УДК 517.5



Член-кореспондент НАН України **О. І. Степанець, А. Л. Шидліч**

# Екстремальні задачі для інтегралів від невід'ємних функцій

*We investigate the best approximations $e_\sigma(f)$ of the integrals of functions of the spaces $L_p(A, d\mu)$ by the integrals of rank $\sigma$. We find the exact values of the upper bounds of these approximations in the case where the function $f$ is a product of two functions, one of which is fixed and the other one changes in some subset of $L_p(A, d\mu)$. We also obtain, in terms of approximations $e_\sigma(\cdot)$, the necessary and sufficient conditions for a function of the space $L_p(A, d\mu)$ to belong to the space $L_s(A, d\mu)$, $0 < p,\ s < \infty$.*

Нехай $(R^m, d\mu)$, $m \geqslant 1$, — $m$-вимірний евклідів простір точок $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_m)$, наділений $\sigma$-адитивною, $\sigma$-скінченною неперервною мірою $d\mu$, $A$ — $\mu$-вимірна підмножина із $(R^m, d\mu)$, $\mu$-міра якої дорівнює $a$, де $a$ — скінченне число, або ж $a = \infty$: $\mathrm{mes}_\mu A = |A|_\mu = a$, $a \in (0, \infty]$; $Y = Y(A, d\mu)$ — множина всіх заданих на $A$ функцій $y = y(\mathbf{t})$, вимірних відносно міри $d\mu$.

При заданому $p \in (0, \infty)$ через $L_p(A, d\mu)$ позначимо підмножину функцій з $Y(A, d\mu)$, для яких є скінченною величина

$$\|y\|_{L_p(A,d\mu)} = \left(\int\limits_A |y(\mathbf{t})|^p \, d\mu\right)^{1/p}. \tag{1}$$

Відомо, що функціонал $\|\cdot\|_{L_p(A,d\mu)}$, який визначається співвідношенням (1), при $p \geqslant 1$ задає норму, а при $p \in (0, 1)$ — квазінорму на $L_p(A, d\mu)$.

Нехай, далі, $f \in L_1(A, d\mu)$, $\sigma$ — деяке додатне число, і $\Gamma_\sigma = \Gamma_\sigma(A)$ — множина всіх $\mu$-вимірних підмножин $\gamma_\sigma$ з $A$, $\mu$-міра яких дорівнює $\sigma$.

У роботі розглядаються величини

$$e_\sigma(f) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \left| \int\limits_A f(\mathbf{t}) \, d\mu - \int\limits_{\gamma_\sigma} f(\mathbf{t}) \, d\mu \right|, \tag{2}$$

які називаються найкращими наближеннями інтеграла функції $f$ на множині $A$ за допомогою інтегралів рангу $\sigma$, у випадку, коли функція $f$ є добутком двох невід'ємних функцій, одна з яких фіксована, а інша варіюється на деякій підмножині функцій із $L_p(A, d\mu)$.

Отже, нехай $U_p(A)$ — одинична куля простору $L_p(A, d\mu)$:

$$U_p(A) = \{y \in Y(A, d\mu) \colon \|y\|_{L_p(A,d\mu)} \leqslant 1\},$$

$U_p^+(A)$ — підмножина всіх невід'ємних функцій з $U_p(A)$ і $\varphi(\mathbf{x})$ — невід'ємна істотно обмежена на $A$ функція, для якої у випадку, коли множина $A$ необмежена, вимагається, щоб

$$\lim_{|\mathbf{x}| \to \infty} \varphi(\mathbf{x}) = 0. \tag{3}$$

Для заданого $\sigma > 0$ і будь-якої функції $y \in U_p^+(A)$ покладемо

$$\mathcal{E}_\sigma(y) = \mathcal{E}_\sigma(y, \varphi, A, d\mu) \stackrel{\text{df}}{=} \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \left( \int\limits_A \varphi(\mathbf{x}) y(\mathbf{x})\, d\mu - \int\limits_{\gamma_\sigma} \varphi(\mathbf{x}) y(\mathbf{x})\, d\mu \right). \tag{4}$$

Величини вигляду (2) та (4) введені в роботі [1], де, зокрема, було знайдено значення точних верхніх меж величин $\mathcal{E}_\sigma(y)$ на класі $U_1^+(A)$. Ці значення дає таке твердження.

