УДК 510.6

А. П. Пынько

Процедуры вывода в секвенциальных исчислениях для конечнозначных логик с определителем равенства

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. А. Летичевским)

Terminated proof procedures in axiomatic extensions of sequent calculi for propositional finitely valued logics with equality determinant are proposed on the basis of logic programming.

Используя методы логического программирования, мы предлагаем завершающиеся процедуры вывода в аксиоматических усилениях секвенциальных исчислений работы [1].

Следуя терминологии, обозначениям и установкам, принятым в работе [1], и фиксируя $L' \subseteq L$ и $W \subseteq \mathrm{Var}$, здесь, в отличие от работы [1], мы предполагаем, что, во-первых, $(\Im, L)$-тип — это выражение вида $\nu(\mu)$, где $\nu \in \Im$ и $\mu \in L$ (а не $\mu \in L \setminus L_0$)[1], во-вторых, для всех $\phi \in \mathrm{Var} \bigcup L_0$, $\partial_{|\Im|}(\phi) := 1$ (а не $\partial_{|\Im|}(\phi) := 0$) и, в-третьих, для всех $\phi \in \Im(\mathrm{Fm}_{L'})$, $\partial^{\Im}(\phi) := \min\{\partial_{|\Im|}(\psi) \mid \psi \in F, \exists \nu \in \Im\colon \phi = \nu(\psi)\}$, где $F := \mathrm{Fm}_{L'}$ (а не $F := \mathrm{Fm}_L$).

Связки языка L представляются функторами, пропозициональные переменные — константами, пропозициональные L-формулы, как следствие, — основными термами сигнатуры $L \bigcup \mathrm{Var}$, последовательности — списками языка Пролог, а произвольная L-секвенция $\Gamma \vdash \Delta$ — основным термом $\mathtt{sq}(\Gamma, \Delta)$, где $\mathtt{sq}$ — бинарный функтор.

Пусть дано множество A и $n \in \omega$. Если $I \subseteq n$, $a \in A^I$ и $i \in I$, то a_i обозначает i-ю проекцию a. Пусть $a \in A^n$. Определим $\overline{a} \in A^n$, полагая $\overline{a}_i := a_{n-1-i}$ для всех $i \in n$. Если $\preceq$ — частичное упорядочение на A, a называется неубывающей (строго возрастающей) относительно $\preceq$, если для всех i, $j \in n$, $i < j \Rightarrow a_i \not\succeq a_j$ ($a_i \prec a_j$). Выражение $b \subseteq (\sqsubseteq)\ a$, где $b \in A^m$ и $m \in \omega$, означает, что существует такая (строго возрастающая относительно $\leqslant$) $j \in n^m$, что $b = a \circ j$, где $a \circ j \in A^m$ и $(a \circ j)_i := a_{j_i}$ для всех $i \in m$. Отношение $\sqsubseteq$ $(\subseteq)$ — частичное (квази)упорядочение на A^*. Если $|A| < \omega$, то $\vec{A}$ обозначает произвольную $s \in A^{|A|}$, такую что $a \subseteq s$ для всех $a \in A$.

Множество всех переменных, входящих в $\Gamma \in \mathrm{Fm}_L^*$, обозначим $\mathrm{Var}(\Gamma)$. Положим, для всякого $V \subseteq \mathrm{Var}$, $\mathrm{Fm}_L(V) := \{\phi \in \mathrm{Fm}_L \mid \mathrm{Var}(\phi) \subseteq V\}$, для всякой $\Gamma \vdash \Delta \in \mathrm{Seq}_L^{(0,0)}$, $\mathrm{Var}(\Gamma \vdash \Delta) := \mathrm{Var}(\Gamma) \bigcup \mathrm{Var}(\Delta)$ и, для всякого $F \subseteq \mathrm{Fm}_L$, $\mathrm{Seq}_F^{(k,l)} := \{\Gamma \vdash \Delta \in \mathrm{Seq}_L^{(k,l)} \mid \Gamma, \Delta \in F^*\}$.

Пусть $\Gamma \vdash \Delta$, $\Theta \vdash \Xi \in \mathrm{Seq}_L^{(0,0)}$. Выражение $\Gamma \vdash \Delta \subseteq (\sqsubseteq)\ \Theta \vdash \Xi$ означает, что $\Gamma \subseteq (\sqsubseteq)$ Θ и $\Delta \subseteq (\sqsubseteq)\ \Xi$, а $\Gamma \vdash \Delta \ll \Theta \vdash \Xi$ — то, что существует такая $\sigma \in \mathrm{Var}(\Theta \vdash \Xi)^{\mathrm{Var}(\Gamma \vdash \Delta)}$, что $(\Gamma \vdash \Delta)[\sigma] \subseteq \Theta \vdash \Xi$. Отношение $\sqsubseteq$ $(\subseteq, \ll)$ — частичное (квази)упорядочение на $\mathrm{Seq}_L^{(0,0)}$.

Пусть ϕ, $\psi \in \mathrm{Fm}_L^n$, где $n \in \omega$. Выражение $\phi \preceq \psi$ означает, что существует такая $\sigma \in \mathrm{Fm}_L(\mathrm{Var}(\phi))^{\mathrm{Var}(\psi)}$, что $\phi = \psi[\sigma]$. Отношение $\preceq$ — квазиупорядочение на Fm_L^n.

Лемма 1. *Пусть* $\phi(p) \in \mathrm{Fm}_L(p) \setminus \mathrm{Fm}_L(\varnothing)$, $\psi \in \mathrm{Fm}_L^2$ *и* $\phi(\psi_0) = \phi(\psi_1)$. *Тогда,* $\psi_0 = \psi_1$.

Доказательство. Индукцией по длине ϕ. Случай $\phi = p$ очевиден. Предположим, что $\phi \neq p$. Тогда, $\phi = \mu(\chi)$, где $\chi(p) \in \mathrm{Fm}_L(p)^n \setminus \mathrm{Fm}_L(\varnothing)^n$, $\mu \in L$, а n — арность μ. Поэтому

[1] При этом доказательство теоремы 1 работы [1] остается в силе.

