УДК 517.95:519.86

Член-кореспондент НАН України **В. В. Скопецький, В. А. Стоян**

Про ідентифікаційну модель динаміки дискретного спостережуваного неоднорідно-розподіленого просторово-часового процесу

A pseudoinverse approach to constructing the integral models of spatio-temporal distributed systems by a discretely observed state and an externally distributed dynamic disturbance has been offered. The problem of control over these systems has been solved. The results obtained are illustrated.

Методи лінійної алгебри [1, 2], узагальнені [3, 4] на системи інтегральних та функціональних перетворень, в поєднанні з ідеями роботи [5] дозволили побудувати [6, 7] теорію математичного моделювання динамічних систем з розподіленими параметрами при неповноті даних про їх початково-крайовий стан. Невід'ємною частиною методики [6, 7] є наявність математичної моделі досліджуваного процесу, яка описується системою диференціальних співвідношень. Використання та практична реалізація результатів робіт [4, 6] при розв'язанні обернених задач динаміки розподілених просторово-часових процесів значно спрощується для систем, функціонування яких описується інтегральними моделями.

Побудові таких моделей та ілюстрації методики [6, 7] розв'язання задач керування ними і присвячується дана робота. В основу дослідження покладені математичні результати [8] по ідентифікації алгебраїчно перетворюючих систем та методика їх узагальнення, викладена в [9]. Побудовані інтегральні моделі розподілених просторово-часових процесів, які за дискретно спостережуваним станом та розподіленими просторово-часовими збуреннями визначають стан процесу в замкненій просторово-часовій області.

1. Розглядатимемо розподілений просторово-часовий процес, стан $y(s)$ якого вивчається в точках $s_1^*, \ldots, s_L^*$ просторово-часової області

$$S_0^T = \{s = (x, t)\colon x \in S_0 \subset R^n,\ t \in [0, T]\}$$

при умові, що викликаний він дією доступних для спостережень розподілених в області $S \subseteq S_0^T$ зовнішньо-динамічних збурень $u(s)$. Для випадків, коли з урахуванням початкового стану процесу та особливостей граничного впливу на нього оточуючого середовища відома функція Гріна $G(s - s')$, маємо [7]

$$y(s) = \int_S G(s - s')u(s')\,ds' \qquad (s \in S_0^T). \tag{1}$$

Зауважимо, що побудова функції $G(s-s')$ — задача не проста. Відомі тільки окремі випадки її розв'язання — для класично описуваних однорідних за просторово-часовими координатами процесів, в канонічних областях і тільки при певних початково-крайових умовах.

Тому зупинимося на вивченні неоднорідних процесів, особливості протікання яких важко описуються залежно від просторово-часової точки, в якій вони розглядаються. Розглянемо задачу побудови дискретних перерізів функції $G(s - s')$ при умові, що при відомій функції $u(s)$ досліджуваний процес є доступним для спостережень в цих точках.

В такому випадку невідомими будемо вважати набір $G_i(s') = G(s_i - s')$ $(i = \overline{1, L})$ значень функції Гріна $G(s - s')$, який визначається співвідношеннями

$$y_i = \int\limits_S G_i(s') f_i(u(s'))\, ds' \qquad (i = \overline{1, L}), \tag{2}$$

де $y_i = y(s_i)$, а $f_i(\cdot)$ — невідома функція, яку для однозначності згодом виберемо поліноміальною.

2. Для знаходження вектор-функції

$$\overline{G}(s) = \mathrm{col}(G_i(s),\ i = \overline{1, L})$$

виходитимемо із спостережень $u^{(j)}(s)$, $y^{(j)} = \mathrm{col}(y_i^{(j)},\ i = \overline{1, L})$ $(j = \overline{1, N})$ за зовнішньо-динамічними збуреннями та станом системи. Аналітичні залежності вектор-функції $\overline{G}(s)$ такої, щоб

$$\sum_{j=1}^{N} \left\| y^{(j)} - \int\limits_S \overline{G}(s) u^{(j)}(s)\, ds \right\|^2 \to \min_{\overline{G}(s)}, \tag{3}$$

знайдемо, скориставшись результатами роботи [9].

