биекция $f \colon V(T) \longrightarrow V(T)$ называется автоморфизмом корневого дерева (T, v_0), если $v_0^f = v_0$ и f сохраняет отношение инцидентности вершин. Каждый автоморфизм корневого дерева T определяет очевидным образом изометрию метрического пространства $V(T)$ с естественной метрикой и, наоборот, каждая такая изометрия является автоморфизмом, т. е. имеет место равенство $\operatorname{Aut} T = \operatorname{Isom} T$. Понятно также, что каждая изометрия дерева T индуцирует некоторую изометрию на его границе ∂T. Тем самым, группа $\operatorname{Isom} T$ естественным образом погружается в группу $\operatorname{Homeo} \partial T$ всех гомеоморфизмов границы ∂T, причем образ $\operatorname{Isom} T$ при этом погружении совпадает с группой изометрий $\operatorname{Isom} \partial T$.

В группе $\operatorname{Isom} T$ выделяются следующие подгруппы:

1) стабилизатор $\operatorname{St}(n)$ n-го уровня, $n \geqslant 0$, который состоит из всевозможных изометрий, фиксирующих все вершины сферы V_n дерева T;

2) жесткий стабилизатор $\operatorname{rist}(v)$ вершины $v \in V(T)$, являющийся максимальной подгруппой, изометрии которой оставляют неподвижными все вершины, лежащие в дереве T ниже v.

Группа $\mathrm{Isom}\, T_\Theta$ дерева слов T_Θ, $\Theta = (a_0, a_1, \ldots)$ при любом натуральном n раскладывается в сплетение

$$\mathrm{Isom}\, T_\Theta \simeq \mathrm{Sym}_{a_0} \wr \mathrm{Sym}_{a_1} \wr \ldots \wr \mathrm{Sym}_{a_{n-1}} \wr \mathrm{Isom}\, T_{\Theta,n}, \tag{2}$$

где $T_{\Theta,n}$ — дерево слов над последовательностью алфавитов X_n, $X_{n+1}, \ldots$, а $\mathrm{Sym}\, a_i$ — симметрическая группа над алфавитом X_i $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$ [5].

Из разложения (2) следует, что на $\mathrm{Isom}\, T_\Theta$ естественным образом определена структура проконечной группы, а тем самым выделяется класс ее замкнутых подгрупп.

Отметим, что подгруппа $\mathrm{St}(n)$ раскладывается в прямое произведение жестких стабилизаторов вершин n-го уровня, т. е. имеет место равенство $\mathrm{St}(n) = \prod\limits_{v \in V_n} \mathrm{rist}(v)$. Поэтому если вершины n-го уровня дерева T_Θ занумерованы и $V_n(T) = \{v_0, v_1, \ldots, v_{m_n}\}$, то каждый элемент g стабилизатора $\mathrm{St}(n)$ представляется в виде кортежа $(g_1, \ldots, g_{m_n})$, где g_i — некоторый автоморфизм поддерева T_{v_i} с корнем в вершине v_i $(1 \leqslant i \leqslant m_n)$. Поскольку для любых i, j $(1 \leqslant i,\, j \leqslant m_n)$ поддеревья T_{v_i}, T_{v_j} изоморфны между собой и изоморфны определенному выше дереву $T_{\Theta,n}$, то автоморфизмы g_i $(1 \leqslant i \leqslant m_n)$ в дальнейшем будут отождествляться с соответствующими автоморфизмами этого дерева.

Произвольная изометрия дерева T_Θ однозначно определяется своим портретом — вершинно-помеченным деревом, изоморфным T_Θ [1]. При этом при любом $n \geqslant 0$ метками вершин n-го уровня служат подстановки множества X_{n+1}, которые показывают, как изометрия переставляет вершины $(n+1)$-го уровня дерева T_Θ, инцидентные одной и той же вершине n-го уровня. Пусть $g(v_k)$, $1 \leqslant k \leqslant m_n$, — метки вершины $v_k \in V_n(T_\Theta)$ для автоморфизма g, $\Pi_n g = \prod\limits_{k=1}^{m_n} g(v_k)$. Следующее утверждение непосредственно следует из результатов [6].

Теорема 1. *1. Коммутант группы* $\mathrm{Isom}\, T_\Theta$ *состоит из всевозможных изометрий* g *таких, что для любого уровня* n *подстановка* $\Pi_n g$ *является четной.*

2. Замкнутая нормальная подгруппа группы $\mathrm{Isom}\, T_\Theta$*, содержащаяся в* $\mathrm{St}(n)$*, но не принадлежащая* $\mathrm{St}(n+1)$*, содержит коммутант* $\mathrm{St}(n)'$*, который раскладывается в прямое произведение*

$$\mathrm{St}(k)' = \prod_{v \in V_k} \mathrm{rist}(v)'. \tag{3}$$

3. Элемент $(g_1, \ldots, g_{m_n})$ *содержится в* $\mathrm{St}(n) \bigcap \mathrm{Isom}\, T_\Theta{}'$ *тогда и только тогда, когда произведение* $g_1 g_2 \ldots g_{m_n}$ *содержится в* $\mathrm{Isom}\, T_{\Theta,n}{}'$.