существует такое $j \in n$, что $\chi_j(p) \in \mathrm{Fm}_L(p) \setminus \mathrm{Fm}_L(\varnothing)$. Кроме того, $\mu(\chi(\psi_0)) = \mu(\chi(\psi_1))$. Тем самым $\chi_j(\psi_0) = \chi_j(\psi_1)$. Тогда, по индукционному предположению, $\psi_0 = \psi_1$.

Следствие 1. *Отношение* $\preceq$ *— частичное упорядочение на* $\mathrm{Fm}_L(p) \setminus \mathrm{Fm}_L(\varnothing)$.

Доказательство. Пусть $\phi(p) \in (\mathrm{Fm}_L(p) \setminus \mathrm{Fm}_L(\varnothing))^2$ и $\phi_{1-i} \preceq \phi_i$ для всех $i \in 2$. Тогда, существует такая $\eta(p) \in (\mathrm{Fm}_L(p) \setminus \mathrm{Fm}_L(\varnothing))^2$, что $\phi_{1-i} = \phi_i(\eta_i)$ для всех $i \in 2$. Тем самым, $\phi_0(p) = \phi_0(\eta_0(\eta_1))$. Тогда, по лемме 1, $p = \eta_0(\eta_1)$. Поэтому $\eta_0 = p$. Тем самым $\phi_0 = \phi_1$.

Пусть $\mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{A}$, где $i \in m \in \omega$. Положим $\mathcal{M}_i := \langle \mathcal{A}_i, D \bigcap A_i \rangle$, где $i \in m$, $\mathsf{M} := \{\mathcal{M}_i\}_{i \in m}$ и $\mathrm{Cn}^{(k,l)}_{\mathsf{M}}(X) := \bigcap\limits_{i \in m} \mathrm{Cn}^{(k,l)}_{\mathcal{M}_i}(X)$, где $X \subseteq \mathrm{Seq}^{(k,l)}_L$. Пусть $\Im$ — определитель равенства, а $\mathcal{T}$ — L'-секвенциальная $\Im$-таблица ранга (k,l) для всех $\mathcal{M}_i$, где $i \in m$ (например, для $\mathcal{M}$; см. сноску 1). Положим $\mathcal{I}_n := \{s \sqsubseteq (\vec{\Im}(p_{i+1}))_{i \in m} \mid n \leqslant |s|\} \bigcup \{\nu \in \Im \mid n = 1\}$, где $n \in 2$. Множество всех минимальных относительно $\ll$ элементов множества, содержащего по одному минимальному относительно $\sqsubseteq$ элементу каждого класса эквивалентности относительно $\ll \bigcap \gg$ множества $\widetilde{\mathrm{Ax}} := \{\Gamma \vdash \Delta \in \mathrm{Cn}^{(0,0)}_{\mathsf{M}}(\varnothing) \mid \Gamma \in \mathcal{I}_k[p/p_{m+1}], \Delta \in \mathcal{I}_l[p/p_{m+k+1}]\}$, обозначим $\widehat{\mathrm{Ax}}$. Положим $\mathrm{Ax} := \{\langle \Phi, \vec{\mathrm{Var}}(\Phi) \rangle \mid \Phi \in \widehat{\mathrm{Ax}}\}$.

Определение 1. $\mathcal{C}$ — секвенциальное L-исчисление ранга (k,l), состоящее из следующих аксиом и правил:

1) $(\mathtt{ax})\Gamma \vdash \Delta \in \mathrm{Seq}^{(0,0)}_{\Im(W)}$, если $\Phi \ll \Gamma \vdash \Delta$ для некоторой $\Phi \in \widehat{\mathrm{Ax}}$;

2) для каждого $\Im$-сложного $(\Im, L')$-типа $\nu(\mu)$, где n — арность μ, $\psi \in \mathrm{Fm}_{L'}(W)^n$, Λ, $\Pi \in \Im(W)^*$, Θ, $\Xi \in \Im(\mathrm{Fm}_{L'}(W))^*$, $|\Pi| + |\Xi| \geqslant l$ в (lr) и $|\Lambda| \geqslant k$ в $(\mathtt{rr})$:

$$(\mathtt{lr})\ \{\Lambda, \Sigma, \Theta \vdash \Pi, \Omega, \Xi \mid \Sigma \vdash \Omega \in \lambda_{\mathcal{T}}(\nu(\mu))[p_{i+1}/\psi_i]_{i \in n}\} \to \Lambda, \nu(\mu(\psi)), \Theta \vdash \Pi, \Xi$$

$$(\mathtt{rr})\ \{\Lambda, \Sigma \vdash \Pi, \Omega, \Xi \mid \Sigma \vdash \Omega \in \rho_{\mathcal{T}}(\nu(\mu))[p_{i+1}/\psi_i]_{i \in n}\} \to \Lambda \vdash \Pi, \nu(\mu(\psi)), \Xi$$

$\mathcal{C}$-Вывод $\Gamma \vdash \Delta \in \mathrm{Seq}^{(k,l)}_{\Im(\mathrm{Fm}_{L'}(W))}$ — это основной терм сигнатуры $L \bigcup \mathrm{Var} \bigcup \{\mathtt{sq}\} \bigcup \omega$ со списковыми и дополнительными символами $\mathtt{g}$, $\mathtt{ax}$, $\mathtt{lr}$ и $\mathtt{rr}$ арностей 3, 4, 4 и 3 вида $\mathtt{g}(\mathtt{sq}(\Gamma, \Delta), \alpha(t), s)$, где $\alpha \in \{\mathtt{ax}, \mathtt{lr}, \mathtt{rr}\}$ и s — список $\mathcal{C}$-выводов посылок некоторого $\Re \in \mathcal{C}$ с заключением $\Gamma \vdash \Delta$ вида (α), причем, если $\alpha = \mathtt{ax}$, то $t_0 \in |\mathrm{Ax}|$, $t_1 \in \mathrm{Var}(\Gamma \vdash \Delta)^{|\vec{\mathrm{Ax}}_{t_0,1}|}$, $t_2 \in |\Gamma|^*$, $t_3 \in |\Delta|^*$ и $\vec{\mathrm{Ax}}_{t_0,0}[\vec{\mathrm{Ax}}_{t_0,1,i}/t_{1,i}]_{i \in |\vec{\mathrm{Ax}}_{t_0,1}|} = \Gamma \circ t_2 \vdash \Delta \circ t_3$, а, если $\alpha = \mathtt{rr}$ $[\mathtt{lr}]$, то $t_0 \in |\Im|$, $\vec{\Im}_{t_0} = \nu$, $t_1 = \mu(\psi)$, $[t_2 = |\Lambda|]$ и $t_j = |\Pi|$, где $j = 2$ [3].