При умові, що вектор-рядок

$$(u^{(1)}(s), \ldots, u^{(N)}(s)) = U^T(s)$$

спостережень за входом та матриця

$$Y = (y^{(1)}, \ldots, y^{(N)}) = \mathrm{col}(y_{(1)}^T, \ldots, y_{(L)}^T)$$

спостережень за виходом системи задовольняють умови

$$\begin{gathered} \varepsilon_i^2 = \min_{G_i(s)} \left\| \int\limits_S U(s) G_i(s)\, ds - y_{(i)} \right\|^2 = y_{(i)}^T y_{(i)} - y_{(i)}^T P_1 P_1^+ y_{(i)} = 0 \qquad \forall i = \overline{1, L}, \\ \lim_{N \to \infty} \det P_n > 0 \qquad \forall \xi_i, \xi_j \in S, \end{gathered} \tag{4}$$

де

$$P_1 = \int\limits_S U(s) U^T(s)\, ds, \qquad P_n = \left[\int\limits_S U^T(\xi_i) U(\xi_j) \right]_{i,j=1}^{i,j=N},$$

маємо

$$G_i(s) = y_{(i)}^T P_1^+ U(s), \qquad \overline{G}(s) = Y P_1^+ U(s). \tag{5}$$

У випадку ж, коли $\lim\limits_{N \to \infty} P_n = 0$,

$$\overline{G}(s) = Y P_1^+ U(s) + V(s) - V(s) P_1^+ P_1$$

при довільній $V(s) \in R^L$ $\forall s \in S$.

3. При умові, що $\varepsilon_p^2 > 0$ для одного або кількох $p \in \sigma \subset \{1, \dots, L\}$, утворимо систему вектор-функцій

$$U_k(s) = \mathrm{col}([u^{(j)}(s)]^k,\ j = \overline{1, N}) \qquad (k = \overline{1, k_*}),$$

для яких [9]

$$\int\limits_S [U_k(s)]^T (I - P_1^+ P_1) U_k(s)\, ds > 0, \qquad \mathrm{rank}[U_*(s), U_{k_*+1}(s)] = k_*$$

при

$$U_*(s) = (U_1(s), \dots, U_{k_*}(s)).$$

Лінійною комбінацією

$$\sum_{k=1}^{k_*} c_k(s) U_k(s) \tag{6}$$

побудованих вище вектор-функцій $U_k(s)$, $(k = \overline{1, k_*})$ замінимо спостережувану нами вектор-функцію $U(s)$ при ідентифікації p-компоненти вектор-функції $\overline{G}(s)$. При цьому будемо вимагати, щоб

$$\int\limits_S U(s) G_j(s)\, ds = y_{(j)} \qquad (j = \overline{1, L};\ j \neq p \in \sigma), \tag{7}$$

$$\int\limits_S \sum_{k=1}^{k_*} c_k(s) U_k(s) G_p(s)\, ds = y_{(p)} \qquad (p \in \sigma). \tag{8}$$

Об'єднавши невідомі функції $G_p(s)$ та $c_k(s)$ $(k = \overline{1, k_*})$ у співвідношенні (8) в нову вектор-функцію

$$\overline{G}_p(s) = \mathrm{col}(c_k(s) G_p(s),\ k = \overline{1, k_*}),$$

модель (8) запишемо у вигляді

$$\int\limits_S U_*(s) \overline{G}_p(s)\, ds = y_{(p)}. \tag{9}$$

Останнє дозволяє зробити висновок, що одержана таким чином модель (7), (9) точно відповідатиме системі спостережень $u^{(i)}(s)$ та $y^{(i)}$ $(i = \overline{1, N})$ за розглядуваним процесом, якщо додатково до умови (4) для $j = \overline{1, L}$ $(j \neq p \in \sigma)$ виконуватиметься умова

$$\varepsilon_p^2 = y_{(p)}^T y_{(p)} - y_{(p)}^T P_p P_p^+ y_{(p)} = 0 \tag{10}$$

для $p \in \sigma$ при

$$P_p = \int\limits_S U_*(s) U_*^T(s)\, ds.$$

В цьому випадку вектор коефіцієнтів-функцій співвідношень (9)

$$\overline{G}_p(s) \in \Omega_p = \{\overline{G}_p(s) \colon \overline{G}_p(s) = U_*^T(s)P_p^+ y_{(p)} + v_p(s) - P_p P_p^+ v_p(s)\} \tag{11}$$

