УДК 539.3

В. П. Ревенко

Застосування нового аналітично-числового методу Остроградського до розв'язування плоскої задачі теорії пружності

(Представлено академіком НАН України Я. М. Григоренком)

A boundary-value problem for the biharmonic equation is solved, and the stress-strain state (SSS) of a rectangular plate loaded on the sides by forces is defined. The SSS is presented in the form of a series in specially constructed Saint-Venant functions. The series coefficients are found from the condition of minimum of the deviation square integral of a solution from the given boundary conditions on the plate sides. The Bessel inequality is proved, and the effective valuation of the exactness of the general solution is given. The results of numerical analysis of the stresses are presented.

У роботах [1–3] розроблені математичні основи нового аналітично-числового спектрального методу розв'язування двовимірних задач теорії пружності, показано його повноту і збіжність. В [4] вказано, що ідеї спектрального методу розв'язування крайових задач для рівнянь в частинних похідних були вперше висловлені та опубліковані в [5]. Тому пропонуємо спектральний метод розв'язування крайових задач для рівнянь порядку більше двох називати іменем видатного українського математика і механіка М. В. Остроградського. В [6] цей метод розвинуто для розв'язування тривимірних задач теорії пружності.

Розв'язування крайової задачі цим методом проводиться в декілька етапів: 1) виділення основного напружено-деформованого стану (НДС); 2) побудова нескінченної системи власних функцій; 3) використання інтегрального методу моментів для знаходження коефіцієнтів розкладу. Метод інтегральних моментів оснований на мінімізації інтеграла від суми квадратів відхилення знайденого розв'язку від заданих граничних умов на границі області.

В даній роботі цей метод реалізовано для знаходження НДС прямокутної пластини при довільному навантаженні і досліджено деякі аспекти числової реалізації: точність задоволення граничних умов, збіжність, швидкодія.

1. Знаходження НДС прямокутної пластини. Розглянемо плоску статичну задачу для тонкої прямокутної пластини сталої товщини h, яка займає прямокутну область $D = \{(x, y) \in [0, a] \times [-b, b]\}$, за відсутності масових сил [3, 7, 8]. На контурі L прямокутника D задані граничні умови в напруженнях

$$\begin{aligned} &\sigma_n(x,y)|_L = \sigma_g|_L, \\ &\tau_n(x,y)|_L = \tau_g|_L, \end{aligned} \tag{1}$$

де зовнішні нормальні та дотичні навантаження σ_g, τ_g є кусково-неперервними функціями на контурі прямокутника L. Позначимо вершини прямокутника проти годинникової стрілки, починаючи із точки (a, b), літерами A, B, C, D. Сторони між вершинами B і C; C і D і т. д. позначимо цифрами 1, 2, 3, 4. В роботі [9] дано розв'язок цієї задачі для часткового симетричного випадку навантаження: $\sigma_g(y)|_{L_1} = \sigma_g(y)|_{L_3}$, $\sigma_g(x)|_{L_2} = \sigma_g(x)|_{L_4}$, $\tau_g(x, y)|_L = 0$.

В [10] наведено огляд літератури з проблеми розв'язування крайової задачі для бігармонічного рівняння.

Розподілені нормальні та дотичні зовнішні навантаження σ_g, τ_g створюють на сторонах пластини відповідні нормальні T_j та дотичні Q_j зусилля і моменти M_j, $j = \overline{1,4}$, відносно їх середин [7]. Пошук бігармонічної функції напружень $\Phi(x, y)$, яка задовольняє граничні умови (1), будемо послідовно зводити до розв'язування простіших задач. Перше спрощення випливає із симетричності бігармонічного рівняння і прямокутної області відносно змінної y. Розглянемо граничні навантаження (1) як суму двох частин *а* і *б*: а) парні відносно змінної y нормальні напруження, непарні — дотичні напруження, б) навпаки, непарні — нормальні, парні — дотичні напруження. Надалі шукатимемо розв'язок в цілому самозрівноваженої задачі *а*.