Как известно, если $\mathrm{unif}(\phi) := \{\psi \in \mathrm{Fm}^2_L \mid \phi_0(\psi_0) = \phi_1(\psi_1)\} \neq \varnothing$, где $\phi(p) \in (\mathrm{Fm}_L(p) \setminus \mathrm{Fm}_L(\varnothing))^2$, то частично упорядоченное множество $\langle \mathrm{unif}(\phi), \preceq \rangle / (\preceq \bigcap \succeq)$ имеет наибольший элемент $\mathrm{mgu}(\phi)$[2].

Для всякой $\varphi \in \mathcal{S}(\Im) := \{\nu_0(\phi_0) \in \Im(\mathrm{Fm}_{L'}) \mid \nu \in \Im^2, \phi \in \mathrm{mgu}(\nu) \bigcap \mathrm{Fm}_L(\varnothing)^2\} \subseteq \subseteq_\omega \Im(\mathrm{Fm}_{L'}(\varnothing))$ (см. сноску 2), положим $j(\varphi) := \min\{i \in |\Im| \mid \exists \phi \in \mathrm{Fm}_{L'} \colon \varphi = \vec{\Im}_i(\phi), \partial^{\Im}(\varphi) = = \partial_{|\Im|}(\phi)\} \in |\Im|$. Тогда, существует такая единственная (в силу леммы 1) $\phi_\varphi \in \mathrm{Fm}_{L'}(\varnothing)$, что $\varphi = \vec{\Im}_{j(\varphi)}(\phi_\varphi)$ и $\partial^{\Im}(\varphi) = \partial_{|\Im|}(\phi_\varphi)$. Положим $\mathrm{Sf} := \{\langle \varphi, j(\varphi), \phi_\varphi \rangle \mid \varphi \in \mathcal{S}(\Im)\}$.

Определение 2. Пролог-программа $\mathcal{U}$ состоит из следующих предложений[3]:

$$\mathtt{seq([],W,[],Z,V,g(sq(L,R),ax(K,P,N,M),[]))\ :-reverse(W,L),reverse(Z,R),} \qquad (1)$$

$$\mathtt{axioms(J),nth0(K,J,[sq(A,B),P]),subs(P,V),sub\_num(A,L,N),sub\_num(B,R,M),!.}$$

[2]При этом, $|\mathrm{unif}(\phi)| = 1$, если $\mathrm{mgu}(\phi) \bigcap \mathrm{Fm}_L(\varnothing)^2 \neq \varnothing$.

[3]Определения встроенных в систему SWI-Prolog (см. http://swi.psy.uva.nl/projects/SWI-Prolog/) предикатов succ/2, reverse/2, member/2, nth0/3, union/3 и append/3 опущены.

$$\texttt{seq([F|X], W, Y, Z, V, G) :- pref\_suf(F, K, P), !, left(K, P, F, X, W, Y, Z, V, G).} \quad (2)$$

$$\texttt{seq([], W, [F|Y], Z, V, G) :- pref\_suf(F, K, P), !, right(K, P, F, W, Y, Z, V, G).} \quad (3)$$

$$\texttt{pref\_suf(F, K, P) :- sing\_form(S), member([F, K, P], S).} \quad (4)$$

$$\texttt{pref\_suf(F, K, P) :- eq\_det(I, P), nth0(K, I, F).} \quad (5)$$

$$\texttt{left(K, P, F, X, W, Y, Z, V, g(sq(L, R), lr(K, P, N, M), H)) :- l\_tab(K, P, Q), !,} \quad (6)$$

$$\texttt{premises(X, W, Y, Z, V, Q, H), app\_rev\_len([F|X], W, L, N), app\_rev\_len(Y, Z, R, M).}$$

$$\texttt{left(K, P, F, X, W, Y, Z, V, G) :- union([P], V, U), seq(X, [F|W], Y, Z, U, G).}$$

$$\texttt{right(K, P, F, W, Y, Z, V, g(sq(L, R), rr(K, P, M), H)) :- r\_tab(K, P, Q), !,}$$

$$\texttt{premises([], W, Y, Z, V, Q, H), reverse(W, L), app\_rev\_len([F|Y], Z, R, M).}$$

$$\texttt{right(K, P, F, W, Y, Z, V, G) :- union([P], V, U), seq([], W, Y, [F|Z], U, G).}$$

$$\texttt{premises(X, W, Y, Z, V, [], []).}$$

$$\texttt{premises(X, W, Y, Z, V, [sq(A, B)|Q], [G|H]) :- append(A, X, S), append(B, Y, T),}$$

$$\texttt{seq(S, W, T, Z, V, G), premises(X, W, Y, Z, V, Q, H).}$$

$$\texttt{app\_rev\_len(X, [], X, 0).}$$

$$\texttt{app\_rev\_len(X, [Y|Z], W, M) :- app\_rev\_len([Y|X], Z, W, N), succ(N, M).}$$

$$\texttt{sub\_num([], X, []).}$$

$$\texttt{sub\_num([X|Y], Z, [N|M]) :- nth0(N, Z, X), !, sub\_num(Y, Z, M).}$$

$$\texttt{subs([], X).}$$

$$\texttt{subs([X|Y], Z) :- member(X, Z), subs(Y, Z).}$$

Определение 3. Пусть $|L'| < \omega$. База данных $\mathcal{BD}$ состоит из следующих фактов:

$$\texttt{eq\_det}(\vec{\Im}[p/\mathtt{P}], \mathtt{P}), \quad (7)$$

$$\texttt{axioms}(\vec{\mathrm{Ax}}[p_{i+1}/\mathtt{P}i]_{i \in m+k+l}), \quad (8)$$

$$\texttt{sing\_form}(\vec{\mathrm{Sf}}), \quad (9)$$

$$\texttt{l\_tab}(j, \mu(\langle \mathtt{P}i \rangle_{i \in n}), \vec{\lambda}_{\mathcal{T}}(\nu(\mu))[p_{i+1}/\mathtt{P}i]_{i \in n}). \quad (10)$$

$$\texttt{r\_tab}(j, \mu(\langle \mathtt{P}i \rangle_{i \in n}), \vec{\rho}_{\mathcal{T}}(\nu(\mu))[p_{i+1}/\mathtt{P}i]_{i \in n})$$