при довільній інтегровній в області S функції $v_p(s)$. Коефіцієнти-функції $G_j(s)$ ($j = \overline{1, L}$; $j \neq p \in \sigma$) співвідношень (7) при цьому, як і раніше, будуть визначатися згідно з (5). Якщо ж (10) не виконується для $p \in \sigma$, то

$$\min_{\overline{G}_p(s) \in \Omega_p} \left\| \int_S U_*(s)\overline{G}_p(s)\, ds - y_{(p)} \right\|^2 = \varepsilon_p^2.$$

А це означає, що математична модель розподіленого в області S_0^T просторово-часового процесу, функція стану $y(s)$ якого може неоднорідно залежати від функції зовнішньо-динамічних збурень $u(s)$ для наперед заданих точок $s_1, \ldots, s_L$, побудована за спостережуваними в цих точках станами $y^{(1)}, \ldots, y^{(N)}$, які відповідають значенням $u^{(1)}(s), \ldots, u^{(N)}(s)$ функції $u(s)$, буде записуватися співвідношеннями

$$\int_S G_j(s) U(s)\, ds = y_j \qquad (j = \overline{1, L};\ j \neq p \in \sigma), \tag{12}$$

$$\int_S G_p(s) \sum_{k=1}^{k_*} c_k(s) (U(s))^k ds = y_p \qquad (p \in \sigma), \tag{13}$$

які випливають з (7), (9). При цьому $G_j(s)$ в (12) визначаються згідно з (5), а $c_k(s)G_p(s)$ в (13), як елементи векторної функції $\overline{G}_p(s)$, — згідно з (11).

4. Розглянемо проблеми розв'язання задач керування станом деяких дискретних точок $s_1, \ldots, s_L$ просторово-часової області S_0^T через функцію зовнішньо-динамічних збурень $u(s)$. Задачі ці легко розв'язуються для точок, динаміка яких описується співвідношенням (12) і дещо складніше — для тих, які функціонують згідно з (13).

Дійсно, якщо точки $s_i (i = \overline{1, L})$ такі, що $i \notin \sigma$, то стани $Y_i = y(s_i)$ ними будуть досягатися при $u(s) \in \Omega_u = \{u(s) \colon u(s) = \overline{G}^T(s)P_2^+ Y + v(s) - \overline{G}^T(s)P_2^+ G_v, \forall v(s), \forall s \in S\}$, де

$$Y = (Y_i,\ i = \overline{1, L})^T, \qquad P_2 = \int_S \overline{G}(s)\overline{G}^T(s)\, ds, \qquad G_v = \int_S \overline{G}(s) v(s)\, ds. \tag{14}$$

Точність розв'язання задачі визначатиметься величиною

$$\varepsilon_2^2 = \min_{u(s) \in \Omega_u} \sum_{i=1}^{L} (y(s_i) - Y_i)^2 = Y^T Y - Y^T P_2 P_2^+ Y. \tag{15}$$

Розв'язок задачі може бути однозначним, якщо

$$\lim_{N \to \infty} \det \Big[\overline{G}^T(s_i)\overline{G}(s_j)\Big]_{i,j=1}^{i,j=N} > 0 \qquad \forall s_i, s_j \in S. \tag{16}$$

Для точок $s_i (i = \overline{1, L})$, функція стану яких виводиться в окіл значень Y_i при $i \in \sigma$, керуючим фактором буде вектор-функція

$$u_*(s) = \mathrm{col}(u(s)^i,\ i = \overline{1, k_*}) \in \Omega_*, \tag{17}$$

де

$$\Omega_* = \{u_*(s)\colon u_*(s) = G_*^T(s)P_*^+ Y + v_*(s) - G_*^T(s)P_*^+ G_{v_*}\} \tag{18}$$

при визначеному згідно з (14) векторі Y очікуваних значень функції $y(s)$ стану системи в точках s_i ($i = \overline{1, L}$; $i \in \sigma$), довільній інтегровній в S вектор-функції $v_*(s) \in R^{k_*}$ та

$$G_*(s) = [G_p(s)c_k(s)]_{p,k=1}^{p=L,k=k_*}, \qquad P_* = \int\limits_S G_*(s)G_*^T(s)\,ds, \qquad G_{v_*} = \int\limits_S G_*(s)v_*(s)\,ds.$$

Умови точності та однозначності розв'язку (17), (18) запишемо за аналогією з (15), (16), замінивши там $\overline{G}(s)$ на $G_*(s)$, P_2 — на P_*.