Розділення НДС на основний і збурений. Для задачі *а* виконуються залежності $Q_1 = Q_3 = 0$, $M_1 = M_3 = 0$. Вісім ненульових силових факторів, які залишилися, пов'язані трьома рівняннями рівноваги. Поліноміальна функція напружень, яка відповідає такому узагальненому головному вектору, залежить від п'ятьох факторів і має вигляд:

$$\Phi_0(x,y) = \frac{T_2}{2ha}x^2 + \frac{T_1}{4hb}y^2 + \frac{T_3 - T_1}{4ha^3b}\left[y^2(3ax^2 - 2x^3) + \frac{2}{5}\left(x - \frac{a}{2}\right)^5 + 2a_1\left(x - \frac{a}{2}\right)^3\right] + \\ + \frac{2M_2}{ha^3}\left(x - \frac{a}{2}\right)^3 + \frac{M_4 - M_2}{ha^3b}\left[\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}a^2\right]\left(x - \frac{a}{2}\right)(y + b), \tag{2}$$

де $a_1 = b^2 - a^2/10$. Функція $\Phi_0(x, y)$ задовольняє бігармонічне рівняння і створює задані узагальнені силові зусилля по сторонах пластини. Після виділення зусиль, які створює функція напружень (2), із граничних умов (1) залишається збурене (самозрівноважене) відносно кожної сторони пластини зовнішнє навантаження. Подальше спрощення знову полягає у розділенні НДС на дві частини. Розглянемо граничні навантаження (1) як суму двох частин А і Б: А) на сторонах $y = \pm b$ прямокутної пластини відсутні зовнішні навантаження

$$\sigma_y(x, \pm b) = 0, \qquad \tau(x, \pm b) = 0, \qquad x \in [0, a], \tag{3}$$

а на сторонах $x = 0$, $x = a$ діють граничні навантаження (1); Б) навпаки, на сторонах 1, 3 прямокутника відсутні зовнішні навантаження, а на сторонах 2, 4 діють граничні навантаження (1).

Враховуючи ідентичність задач А і Б, нижче будемо шукати розв'язок сомозрівноваженої задачі А. Розглянемо пластину, для якої $a \gg b$, і чисельно встановимо, коли самозрівноважені навантаження, прикладені на стороні 1, не впливають на розподіл НДС біля сторони 3. Зовнішні навантаження в цій задачі також розділимо на дві частини:

1) навантаження задане тільки на стороні 1:

$$\sigma_x(0, y) = \sigma_1(y), \qquad \tau(0, y) = \tau_1(y), \qquad \sigma_x(a, y) = 0, \qquad \tau(a, y) = 0, \tag{4}$$

2) навантаження — на стороні 3:

$$\sigma_x(0, y) = 0, \qquad \tau(0, y) = 0, \qquad \sigma_x(a, y) = \sigma_2(y), \qquad \tau(a, y) = \tau_2(y),$$

де $\sigma_j(y)$, $\tau_j(y) \in L_2[-b, b]$ і задовольняють коректні фізичні умови

$$\tau_j(\pm b) = 0, \qquad |\sigma_j(y)| < \sigma_t, \qquad |\tau_j(y)| < \tau_t, \qquad j = 1, 2. \tag{5}$$

В роботах [2, 3] показано, що розв'язок задачі 1 для $a \gg b$ можна подати у вигляді ряду за власними сен-венанівськими функціями

$$\Phi(x, \gamma) = b^2 \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Re}\{g_k \varphi(z_k \gamma) \exp(-\beta_k x)\}, \tag{6}$$

де $\gamma = y/b$ — безрозмірна змінна; g_k — комплексні коефіцієнти; $\varphi(z_k\gamma) = \gamma \sin(z_k\gamma) - \operatorname{tg}(z_k)\cos(z_k\gamma)$ — власні функції; $\mathrm{Re}(\beta_k) > 0$; $z_k = b\beta_k$ — комплексні безрозмірні спектральні числа, ненульові корені характеристичного рівняння [11, 2, 3]

$$F(z) \equiv \sin(2z) + 2z = 0. \tag{7}$$

Комплексний коефіцієнт g_k має дві незалежні невідомі — дійсну і уявну частини, що дає змогу одночасно задовольнити дві граничні умови.