для каждого $\Im$-сложного $(\Im, L')$-типа $\nu(\mu)$, где n — арность μ, $j \in |\Im|$ и $\vec{\Im}_j = \nu$. Положим $\mathcal{P} := \mathcal{U} \bigcup \mathcal{BD}$.

Лемма 2. *Пусть $\phi(p) \in \mathrm{Fm}_L(p) \setminus \mathrm{Fm}_L(\varnothing)$ и $\psi \in \mathrm{Fm}_L$. Тогда, $\partial_{|\Im|}(\phi(\psi)) \geqslant \partial_{|\Im|}(\psi)$. Кроме того, $\partial_{|\Im|}(\phi(\psi)) \neq \partial_{|\Im|}(\psi)$ и, в частности, $\phi(\psi) \neq \psi$, если $\phi \neq p$.*

Доказательство. Индукцией по длине ϕ. Случай $\phi = p$ очевиден. Допустим, что $\phi \neq p$. Тогда существуют такие n-арная $\mu \in L$, где $n \in \omega$, и $\chi(p) \in \mathrm{Fm}_L(p)^n \setminus \mathrm{Fm}_L(\varnothing)^n$, что $\phi = \mu(\chi)$. Поэтому существует такое $j \in n$, что $\chi_j \in \mathrm{Fm}_L(p) \setminus \mathrm{Fm}_L(\varnothing)$. Тогда, по индукционному предложению, $\partial_{|\Im|}(\phi(\psi)) = 1 + |\Im| \cdot \sum\limits_{i\in n} \partial_{|\Im|}(\chi_i(\psi)) > |\Im| \cdot \sum\limits_{i\in n} \partial_{|\Im|}(\chi_i(\psi)) \geqslant \sum\limits_{i\in n} \partial_{|\Im|}(\chi_i(\psi)) \geqslant \geqslant \partial_{|\Im|}(\chi_j(\psi)) \geqslant \partial_{|\Im|}(\psi)$, поскольку $|\Im| \geqslant 1$.

Лемма 3. *Пусть* $\phi(p) \in (\mathrm{Fm}_L(p)\backslash\mathrm{Fm}_L(\varnothing))^2$ *и* $\langle\psi,\psi\rangle \in \mathrm{unif}(\phi)\backslash\mathrm{Fm}_L(\varnothing)^2$. *Тогда* $\phi_0 = \phi_1$.

Доказательство. Индукцией по сумме длин ϕ_0 и ϕ_1. По лемме 2, $\phi_0 = p \iff \phi_1 = p$. Случай $\phi_0 = p = \phi_1$ очевиден. Предположим, что $\phi_0 \neq p \neq \phi_1$. Тогда существуют такие $\mu \in L^2$, $n \in \omega^2$ и $\chi(p) \in \prod\limits_{i\in 2}(\mathrm{Fm}_L(p)^{n_i}\backslash\mathrm{Fm}_L(\varnothing)^{n_i})$, что n_i-арность μ_i и $\phi_i = \mu_i(\chi_i)$ для каждого $i \in 2$. Тем самым $\mu_0(\chi_0(\psi)) = \mu_1(\chi_1(\psi))$. Поэтому $\mu_0 = \mu_1$, $n_0 = n_1$ и $\chi_0(\psi) = \chi_1(\psi)$. Для каждого $i \in 2$, положим $I_i := \{j \in n_0 \mid \chi_{i,j} \notin \mathrm{Fm}_L(\varnothing)\}$. От противного докажем, что $I_0 = I_1$. Предположим, что $I_0 \neq I_1$. Тогда $I_{1-i} \nsubseteq I_i$ для некоторого $i \in 2$. Возьмем произвольное $j \in I_{1-i}\backslash I_i$. Тогда $\chi_{1-i,j}(\psi) = \chi_{i,j}$ и, тем самым, $\psi \in \mathrm{Fm}_L(\varnothing)$. Это противоречие показывает, что $I_0 = I_1$. Тогда $\chi_{0,j} = \chi_{1,j}$ для всех $j \in n_0 \setminus I_0$. Кроме того, $\chi_{0,j}(\psi) = \chi_{1,j}(\psi)$ для всех $j \in I_0$. Тем самым, по индукционному предположению, $\chi_{0,j} = \chi_{1,j}$ для всех $j \in I_0$. Таким образом, $\chi_0 = \chi_1$ и, тем самым, $\phi_0 = \phi_1$.

Лемма 4. *Пусть* $\phi(p) \in (\mathrm{Fm}_L(p) \setminus \mathrm{Fm}_L(\varnothing))^2$ *и* $\mathrm{unif}(\phi) \setminus \mathrm{Fm}_L(\varnothing)^2 \neq \varnothing$. *Тогда,* $\phi_{1-i} \preceq \phi_i$ *для некоторого* $i \in 2$.