**Теорема A.** *Нехай $\varphi(\mathbf{x})$ — невід'ємна істотно обмежена на $A$ функція, для якої у випадку, коли множина $A$ необмежена, виконується умова (3). Тоді при будь-якому $\sigma < a$ справджується рівність*

$$\mathcal{E}_\sigma(\varphi, 1) \stackrel{\text{df}}{=} \sup_{y \in U_1^+(A)} \mathcal{E}_\sigma(y) = \sup_{\sigma < s \leqslant a} \frac{s - \sigma}{\int\limits_0^s \dfrac{dt}{\overline{\varphi}(t)}}, \tag{5}$$

*де $\overline{\varphi}(t)$ — спадна перестановка функції $\varphi(\mathbf{x})$. При цьому точна верхня межа в правій частині (5) досягається при деякому скінченному значенні $s = s^*$.*

Будемо розглядати величини $\mathcal{E}_\sigma(y)$ при $y \in U_p^+(A)$ для всіх $p \in (0, \infty)$ за умов, які забезпечують існування інтегралів у правій частині співвідношення (4). У випадку, коли $p \geqslant 1$, необхідною і достатньою умовою існування цих інтегралів, згідно з нерівністю Гельдера, є умова на функцію $\varphi$:

$$\|\varphi\|_{L_q(A, d\mu)} < \infty, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{6}$$

Якщо ж $p \in (0, 1)$, то жодними умовами на функцію $\varphi$ уже не можна досягнути збіжності інтегралів у (4). У зв'язку з цим покладаємо

$$\mathcal{U}_p(A) = \mathcal{U}_p(A, d\mu) = \begin{cases} U_p^+(A), & p \in [1, \infty), \\ U_p^+(A) \bigcap L_1(A, d\mu), & p \in (0, 1), \end{cases}$$

і

$$\mathcal{E}_\sigma(\varphi, p) = \sup_{y \in \mathcal{U}_p(A)} \mathcal{E}_\sigma(y), \qquad p \in (0, \infty). \tag{7}$$

**Точні значення величин** $\mathcal{E}_\sigma(\varphi, p)$ дають такі твердження.

**Теорема 1.** *Нехай $p \in (0, 1]$ і $\varphi(\mathbf{x})$ — довільна невід'ємна істотно обмежена на $A$ функція, для якої у випадку, коли множина $A$ необмежена, виконується умова* (3). *Тоді при будь-якому $\sigma \in (0, a)$ справджується рівність*

$$\mathcal{E}_\sigma(\varphi, p) = \sup_{\sigma < s \leqslant a} (s - \sigma) \left( \int\limits_0^s \overline{\varphi}^{-p}(t)\, dt \right)^{-1/p}, \tag{8}$$

*де $\overline{\varphi}(t)$ — спадна перестановка функції $\varphi(\mathbf{x})$. При цьому точна верхня межа в правій частині* (8) *досягається при деякому скінченному значенні $s = s^*$. Точна верхня межа* *в правій частині співвідношення (7) реалізується функцією* $y^* = y^*(\mathbf{t}, \varphi, \sigma, p)$ *з* $\mathcal{U}_p(A)$, *яка визначається рівністю*

$$y^*(\mathbf{t}) = \begin{cases} \left(\varphi^p(\mathbf{t}) \int\limits_E \varphi^{-p}(\mathbf{x})\, d\mu\right)^{-1/p}, & \mathbf{t} \in E, \\ 0, & \mathbf{t} \in A \setminus E, \end{cases}$$

*де* $E$ — *довільна вимірна підмножина множини* $\{\mathbf{t} \in A\colon \varphi(\mathbf{t}) \geqslant \overline{\varphi}(s^* - 0)\}$, $\mathrm{mes}_\mu E = s^*$, *яка містить множину* $\{\mathbf{t} \in A\colon \varphi(\mathbf{t}) > \overline{\varphi}(s^* - 0)\}$.