Для каждой вершины $v \in V(T_\Theta)$ граница ∂T_v поддерева T_v естественным образом отождествляется с диском в ультраметрическом пространстве ∂T_Θ, который состоит из всех путей ∂T_Θ, проходящих через вершину v. Будем обозначать этот диск тем же символом ∂T_v. Пусть $S(\partial T_\Theta, n)$ — подгруппа группы $\mathrm{Homeo}\, \partial T_\Theta$, состоящая из тех гомеоморфизмов, которые лишь переставляют диски ∂T_v, $v \in V_n(T_\Theta)$, т. е. не изменяют координаты i_k путей $(i_0, i_1, \ldots) \in \partial T_\Theta$ при $k \geqslant n$. Понятно, что $S(\partial T_\Theta, n)$ изоморфна симметрической группе $\mathrm{Sym}\,(V_n(T_\Theta))$, причем $S(\partial T_\Theta, n) \leqslant S(\partial T_\Theta, k)$ при $n \leqslant k$. Подгруппу $S(\partial T_\Theta) < \mathrm{Homeo}\, \partial T$ определим как объединение возрастающей цепи подгрупп $S(\partial T_\Theta, n)$, $n \in \mathbb{N}$. Выделим в ней также подгруппу $A(\partial T_\Theta)$, являющуюся объединением возрастающей цепи знакопеременных групп $A(\partial T_\Theta, n) \leqslant S(\partial T, n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Напомним, что биекция α метрического пространства (X_1, d_1) в метрическое пространство (X_2, d_2) называется локальной изометрией, если для произвольной точки $x \in X_1$

существует окрестность U_x этой точки такая, что ограничение α на U_x является изометрией, т. е. для любых $x_1, x_2 \in U_x$ имеет место равенство $d(x_1^\alpha, x_2^\alpha) = d(x_1, x_2)$. Локальную изометрию α назовем однородной, если существует $\delta > 0$ такое, что равенство $d(x_1^\alpha, x_2^\alpha) = d(x_1, x_2)$ выполнено для всех точек x_1, x_2, для которых $d_1(x_1, x_2) < \delta$. В случае компактного пространства каждая его локальная изометрия на себя будет однородной. Множество всех локальных изометрий пространства (X, d) на себя образует группу относительно суперпозиции, которую мы будем обозначать символом $\mathrm{LIsom}(X, d)$.

Метрическое пространство (X, d) назовем слабо однородным, если группа локальных изометрий $\mathrm{LIsom}(X, d)$ действует на нем транзитивно.

Утверждение 1. *Для каждого слабо однородного компактного ультраметрического пространства (X, ρ) существуют сферически однородное дерево T_Θ и сходящаяся к нулю числовая последовательность $\overline{\lambda}_\Theta$ такие, что (X, ρ) локально изометрично пространству концов ∂T_Θ с метрикой, определяемой последовательностью $\overline{\lambda}_\Theta$.*

Доказательство см. [3].

Относительно строения группы локальных изометрий сферически однородного корневого дерева отметим следующие факты.

Теорема 2. *1. Для любой допустимой последовательности Θ группа $\mathrm{LIsom}\,\partial T_\Theta$ раскладывается в произведение своих подгрупп $\mathrm{Isom}\,\partial T_\Theta$ и $S(\partial T_\Theta)$:*

$$\mathrm{LIsom}\,\partial T_\Theta = \mathrm{Isom}\,\partial T_\Theta S(\partial T_\Theta). \tag{4}$$

2. Если группа $\mathrm{LIsom}(\partial T, \overline{\lambda})$ действует транзитивно на ∂T, то она является совершенной, т. е. имеет тривиальный центр и все ее автоморфизмы внутренние. В частности, каждая нормальная подгруппа этой группы является характеристической в ней.

Следующее утверждение описывает коммутант группы $\mathrm{LIsom}\partial T_\Theta$.

Теорема 3. *Для произвольной допустимой последовательности Θ коммутант группы локальных изометрий $\mathrm{LIsom}\partial T_\Theta$ корневого дерева T_Θ определяется равенством*

$$\mathrm{LIsom}\,\partial T_\Theta{}' = \mathrm{Isom}\,\partial T_\Theta{}' A(\partial T_\Theta).$$

Основным утверждением, дающим характеризацию нормального строения группы локальных изометрий корневого дерева как проконечной группы, является следующая теорема.