Доказательство. Индукцией по сумме длин ϕ_0 и ϕ_1. Случай, когда $\phi_i = p$ для некоторого $i \in 2$, очевиден. Допустим, что $\phi_i \neq p$ для каждого $i \in 2$. Возьмем произвольную $\psi \in \mathrm{unif}(\phi) \setminus \mathrm{Fm}_L(\varnothing)^2$. Тогда, $\psi \in (\mathrm{Fm}_L \setminus \mathrm{Fm}_L(\varnothing))^2$. Кроме того, существуют такие $\mu \in L^2$, $n \in \omega^2$ и $\chi(p) \in \prod\limits_{i\in 2}(\mathrm{Fm}_L(p)^{n_i} \setminus \mathrm{Fm}_L(\varnothing)^{n_i})$, что n_i — арность μ_i и $\phi_i = \mu_i(\chi_i)$ для каждого $i \in 2$. Тем самым $\mu_0(\chi_0(\psi_0)) = \mu_1(\chi_1(\psi_1))$. Поэтому $\mu_0 = \mu_1$, $n_0 = n_1$ и $\chi_0(\psi_0) = \chi_1(\psi_1)$. Для каждого $i \in 2$ положим $I_i := \{j \in n_0 \mid \chi_{i,j} \notin \mathrm{Fm}_L(\varnothing)\} \neq \varnothing$. От противного докажем, что $I_0 = I_1$. Предположим, что $I_0 \neq I_1$. Тогда $I_{1-i} \nsubseteq I_i$ для некоторого $i \in 2$. Возьмем произвольное $j \in I_{1-i} \setminus I_i$. Тогда $\chi_{1-i,j}(\psi_{1-i}) = \chi_{i,j}$ и, тем самым, $\psi_{1-i} \in \mathrm{Fm}_L(\varnothing)$. Это противоречие показывает, что $I_0 = I_1$. Тогда $\chi_{0,j} = \chi_{1,j}$ для всех $j \in n_0 \setminus I_0$. Кроме того, $\chi_{0,j}(\psi_0) = \chi_{1,j}(\psi_1)$ для всех $j \in I_0$. Тем самым, по индукционному предположению, для каждого $j \in I_0$ существует такое $i \in 2$, что $\chi_{1-i,j} \preceq \chi_{i,j}$. Докажем от противного, что существует такое $i \in 2$, что $\chi_{1-i,j} \preceq \chi_{i,j}$ для каждого $j \in I_0$. Предположим, что существует такая $j \in I_0^2$, что $\chi_{1-i,j_i} \npreceq \chi_{i,j_i}$ для каждого $i \in 2$. Тогда $\chi_{i,j_i} \preceq \chi_{1-i,j}$ для каждого $i \in 2$. Поэтому существует такая $\eta(p) \in (\mathrm{Fm}_L(p) \setminus \mathrm{Fm}_L(\varnothing))^2$, что $\chi_{i,j_i} = \chi_{1-i,j_i}(\eta_i)$ для каждого $i \in 2$. Тогда $\chi_{1-i,j_i}(\psi_{1-i}) = \chi_{i,j_i}(\psi_i) = \chi_{1-i,j_i}(\eta_i(\psi_i))$ для каждого $i \in 2$. По лемме 1, это дает $\psi_{1-i} = \eta_i(\psi_i)$ для каждого $i \in 2$. Таким образом, $\psi_0 = \eta_1(\eta_0(\psi_0))$. По лемме 2, поскольку $\eta_1(\eta_0) \in \mathrm{Fm}_L(p) \setminus \mathrm{Fm}_L(\varnothing)$, указанное равенство дает $\eta_1(\eta_0) = p$. Тем самым $\eta_1 = p$. Поэтому $\chi_{1,j_1} = \chi_{0,j_1}$. Это противоречит предположению $\chi_{0,j_1} \npreceq \chi_{1,j_1}$. Таким образом, существует такое $i \in 2$, что $\chi_{1-i,j} \preceq \chi_{i,j}$ для каждого $j \in I_0$. Поэтому существует такая $\xi(p) \in (\mathrm{Fm}_L(p) \setminus \mathrm{Fm}_L(\varnothing))^{I_0}$, что $\chi_{1-i,j} = \chi_{i,j}(\xi_j)$ для каждого $j \in I_0$. Тогда $\chi_{i,j}(\psi_i) = \chi_{1-i,j}(\psi_{1-i}) = \chi_{i,j}(\xi_j(\psi_{1-i}))$ для всех $j \in I_0$. Тем самым, по лемме 1, $\psi_i = \xi_j(\psi_{1-i})$ для всех $j \in I_0$. Далее, поскольку $I_0 \neq \varnothing$, существует $j' \in I_0$. Тогда для всех $j \in I_0$, $\xi_j(\psi_{1-i}) = \psi_i = \xi_{j'}(\psi_{1-i})$. По лемме 3, это дает $\xi_j = \xi_{j'}$ для всех $j \in I_0$. Таким образом, $\phi_{1-i} = \phi_i(\xi_{j'})$ и, тем самым, $\phi_{1-i} \preceq \phi_i$.

Теорема 1. *Предположим, что* $\vec{\Im}$ *— последовательность, неубывающая относительно* $\preceq$[4]. *Пусть* $\Gamma \vdash \Delta \in \mathrm{Seq}^{(k,l)}_{\Im(\mathrm{Fm}_{L'}(W))}$. *При* $|L'| < \omega$, *запрос* $\mathtt{seq}(\Gamma, [], \Delta, [], [], \mathtt{G})$ *получает*

[4] Учитывая следствие 1 и тот факт, что $\Im \subseteq \mathrm{Fm}_L(p) \setminus \mathrm{Fm}_L(\varnothing)$, такая $\vec{\Im}$ всегда существует.

в программе $\mathcal{P}$ положительный ответ с решением $\mathtt{G} = \mathcal{C}$*-вывод* $\Gamma \vdash \Delta$*, если* $\Gamma \vdash \Delta \in$ $\in \mathrm{Cn}^{(k,l)}_{\mathsf{M}}(\varnothing)$*, и отрицательный ответ — в противном случае. В частности,* $\Gamma \vdash \Delta$ *имеет* $\mathcal{C}$*-вывод тогда и только тогда, когда* $\Gamma \vdash \Delta \in \mathrm{Cn}^{(k,l)}_{\mathsf{M}}(\varnothing)$.