**Теорема 2.** *Нехай* $p \in (1, \infty)$ *і* $\varphi(\mathbf{x})$ — *довільна невід'ємна істотно обмежена на* $A$ *функція, що задовольняє умову* (6). *Тоді при будь-якому* $\sigma \in (0, a)$ *справджується рівність*

$$\mathcal{E}_\sigma = \mathcal{E}_\sigma(\varphi, p) = \left((s^* - \sigma)^q \left(\int\limits_0^{s^*} \overline{\varphi}^{-p}(t)\, dt\right)^{-q/p} + \int\limits_{s^*}^{a} \overline{\varphi}^q(t)\, dt\right)^{1/q},$$

*де* $\overline{\varphi}(t)$ — *спадна перестановка функції* $\varphi(\mathbf{x})$, *а* $s^*$ — *найбільше на проміжку* $(\sigma, a]$ *число, для якого при всіх* $s \in (\sigma, s^*)$ *виконується нерівність*

$$s - \sigma \leqslant \overline{\varphi}^p(s) \int\limits_0^s \overline{\varphi}^{-p}(t)\, dt.$$

*Таке число* $s^*$ *завжди існує. Точна верхня межа у співвідношенні (7) реалізується функцією* $y^* = y^*(\mathbf{t}, \alpha, \sigma, p)$ *з* $\mathcal{U}_p(A)$, *у якої при* $s^* = a$

$$y^*(\mathbf{t}) = \left(\varphi^p(\mathbf{t}) \int\limits_A \varphi^{-p}(\mathbf{x})\, d\mu\right)^{-1/p}, \qquad \mathbf{t} \in A.$$

*а при* $s^* < a$

$$y^*(\mathbf{t}) = \begin{cases} \varphi^{-1}(\mathbf{t})(s^* - \sigma)^{q/p} \left(\int\limits_E \varphi^{-p}(\mathbf{x})\, d\mu\right)^{-q/p} \mathcal{E}_\sigma^{-1/p}, & \mathbf{t} \in E, \\ \varphi^{q/p}(\mathbf{t}) \mathcal{E}_\sigma^{-1/p}, & \mathbf{t} \in A \setminus E, \end{cases}$$

*де* $E$ — *довільна вимірна підмножина множини* $\{\mathbf{t} \in A\colon \varphi(\mathbf{t}) \geqslant \overline{\varphi}(s^* - 0)\}$, $\mathrm{mes}_\mu E = s^*$, *яка містить множину* $\{\mathbf{t} \in A\colon \varphi(\mathbf{t}) > \overline{\varphi}(s^* - 0)\}$.

Зазначимо, що умови (3) та (6) гарантують у відповідних випадках той факт, що для функції $\varphi(\mathbf{t})$ її функція розподілу $F_\varphi(y)$,

$$F_\varphi(y) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \mathrm{mes}_\mu E_y, \qquad E_y = \{\mathbf{t} \in A\colon \varphi(\mathbf{t}) \geqslant y\}, \qquad y > 0,$$

набуває при будь-якому $y > 0$ тільки скінченні значення з проміжку $[0, a]$. Тому згідно з означенням спадної перестановки функції (див., напр., [1, 2 (гл. X), 3 (гл. 6)]), величина $\overline{\varphi}(t)$ є визначеною при будь-якому $t > 0$.

Твердження, які дають розв'язки аналогічних задач для числових рядів, встановлено в роботах [4–9].

**Про один критерій збіжності інтегралів.** Ідея розгляду величин $e_\sigma(f)$ вигляду (2) бере свій початок від роботи С. Б. Стєчкіна [10], присвяченій абсолютній збіжності ортогональних рядів, в якій знайдені необхідні і достатні умови такої збіжності якраз в термінах величин, інтегральними аналогами яких є величини $e_\sigma(f)$. Важливою частиною цієї роботи є такий результат для числових рядів:

*нехай послідовність $c = \{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ така, що $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 < \infty$. Тоді для того щоб збігався ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k|$, необхідно і достатньо, щоб збігався ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} e_n(c),$$

*де $e_n(c) = \inf\limits_{\gamma_n} \left( \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2 - \sum\limits_{k \in \gamma_n} c_k^2 \right)$, $\gamma_n$ — довільні набори із $n$ різних натуральних чисел.*

Поняття величин $e_\sigma(f)$ дає змогу узагальнити цей результат таким чином. Нехай $f$ — довільна функція з простору $L_p(A, d\mu)$, $p \in (0, \infty)$, а $s$ — деяке додатне відмінне від $p$ число. Ставиться питання про необхідні та достатні умови того, щоб збігався інтеграл

$$\int\limits_A |f(\mathbf{t})|^s \, d\mu, \tag{9}$$

тобто щоб дана функція належала простору $L_s(A, d\mu)$?