Теорема 4. *Каждый нееденичный замкнутый нормальный делитель группы $\mathrm{LIsom}\partial T_\Theta$ содержит ее коммутант.*

Идея доказательства. Сначала проверяется, что каждый нееденичный нормальный делитель группы $\mathrm{LIsom}\partial T_\Theta$ содержит подгруппу $A(\partial T_\Theta)$. Далее, согласно п. 2 теоремы 1, каждая нормальная подгруппа содержит коммутант стабилизатора некоторого уровня, который имеет вид (3). Следующий шаг — показать, что на самом деле рассматриваемая подгруппа содержит коммутант стабилизатора первого уровня. А поскольку она содержит $A(\partial T_\Theta)$, то достаточно убедиться в том, что подгруппа $\mathrm{St}(1) \bigcap (\mathrm{Isom}\,\partial T_\Theta)'$ также содержится в этом нормальном делителе. Последнее проверяется прямыми вычислениями.

Из теоремы сразу же получаем

Следствие 1. *Каждая собственная факторгруппа группы $\mathrm{LIsom}\,\partial T_\Theta$ абелева.*

С помощью теоремы 4 и утверждения 1 можно доказать

Теорема 5. *Каждая нееденичная замкнутая нормальная подгруппа группы локальных изометрий слабо однородного компактного ультраметрического пространства (X, ρ) содержит коммутант этой группы.*

Далее символом $\prod$ будем обозначать прямое, а символом $\overline{\prod}$ — декартово произведение некоторого семейства групп. Если семейство групп конечное, то эти конструкции совпадают.

Следующая теорема описывает строение факторгруппы $\mathrm{LIsom}\partial T_\Theta$ по ее коммутанту.

Теорема 6. *1. Пусть Θ — такая допустимая последовательность натуральных чисел, что $2^\infty \mid \Omega(\Theta)$. Тогда*

$$\mathrm{LIsom}\partial T_\Theta/(\mathrm{LIsom}\partial T_\Theta)' \simeq \left(\overline{\prod_{i\in\mathbb{N}}} C_2\right)\Big/\left(\prod_{i\in\mathbb{N}} C_2\right).$$

2. Если $2^\infty \nmid \Omega(\Theta)$, то

$$\mathrm{LIsom}\partial T_\Theta/(\mathrm{LIsom}\,\partial T_\Theta)' \simeq \left(\overline{\prod_{i\in\mathbb{N}}} C_2\right)/N,$$

где N является подгруппой индекса 2 в прямом произведении $\prod\limits_{i\in\mathbb{N}} C_2$, состоящей из бесконечных наборов, имеющих четное число неединичных координат.

Факторгруппы $\overline{\prod\limits_{i\in\mathbb{N}}} C_2/\prod\limits_{i\in\mathbb{N}} C_2$ и $\overline{\prod\limits_{i\in\mathbb{N}}} C_2/N$ наследуют проконечную топологию из группы $\mathrm{LIsom}\partial T_\Theta$. Поэтому они естественным образом могут рассматриваться как метрические группы. Из теоремы 6 получаем

Следствие 2. *Решетка замкнутых нормальных делителей группы $\mathrm{LIsom}\,\partial T_\Theta$ при $2^\infty|\,\Omega(\Theta)$ изоморфна решетке замкнутых подгрупп группы $\overline{\prod\limits_{i\in\mathbb{N}}} C_2/\prod\limits_{i\in\mathbb{N}} C_2$, а при $2^\infty \nmid \Omega(\Theta)$ — решетке замкнутых подгрупп группы $\overline{\prod\limits_{i\in\mathbb{N}}} C_2/N$.*

1. *Григорчук Р. И., Некрашевич В. В., Сущанский В. И.* Автоматы, динамические системы и группы // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 2000. – **231**. – С. 134–214.
2. *Kroshko N. V., Sushchansky V. I.* Direct limits of symmetric and altering groups with strictly diagonal embeddings // Arch. Math. – 1998. – **71**. – P. 173–182.
3. *Lavrenyuk Ya.* On automorphisms of local isometry groups of compact ultrametric spaces // Int. J. Algebra and Computation. – 2005. – **15** (5–6). – P. 1013–1024.
4. *Lavrenyuk Ya. V., Sushchansky V. I.* Automorphisms of homogeneous symmetric groups and hierarchomorphisms of rooted trees // Algebra and Discrete Mathematics. – 2003. – No 4. – P. 33–49.
5. *Сущанский В. И.* Универсальные относительно вложений проконечные группы счетного веса // Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР. – 1989. – **175**. – С. 113–120.
6. *Сущанский В. И.* Нормальное строение групп изометрий полуконечных бэровских метрик. Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры / Ин-т математики АН Украины. – Киев, 1993. – С. 269–289.

Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко
Силезский технический университет, Польша

Поступило в редакцию 13.09.2006