Доказательство. Запрос вида $\mathtt{seq}(\Gamma, \Theta, \Delta, \Xi, \vec{V}, \mathtt{G})$, где Γ, $\Delta \in \Im(\mathrm{Fm}_{L'}(W))^*$, Θ, $\Xi \in$ $\in \Im(W)^*$, $|\Gamma| + |\Theta| \geqslant k$, $|\Delta| + |\Xi| \geqslant l$, а $V = \mathrm{Var}(\Theta \vdash \Xi)$, назовем каноническим, причем $\overline{\Theta}$, $\Gamma \vdash \overline{\Xi}$, Δ будем называть его характеристической секвенцией, а $\partial(\Gamma \vdash \Delta)$ — его степенью, индукцией по которой докажем, что он получает в $\mathcal{P}$ положительный ответ с решением $\mathtt{G} = \mathcal{C}$-вывод его характеристической секвенции, если она принадлежит $\mathrm{Cn}^{(k,l)}_{\mathsf{M}}(\varnothing)$, и отрицательный ответ — в противном случае.

Предположим, что $\partial(\Gamma \vdash \Delta) = 0$. Тогда $\Gamma = \Delta = []$. Поэтому к рассматриваемому каноническому запросу применяется только правило (1). Учитывая факт (8), данный канонический запрос получает в $\mathcal{P}$ положительный ответ с решением $\mathtt{G} = \mathcal{C}$-вывод его характеристической секвенции, если она принадлежит пункту 1 определения 1, и отрицательный ответ — в противном случае. Очевидно, что секвенции пункта 1 определения 1 принадлежат $\mathrm{Cn}^{(k,l)}_{\mathsf{M}}(\varnothing)$. Предположим, что $\overline{\Theta} \vdash \overline{\Xi} \in \mathrm{Cn}^{(k,l)}_{\mathsf{M}}(\varnothing)$. В силу аргументации предпоследнего абзаца с. 72 работы [1] для каждого $i \in m$ существует такая $\Lambda_i \vdash \Pi_i \in \mathrm{Cn}^{(0,0)}_{\mathcal{M}_i}(\varnothing)$, что $\Lambda_i \vdash \Pi_i \sqsubseteq \vec{\Im}(p_{i+1}) \vdash \vec{\Im}(p_{i+1})$ и $\Lambda_i \vdash \Pi_i \ll \overline{\Theta} \vdash \overline{\Xi}$. Если k $(l) = 1$ и $(\Lambda_i)_{i\in m} = []$ $((\Pi_i)_{i\in m} = [])$, то Θ $(\Xi) = (\nu(v), \Upsilon)$ для некоторых $\nu \in \Im$ и $v \in V$, и в этом случае полагаем $\Lambda := \nu(p_{m+1})$ $(\Pi := \nu(p_{m+k+1}))$, а в противном — $\Lambda := (\Lambda_i)_{i\in m}$ $(\Pi := (\Pi_i)_{i\in m})$. Тогда $\overline{\Theta} \vdash \overline{\Xi} \gg \Lambda \vdash \Pi \in \widehat{\mathrm{Ax}}$. Поэтому $\Phi \ll \Lambda \vdash \Pi$ для некоторой $\Phi \in \widehat{\mathrm{Ax}}$. Таким образом, $\overline{\Theta} \vdash \overline{\Xi}$ принадлежит пункту 1 определения 1, что завершает рассмотрение канонических запросов степени 0.

Теперь предположим, что $\partial(\Gamma \vdash \Delta) > 0$. Тогда $|\Gamma| + |\Delta| > 0$. Допустим, что $|\Gamma| > 0$, т. е. $\Gamma = (\varphi, \Upsilon)$ для некоторой $\varphi \in \Im(\mathrm{Fm}_{L'}(W))$. (Случай, когда $|\Gamma| = 0$ и, тем самым, $|\Delta| > 0$, рассматривается аналогично.) Тогда к рассматриваемому каноническому запросу применяется только правило (2), что приводит к производному запросу $\mathtt{pref\_suf}(\varphi, \mathtt{K}, \mathtt{P})$. Сначала к данному запросу применяется правило (3), что приводит (учитывая факт (9)) к производному запросу $\mathtt{member}([\varphi, \mathtt{K}, \mathtt{P}], \vec{\mathrm{Sf}})$.

Пусть $\varphi \in \mathcal{S}(\Im)$. Тогда запрос $\mathtt{member}([\varphi, \mathtt{K}, \mathtt{P}], \vec{\mathrm{Sf}})$ (и, тем самым, $\mathtt{pref\_suf}(\varphi, \mathtt{K}, \mathtt{P})$) получает в $\mathcal{P}$ положительный ответ с решением $\mathtt{K} = j(\varphi)$ и $\mathtt{P} = \phi_\varphi$.