У випадку, коли, наприклад, $\mu$ — міра Лебега, $\mathrm{mes}_\mu A < \infty$, а $0 < s \leqslant p$, справедливе включення $L_p(A, d\mu) \subset L_s(A, d\mu)$, і тому інтеграл (9) збігається для довільної функції $f \in L_p(A, d\mu)$. Однак якщо $\mathrm{mes}_\mu A = \infty$, то аналогічне включення не є вірним, і питання про збіжність інтеграла залишалося відкритим.

Відповідь на це питання дає таке твердження.

**Теорема 3.** *Нехай $f$ — довільна функція з простору $L_p(A, d\mu)$, $\mathrm{mes}_\mu A = \infty$. Тоді:*

*1) якщо $0 < s < p < \infty$, то для того щоб збігався інтеграл (9), необхідно і достатньо, щоб збігався інтеграл*

$$\int\limits_0^{\infty} \left( \frac{e_\sigma(|f|^p)}{\sigma} \right)^{s/p} d\sigma,$$

*де $e_\sigma(|f|^p)_p$ — найкраще наближення інтеграла функції $|f|^p$ на множині $A$ за допомогою інтегралів рангу $\sigma$;*

*2) якщо ж $0 < p < s < \infty$, то для збіжності інтеграла (9) необхідно і достатньо, щоб збігався інтеграл*

$$\int\limits_0^{\infty} e_\sigma^{s/p} \left( \frac{\varphi^p(x)}{x} \right) d\sigma,$$

*де $e_\sigma(\varphi^p(x)/x)_p$ — найкраще наближення інтеграла функції $\varphi^p(x)/x$ на проміжку $(0, \infty)$ за допомогою інтегралів рангу $\sigma$, а $\varphi(x)$ — спадна перестановка функції $|f(x)|$ на множині $A$.*

**Наближення функціями експоненціального типу.** Розглянемо ще одне застосування отриманих результатів. Нехай $L_p(\mathbb{R}^m)$ — простір усіх вимірних на $\mathbb{R}^m$, $m \geqslant 1$, за Лебегом функцій $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_m)$ таких, що

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^m)} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x}\right)^{1/p} < \infty, \qquad p \geqslant 1.$$

Для кожної функції $f \in L_2(\mathbb{R}^m)$ через $\widehat{f}(\mathbf{t})$ позначимо перетворення Фур'є:

$$\widehat{f}(\mathbf{t}) = \mathcal{F}(f; \mathbf{t}) = (2\pi)^{-m/2} \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{tx}} d\mathbf{x}.$$

Через $\Omega_2 = \Omega_2(L_2(\mathbb{R}^m))$ позначимо множину всіх вимірних на $\mathbb{R}^m$ функцій $\omega$, для яких добуток $\omega(\mathbf{t})\widehat{f}(\mathbf{t})$ знаходиться в просторі $L_2(\mathbb{R}^m)$ для довільної $f \in L_2(\mathbb{R}^m)$. Зрозуміло, що до множини $\Omega_2$ належать усі функції, істотно обмежені на $\mathbb{R}^m$. Зокрема, до $\Omega_2$ належать істотно обмежені функції $\lambda_\sigma = \lambda_\sigma(\mathbf{t})$, носіями яких є обмежені множини $\gamma_\sigma$ такі, що $\mathrm{mes}\gamma_\sigma = \sigma$, $\sigma > 0$ ($\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma$). Тому для таких функцій $\lambda$ та довільної функції $f \in L_2(\mathbb{R}^m)$ можна розглядати функції $U_{\gamma_\sigma}(f; \lambda)$, для яких

$$\widehat{U}_{\gamma_\sigma}(f; \lambda; \mathbf{t}) = \mathcal{F}(U_{\gamma_\sigma}(f; \lambda)); \mathbf{t}) = \begin{cases} \lambda(\mathbf{t})\widehat{f}(\mathbf{t}), & \mathbf{t} \in \gamma_\sigma; \\ 0, & \mathbf{t} \in \overline{\gamma_\sigma}. \end{cases}$$

Саме функції $U_{\gamma_\sigma}(f; \lambda)$ вибираються в ролі наближаючих агрегатів для функцій з просторів $L_2(\mathbb{R}^m)$. Якщо при цьому $\lambda(\mathbf{t}) \equiv 1$ на $\gamma_\sigma$, тобто якщо $\lambda(\mathbf{t})$ збігається із характеристичною функцією $\chi_{\gamma_\sigma}(\mathbf{t})$ множини $\gamma_\sigma$, то покладають $U_{\gamma_\sigma}(f; \chi_{\gamma_\sigma}) = U_{\gamma_\sigma}(f)$.