Для випадку, коли задача керування виконується за сукупністю точок (s_i, $i = \overline{1, L_1}$), які задовольняють як співвідношення (12), так і співвідношення (13) (точки s_i, $i = \overline{1, L_2}$), керуючі факторами визначаються з такої системи інтегральних рівнянь:

$$\int\limits_S \begin{pmatrix} G_1^*(s) \\ G_2^*(s) \end{pmatrix} u_*(s)\,ds = \begin{pmatrix} Y_1^* \\ Y_2^* \end{pmatrix},$$

де

$$Y_1^* = \mathrm{col}(Y_{1i},\ i = \overline{1, L_1}), \qquad Y_2^* = \mathrm{col}(Y_{2i},\ i = \overline{1, L_2}),$$

$$G_1^*(s) = \mathrm{col}((G_i(s), \underbrace{0, \ldots, 0}_{k_*-1}),\ i = 1, L_1), \qquad G_2^*(s) = [G_i(s)c_j(s)]_{i,j=1}^{i=L_2,j=k_*},$$

звідки

$$u_*(s) = (G_1^{*T}(s), G_2^{*T}(s))P_{12}^+ \left[\begin{pmatrix} Y_1^* \\ Y_2^* \end{pmatrix} - G_v\right] + v(s), \tag{19}$$

де $v(s) \in R^{k_*}$ — довільна інтегровна на S вектор-функція,

$$P_{12} = \int\limits_S \begin{pmatrix} G_1^*(s) \\ G_2^*(s) \end{pmatrix} (G_1^{*T}(s), G_2^{*T}(s))\,ds, \qquad G_v = \int\limits_S \begin{pmatrix} G_1^*(s) \\ G_2^*(s) \end{pmatrix} v(s)\,ds.$$

При цьому

$$\min_{u_*(s)} \left(\sum_{i=1}^{L_1} (y(s_i) - Y_{1i})^2 + \sum_{i=2}^{L_2} (y(s_i) - Y_{2i})^2 \right) = (Y_1^{*T}, Y_2^{*T})(I - P_{12}P_{12}^+)(Y_1^{*T}, Y_2^{*T})^T,$$

а $v(s) \equiv 0$, якщо

$$\lim_{N\to\infty} \det \left[(G_1^{*T}(s_i), G_2^{*T}(s_i)) \begin{pmatrix} G_1^*(s_j) \\ G_2^*(s_j) \end{pmatrix} \right]_{i,j=1}^{i,j=N} > 0.$$

5. Для ілюстрації одержаних результатів розглянемо процес поширення тепла в одновимірній області. Будемо виходити з того, що функція $y(x,t)$ стану процесу пов'язана із функцією $u(x,t)$ зовнішньо-динамічних збурень рівнянням

$$u = \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \tag{20}$$

Розв'язком (20) при $u = \sin(x)\cdot\cos(t) - \sin(x)\cdot\sin(t)$ є $y = \sin(x)\cdot\sin(t)$.

Для побудови $G_{ij}(s) = G(x_i - x, t_j - t)$ $(i,j = \overline{1,4})$ вважатимемо, що в точках $x_i \in$ $\in \{0, 0{,}5, 1, 1{,}5\}$ при $t_j \in \{0, 2{,}5, 5, 7{,}5\}$ спостерігаються

$$y_{(1)} = (0, 0, 0, 0, 0, 0{,}2892, 0{,}5076, 0{,}6017, 0, -0{,}4634, -0{,}8134, -0{,}9642, 0, 0{,}4533, 0{,}7956, 0{,}9431);$$

$$y_{(2)} = (0, 0, 0, 0, 0, 0{,}2904, 0{,}5096, 0{,}6041, 0, -0{,}4652, -0{,}8166, -0{,}9680, 0, 0{,}4551, 0{,}7988, 0{,}9469);$$

$$y_{(3)} = (0, 0, 0, 0, 0, 0{,}2895, 0{,}5081, 0{,}6023, 0, -0{,}4639, -0{,}8142, -0{,}9651, 0, 0{,}4537, 0{,}7964, 0{,}9441).$$