Предположим, что $\varphi \notin \mathcal{S}(\Im)$. Тогда запрос $\mathtt{member}([\varphi, \mathtt{K}, \mathtt{P}], \vec{\mathrm{Sf}})$ получает в $\mathcal{P}$ отрицательный ответ. Поэтому к запросу $\mathtt{pref\_suf}(\varphi, \mathtt{K}, \mathtt{P})$ применяется правило (4). Учитывая факт (7) и то, что $\Im|\varphi := \{\eta(p) \in \Im \mid \exists \xi \in \mathrm{Fm}_L \colon \varphi = \eta(\xi)\} \neq \varnothing$ (поскольку $p \in \Im|\varphi$), данный запрос получает в $\mathcal{P}$ положительный ответ с решением $\mathtt{K} = j$ и $\mathtt{P} = \phi$, где $j = \min\{i \in$ $\in |\Im| \mid \vec{\Im}_i \in \Im|\varphi\} \in |\Im|$, $\phi \in \mathrm{Fm}_L(W)$, $\varphi = \nu(\phi)$, а $\nu := \vec{\Im}_j$. Покажем, что $\phi \in \mathrm{Fm}_{L'}$ и $\partial^{\Im}(\varphi) = \partial_{|\Im|}(\phi)$. Докажем от противного, что $\Im|\varphi$ является цепью относительно $\preceq$. Предположим, что существует такая $\eta(p) \in (\Im|\varphi)^2$, что $\eta_{1-i} \not\preceq \eta_i$ для всех $i \in 2$. Тогда, существует такая $\xi \in \mathrm{Fm}^2_L$, что $\eta_0(\xi_0) = \varphi = \eta_1(\xi_1)$. Тем самым $\xi \in \mathrm{unif}(\eta) \neq \varnothing$. По лемме 4, $\varnothing \neq \mathrm{mgu}(\eta) \subseteq \mathrm{unif}(\eta) \subseteq \mathrm{Fm}_L(\varnothing)^2$. В силу сноски 4 $\xi \in \mathrm{mgu}(\eta) \bigcap \mathrm{Fm}_L(\varnothing)^2$. Таким образом, $\varphi \in \mathcal{S}(\Im)$. Это противоречие доказывает, что $\Im|\varphi$ является цепью относительно $\preceq$. Рассмотрим такие $\xi \in \mathrm{Fm}_{L'}$ и $\eta(p) \in \Im$, что $\varphi = \eta(\xi)$. Тогда $\eta \in \Im|\varphi$. Возьмем такое $i \in |\Im|$, что $\vec{\Im}_i = \eta$. Тогда $j \leqslant i$. Поскольку $\vec{\Im}$ — последовательность, неубывающая относительно $\preceq$, а $\Im|\varphi$ — цепь относительно $\preceq$, $\nu \preceq \eta$, т. е., $\nu = \eta(\tau)$, где $\tau(p) \in \mathrm{Fm}_L(p) \setminus \mathrm{Fm}_L(\varnothing)$. Тем самым $\eta(\xi) = \varphi = \nu(\phi) = \eta(\tau(\phi))$. По лемме 1, это дает $\xi = \tau(\phi)$. Поэтому $\phi \in \mathrm{Fm}_{L'}$. Кроме того, по лемме 2, $\partial_{|\Im|}(\phi) \leqslant \partial_{|\Im|}(\tau(\phi)) = \partial_{|\Im|}(\xi)$. Таким образом, $\partial^{\Im}(\varphi) = \partial_{|\Im|}(\phi)$.

Итак, в обоих случаях запрос $\mathtt{pref\_suf}(\varphi,\mathtt{K},\mathtt{P})$ получает в $\mathcal{P}$ положительный ответ с решением $\mathtt{K}=j$ и $\mathtt{P}=\phi$, где $j \in |\Im|$, $\phi \in \mathrm{Fm}_{L'}(W)$, $\varphi = \nu(\phi)$, $\nu := \vec{\Im}_j$ и $\partial^{\Im}(\varphi) = \partial_{|\Im|}(\phi)$. Учитывая предикат отсечения в (2), рассматриваемый канонический запрос получает в $\mathcal{P}$ отрицательный (положительный) ответ (с решением $\mathtt{G} = t$, где t — произвольный терм), если производный запрос $\mathtt{left}(j,\phi,\varphi,\Upsilon,\Theta,\Delta,\Xi,\vec{V},\mathtt{G})$ получает в $\mathcal{P}$ отрицательный (положительный) ответ (с тем же решением $\mathtt{G} = t$). Сначала к данному производному запросу применяется правило (5), что приводит к производному запросу $\mathtt{l\_tab}(j,\phi,\mathtt{Q})$.

Предположим, что $\phi \notin \mathrm{Var}$. Тогда, поскольку $\phi \in \mathrm{Fm}_{L'}(W)$, $\phi = \mu(\psi)$, где $\mu \in L'$, $\psi \in \mathrm{Fm}_{L'}(W)^n$, а n — арность μ. Используя равенство $\partial^{\Im}(\varphi) = \partial_{|\Im|}(\phi)$ и аргументацию первых семи предложений с. 73 работы [1] (которая остается в силе для произвольного $n \in \omega$ и при переопределенных здесь функциях $\partial_{|\Im|}$ и $\partial^{\Im}$), мы видим, что $(\Im, L')$-тип $\nu(\mu)$ является $\Im$-сложным. Тогда, учитывая факты вида (10), запрос $\mathtt{l\_tab}(j,\phi,\mathtt{Q})$ получает в $\mathcal{P}$ положительный ответ с решением $\mathtt{Q}=\vec{\lambda}_{\mathcal{T}}(\nu(\mu))[p_{i+1}/\psi_i]_{i\in n}$. Учитывая предикат отсечения в (5), рассматриваемый канонический запрос получает в $\mathcal{P}$ отрицательный (положительный) ответ (с решением $\mathtt{G} = \mathcal{C}$-вывод его характеристической секвенции), если один (каждый) из производных канонических запросов вида $\mathtt{seq}((\Sigma,\Upsilon),\Theta,(\Omega,\Delta),\Xi,\vec{V},\mathtt{G})$, где $\Sigma \vdash \Omega \in \lambda_{\mathcal{T}}(\nu(\mu))[p_{i+1}/\psi_i]_{i\in n}$, получает в $\mathcal{P}$ отрицательный (положительный) ответ (с решением $\mathtt{G} = \mathcal{C}$-вывод его характеристической секвенции). В силу равенства (1) работы [1], характеристическая секвенция рассматриваемого канонического запроса принадлежит $\mathrm{Cn}^{(k,l)}_{\mathsf{M}}(\varnothing)$ тогда и только тогда, когда характеристические секвенции всех указанных производных канонических запросов принадлежат $\mathrm{Cn}^{(k,l)}_{\mathsf{M}}(\varnothing)$. Наконец, используя равенство $\partial^{\Im}(\varphi) = \partial_{|\Im|}(\phi)$ и аргументацию восьмого и десятого предложений с. 73 работы [1] (которая остается в силе для произвольного $n \in \omega$ и при переопределенных здесь функциях $\partial_{|\Im|}$, $\partial^{\Im}$ и ∂), мы видим, что степень рассматриваемого канонического запроса больше степени каждого из указанных производных. Тем самым индукция по степени канонических запросов завершает анализ случая $\phi \notin \mathrm{Var}$.