Відомо (див., напр., [11, гл. I]), що на просторі $L_2(\mathbb{R}^m)$ оператор $\mathcal{F}$ є унітарним. Тому

$$\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^m)} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^m} |\widehat{f}(\mathbf{t})|^2 d\mathbf{t}\right)^{1/2} = \|\widehat{f}\|_{L_2(\mathbb{R}^m)}.$$

У цьому випадку функції $U_{\gamma_\sigma}(f; \lambda)$ мають вигляд

$$U_{\gamma_\sigma}(f; \lambda; \mathbf{x}) = (2\pi)^{-m/2} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \lambda_\sigma(\mathbf{t})\widehat{f}(\mathbf{t}) e^{i\mathbf{tx}} d\mathbf{t} = (2\pi)^{-m/2} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \check{\lambda}_\sigma(\mathbf{t})\widehat{f}(\mathbf{z}) e^{i\mathbf{tx}} d\mathbf{t}, \tag{10}$$

де

$$\check{\lambda}_\sigma(\mathbf{v}) = \mathcal{F}^{-1}(\lambda_\sigma; \mathbf{v}) = (2\pi)^{-m/2} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \lambda_\sigma(\mathbf{t}) e^{i\mathbf{vt}} d\mathbf{t}.$$

Обґрунтування рівності (10) випливає з відомої теорії Планшереля. Також відомо, що в такому разі функції $U_{\gamma_\sigma}(f; \lambda; \mathbf{x})$ є цілими функціями експоненціального типу (див., напр., [12, гл. V]).

Об'єктами наближень у даному випадку є класи $\psi$-інтегралів усіх функцій з $L_2(\mathbb{R}^m)$, які належать одиничній кулі простору $L_q(\mathbb{R}^m)$. Поняття $\psi$-інтеграла вводиться таким чином [1].

Нехай $\psi = \psi(\mathbf{t})$ — деяка функція з множини $\Omega_2$ і $f \in L_2(\mathbb{R}^m)$. Тоді $\psi$-інтегралом $f$ називається функція $f_\psi = \mathcal{J} f$ з $L_2(\mathbb{R}^m)$, для якої $\widehat{f}_\psi(\mathbf{t}) = \mathcal{F}(f_\psi; \mathbf{t}) = \psi(\mathbf{t})\widehat{f}(\mathbf{t})$. Множину $\psi$-інтегралів усіх функцій з $L_2(\mathbb{R}^m)$, які належать одиничній кулі $U_q(\mathbb{R}^m) = \{\varphi\colon \|\varphi\|_{L_q(\mathbb{R}^m)} \leqslant 1\}$ простору $L_q(\mathbb{R}^m)$, $q \geqslant 1$, позначимо через $\psi U_{q,2}$.

Будемо розглядати такі характеристики, яким у періодичному випадку відповідають величини, пов'язані з найкращим $\sigma$-членним наближенням:

$$e_\sigma(f)_2 = \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} E_{\gamma_\sigma}(f)_2 = \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \inf_{\lambda \in \Omega_2} \|f - U_{\gamma_\sigma}(f; \lambda; \mathbf{x})\|_{L_2(\mathbb{R}^m)},$$

і

$$e_\sigma(\psi U_{q,2})_2 = \sup_{f \in \psi U_{q,2}} e_\sigma(f)_2. \tag{11}$$

У прийнятих позначеннях справедливе таке твердження.