Вибираючи спостереження за зовнішньо-динамічними збуреннями у вигляді $u^{(i)}(x,t) =$ $= k_i \sin x(\cos t - \sin t)$, де $k_1 = 126/125$, $k_2 = 253/250$, $k_3 = 1009/1000$, ідентифікуємо функції $G_{ij}(s)$ для $i,j = \overline{1,4}$.

При цьому матимемо $G_{ij}(x,t) = \alpha_{ij} \sin x(\cos t - \sin t)$ при $\alpha_{i1} = 0$ $(i = \overline{1,4})$, $\alpha_{1j} = 0$ $(j = \overline{1,4})$, $\alpha_{22} = 0{,}060640$, $\alpha_{32} = 0{,}106434$, $\alpha_{42} = 0{,}126168$, $\alpha_{23} = 0{,}097163$, $\alpha_{33} = -0{,}170537$, $\alpha_{43} = -0{,}202158$, $\alpha_{24} = 0{,}095043$, $\alpha_{34} = 0{,}166816$, $\alpha_{44} = 0{,}197747$.

З урахуванням одержаного визначимо функцію зовнішньо-динамічних збурень, яка стан системи $y(x,t)$ в точках $(((x_i + 0{,}05, t_j + 0{,}05), i = \overline{1,4}), j = \overline{1,4})$ виводить в окіл значень: 0,0244, 0,0423, 0,0499, 0,0056, 0,0056, 0,2722, 0,4723, 0,5567, −0,0094, −0,4606, 0,7990, −0,9418, 0,0095, 0,4658, 0,8080, 0,9524. На основі (14) ця функція матиме вигляд

$$-0{,}9937 \sin x \cdot \sin t + 0{,}9937 \sin x \cdot \cos t.$$

При цьому значення функції стану $y(x_i + 0{,}01, t_j + 0{,}05)((i = \overline{1,4}), j = \overline{1,4})$, які відповідають керуванню (20), будуть такими: 0, 0, 0, 0, 0, 0,2851, 0,5004, 0,5932, 0, −0,4568, −0,8018, −0,9505, 0, 0,4469, 0,7843, 0,9297.

Оцінка одержаних результатів, визначена за формулою (15), дорівнюватиме 0,0089.

1. *Гантмахер Ф.* Теория матриц. – Москва: Наука, 1967. – 287 с.
2. *Альберт А.* Регрессия, псевдоинверсия, рекуррентное оценивание. – Москва: Наука, 1977. – 305 с.
3. *Кириченко Н. Ф.* Аналитическое представление возмущений псевдообратных матриц // Кибернетика и системный анализ. – 1997. – № 2. – С. 98–107.
4. *Кириченко Н. Ф., Стоян В. А.* Аналитическое представление матричных и интегральных линейных преобразований // Там же. – 1998. – № 3. – С. 90–104.
5. *Стоян А. В.* Об одном подходе к исследованию начально-краевых задач матфизики // Пробл. управления и информатики. – 1998. – № 1. – С. 79–86.
6. *Скопецкий В. В., Стоян В. А., Кривонос Ю. Г.* Математичне моделювання прямих та обернених задач динаміки систем з розподіленими параметрами. – Киев: Наук. думка, 2001. – 361 с.

7. *Стоян В. А.* Моделювання та ідентифікація динаміки систем із розподіленими параметрами. – Киев: ВПЦ "Київ. ун-т", 2004. – 184 с.
8. *Кириченко Н. Ф., Лепеха Н. П.* Возмущения псевдообратных и проекционных матриц и их применение к идентификации линейных и нелинейных зависимостей // Пробл. управления и информатики. – 2001. – № 1. – С. 6–22.
9. *Стоян В. А.* Обращение линейных пространственно-временных преобразований в ограниченных областях // Кибернетика и системный анализ. – 2001. – № 5. – С. 149–156.

Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова
НАН України, Київ
Київський національий університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 21.09.2006