Теперь допустим, что $\phi \in \mathrm{Var}$. Тогда, поскольку $\phi \in \mathrm{Fm}_{L'}(W)$, $\phi \in W$ и, поэтому, $\varphi \in \Im(W)$. Кроме того, учитывая все факты вида (10), запрос $\mathtt{l\_tab}(j,\phi,\mathtt{Q})$ получает в $\mathcal{P}$ отрицательный ответ. Тем самым к запросу $\mathtt{left}(j,\phi,\varphi,\Upsilon,\Theta,\Delta,\Xi,\vec{V},\mathtt{G})$ применяется правило (6). При этом рассматриваемый канонический запрос получает в $\mathcal{P}$ отрицательный (положительный) ответ (с решением $\mathtt{G} = t$, где t — произвольный терм), если производный канонический запрос $\mathtt{seq}(\Upsilon,(\varphi,\Theta),\Delta,\Xi,\vec{U},\mathtt{G})$, где $U = \{\phi\} \bigcup V$, степени $\partial(\Upsilon \vdash \Delta) < \partial(\Gamma \vdash \Delta)$, поскольку $\partial^{\Im}(\varphi) = \partial_{|\Im|}(\phi) = 1$, получает в $\mathcal{P}$ отрицательный (положительный) ответ (с тем же решением $\mathtt{G} = t$). Кроме того, характеристическая секвенция рассматриваемого канонического запроса совпадает с характеристической секвенцией указанного производного. Тем самым индукция по степени канонических запросов завершает рассмотрение канонических запросов степени больше 0.

Таким образом, равенства (1) и (2) работы [1] и конечность множества всех связок, входящих в произвольную L-секвенцию, завершают доказательство.

Замечание 1. Следуя примеру 2 работы [1] при $\neg \in L'$ и $p \in W$ и полагая $\vec{\Im} := (p, \neg p)$, $m := 1$ и $\mathcal{A}_0 := \mathcal{A}$, мы видим, что запрос $\mathtt{seq}([p],[],[\neg\neg p],[],[],\mathtt{G})$ получает отрицательный ответ в $\mathcal{P}$, в то время как $p \vdash \neg\neg p \in \mathrm{Cn}^{(k,l)}_{\mathsf{M}}(\varnothing)$ при $\neg\neg a = a$ для всех $a \in A$. Таким образом, предположение о том, что $\vec{\Im}$ должна быть последовательностью, неубывающей относительно $\preceq$, является существенным для истинности теоремы 1.

Замечание 2. Пусть $m := 1$, $\mathcal{A}_0 := \mathcal{A}$, $\supset \in L'$ и $\perp \in L'_0$, где $\supset$, A и D заданы примером 3 работы [1] при $n \geqslant 4$, а $\perp := 0$. Определяя производную унарную связку $\neg$, положив $\neg p := p \supset \perp$, мы имеем $\neg a = 1 - a$ для всех $a \in A$. Тогда, в соответствии с примером 3 работы [1], существует такой определитель равенства $\Im$ для $\mathcal{M}$, что $\neg p, 2 \otimes p \in \Im$. Отметим, что $2 \otimes p \not\preceq \neg p$. Поэтому $\preceq' := \preceq \bigcup \{\langle \nu, \nu' \rangle \in \Im^2 \mid \nu \preceq \neg p, 2 \otimes p \preceq \nu'\}$ — частичное упорядочение на $\Im$. Тогда существует последовательность $\vec{\Im}$, неубывающая относительно $\preceq'$ и, тем самым, относительно $\preceq \subseteq \preceq'$. При этом $\neg p \prec' 2 \otimes p$ и, поэтому, $\neg p = \vec{\Im}_i$ и $2 \otimes p = \vec{\Im}_j$, где i, $j \in |\Im|$ и $i < j$. Поскольку $\vdash 2 \otimes p_1 \in \mathrm{Cn}^{(0,l)}_{\mathcal{M}}(\vdash \neg(p_1 \supset p_2))$, учитывая сноску 1, существует такая L'-секвенциальная $\Im$-таблица $\mathcal{T}$ ранга (k, l) для $\mathcal{M}$, что $\vdash 2 \otimes p_1 \in \rho_{\mathcal{T}}(\neg(\supset))$. Тогда выполнение запроса $\mathtt{seq}([], [], [2 \otimes \perp], [], [], \mathtt{G})$ в Пролог-программе $\mathcal{P}'$, полученной из $\mathcal{P}$ удалением правила (3) или факта (9), приводит к тому же самому производному запросу, что влечет незавершаемость Пролог-программы $\mathcal{P}'$ на данном запросе.

Таким образом, наличие правила (3) и факта (9) в Пролог-программе $\mathcal{P}$ является существенным для истинности теоремы 1.

1. *Пынько А. П.* Секвенциальные исчисления для конечнозначных логик с определителем равенства // Доп. НАН України. – 2003. – № 8. – С. 69–75.

Институт кибернетики им. В. М. Глушкова
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 30.08.2006

УДК 517.9

В. В. Семенов, М. В. Кацев

Лінійний варіаційний принцип в опуклій максимізації

(Представлено членом-кореспондентом НАН України С. І. Ляшком)

We prove that, for any convex, Lipschitz, and lsc function f defined on a weakly compact convex set X in a Banach space E and for any $\varepsilon > 0$, there is $x^* \in E^*$ with $\|x^*\|_{E^*} < \varepsilon$ such that $f + x^*$ attains its supremum on X.

Відомо, що у рефлексивному банаховому просторі опуклий напівнеперервний знизу функціонал[1] досягає мінімуму на довільній опуклій замкненій та обмеженій множині [1]. Але для задачі максимізації напівнеперервного знизу опуклого функціоналу немає такої елегантної теореми існування. Вже у нескінченновимірному гільбертовому просторі існують опуклі замкнені та обмежені множини, які не містять елемента з максимальною нормою. А завдяки теоремі Джозефсона–Ніссенцвейга [2] у довільному нескінченновимірному лінійному нормованому просторі можна побудувати неперервний опуклий функціонал, не обмежений зверху на замкненій одиничній кулі[2].

[1]Усі функціонали вважаємо власними.

[2]Це спостереження було зроблено у бакалаврській роботі студентом Куриленком Юрієм (факультет кібернетики Київського національного університету ім. Тараса Шевченка).