**Теорема 4.** *Нехай $q \in [1,2]$ і $\psi(\mathbf{x})$ — довільна невід'ємна істотно обмежена на $\mathbb{R}^m$, $m \geqslant 1$, функція, для якої $\lim\limits_{|t|\to\infty} |\psi(\mathbf{t})| = 0$. Тоді при будь-якому $\sigma > 0$ справджується рівність*

$$e_\sigma(\psi U_{q,2})_2 = \sup_{s>\sigma} (s - \sigma) \left( \int\limits_0^s \overline{\psi}^{-q}(t)\, dt \right)^{-1/q}, \tag{12}$$

*де $\overline{\psi}(t)$ — спадна перестановка функції $\psi(\mathbf{x})$. При цьому точна верхня межа в правій частині* (12) *досягається при деякому скінченному значенні $s = s^*$. Точна верхня межа в правій частині співвідношення* (11) *реалізується функцією $f^* = f^*(\mathbf{t})$ з $\psi U_{q,2}$, для якої*

$$\widehat{f}^*(\mathbf{t}) = \begin{cases} \left( \int\limits_E \psi^{-q}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^{-1/q}, & \mathbf{t} \in E, \\ 0, & \mathbf{t} \in \mathbb{R}^m \setminus E, \end{cases}$$

*де $E$ — довільна вимірна підмножина множини $\{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^m\colon \psi(\mathbf{t}) \geqslant \overline{\psi}(s^* - 0)\}$, $\mathrm{mes} E = s^*$, яка містить множину $\{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^m\colon \psi(\mathbf{t}) > \overline{\psi}(s^* - 0)\}$.*

Зазначимо, що у випадку, коли $q = 2$, точні значення величин $e_\sigma(\psi U_{q,2})_2$ знайдено в [1].


1. *Степанец А. И.* Экстремальные задачи теории приближений в линейных пространствах // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 10. – С. 1378–1410.
2. *Харди Г. Г., Литтльвуд Д. Е., Полиа Г.* Неравенства. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1948. – 456 с.
3. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближений. – Москва: Наука, 1970. – 320 с.
4. *Степанец А. И.* Аппроксимационные характеристики пространств $S^p_\varphi$ в разных метриках // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 8. – С. 1121–1146.
5. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. Ч. 2 // Праці Ін-ту математики НАН України. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. – Т. 40. – С. 333–368.
6. *Степанець О. І., Шидліч А. Л.* Найкращі $n$-членні наближення $\Lambda$-методами в просторах $S^p_\varphi$ // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 8. – С. 1107–1126.
7. *Шидліч А. Л.* Найкращі $n$-членні наближення $\Lambda$-методами в просторах $S^p_\varphi$ // Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання: Праці Ін-ту математики НАН України. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2003. – Т. 46. – С. 283–306.

8. *Рукасов В. И.* Наилучшие $n$-членные приближения в пространствах с несимметричной метрикой // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 6. – С. 806–816.
9. *Степанець О. І., Шидліч А. Л.* Про одну екстремальну задачу для додатних рядів // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 12. – С. 1677–1683.
10. *Стечкин С. Б.* Об абсолютной сходимости ортогональных рядов // Докл. АН СССР. – 1955. – **102**, № 1. – С. 37–40.
11. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. – Москва: Мир, 1974. – 333 с.
12. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. – Москва: Наука, 1970. – 303 с.

*Інститут математики НАН України, Київ* *Надійшло до редакції 31.07.2006*

УДК 512.9+539.3



**В. М. Чехов, А. В. Пан**

## Про граничні вирази лімітант Кояловича

*(Представлено академіком НАН України В. П. Шевченком)*

*A new theorem about limit expressions for the Koialovich's limitants is formulated and proved. These limit expressions allow us to estimate the solution of an infinite system without use of the successive approximations. Estimations of the solution are made for the problem of bending a thin rectangular clamped plate.*

Метод лімітант було створено Б. М. Кояловичем [1] для оцінок розв'язків регулярних нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Першим прикладом його застосування була парна регулярна нескінченна система, що стосувалася задачі про поперечний згин тонкої прямокутної пластинки із затисненими краями. Огляди розвитку і застосувань методу лімітант наведено в роботах [2, 3].

У даному повідомленні сформульовано і доведено теорему про граничні вирази для лімітант, які дозволяють уникнути застосування методу послідовних наближень щодо оцінок розв'язків нескінченної системи. Ефективність граничних виразів для лімітант оцінено на прикладі задачі про згин прямокутної пластинки із затисненими краями.

Розглядається нескінченна система лінійних алгебраїчних рівнянь з невід'ємними вільними членами ($b_k \geqslant 0$) і невід'ємними ($a_{kn} \geqslant 0$) коефіцієнтами

$$x_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} x_n + b_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

що задовольняють умову регулярності

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} < 1, \qquad k = 1, 2, \ldots .$$