Згідно з [3], перші дві граничні умови (4) набувають вигляду

$$\sigma_1(b\gamma) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Re}\{(x_k + iy_k)\chi_k(\gamma)\}, \qquad \tau_1(b\gamma) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Re}\{(x_k + iy_k)\psi_k(\gamma)\}, \tag{8}$$

де $x_k + iy_k = c_k = z_k^2 g_k$, x_k, y_k — дійсна і уявна частини довільного комплексного коефіцієнта c_k; $\chi_k(\gamma) = m_k \cos(z_k\gamma) - \gamma \sin(z_k\gamma)$, $m_k = 1/z_k - \operatorname{ctg}(z_k)$; $\psi_k(\gamma) = -\operatorname{ctg}(z_k)\sin(z_k\gamma) + \gamma\cos(z_k\gamma)$. Легко перевірити залежності $\psi_k'(\gamma) = z_k\chi_k(\gamma)$, $\psi_k(1) = \psi_k(0) = \psi_k(-1) = 0$.

Відзначимо, що дві останні граничні умови (4) вибором довжини a можна задовольнити з високою точністю, оскільки величину $\|\exp(-\beta_k a)\|$ можна зробити як завгодно малою. В роботах [2, 3] розроблено метод розрахунку пластини при довільному значенні довжини a.

Вкажемо на те, що умови (8) задають важливу математичну задачу розкладу на проміжку $[0, 1]$ двох самозрівноважених функцій $\sigma_1(b\gamma)$, $\tau_1(b\gamma)$ за системою функцій $\{\chi_k(\gamma), \psi_k(\gamma)\}$.

Проблема. Дослідити, при яких умовах подання (8) є точним і побудувати конструктивний алгоритм знаходження коефіцієнтів x_k, y_k. Не зупиняючись на строгому доведенні першої частини цієї проблеми, розробимо чисельний метод, який дозволяє встановити вірність розкладу (8).

2. Мінімізація міри відхилення розв'язку від заданих граничних умов. Для знаходження невідомих дійсних коефіцієнтів x_k, y_k, а отже і комплексних коефіцієнтів g_k, в [2, 3] розроблено метод інтегральних моментів. Обмежимося у співвідношеннях (6), (8) скінченною кількістю N членів ряду. Оскільки окремі члени ряду (6) є розв'язками бігармонічного рівняння, а отже і плоскої задачі, то нам достатньо знайти невідомі коефіцієнти із умови мінімуму граничного відхилення напружень, які задаються функціями (8) від зовнішніх граничних навантажень. Виділимо у функцій $\chi_k(\gamma)$, $\psi_k(\gamma)$ дійсну і уявну частини $\chi_k(\gamma) = \chi_{rk}(\gamma) + i\chi_{yk}(\gamma)$, $\psi_k(\gamma) = \psi_{rk}(\gamma) + i\psi_{yk}(\gamma)$. Мірою наближення розв'язку (6) до заданих граничних навантажень є інтеграл квадратичного відхилення знайдених напружень (8) від заданих зовнішніх зусиль на бокових сторонах (4)

$$\Psi\{x_1, \ldots x_N, y_1, \ldots, y_N\} = \int_0^1 \left\{ \left\{ \sum_{k=1}^{N} [x_k \chi_{rk}(\gamma) - y_k \chi_{yk}(\gamma)] - \sigma_1(b\gamma) \right\}^2 + \right.$$

$$+\left\{\sum_{k=1}^{N}[x_k\psi_{rk}(\gamma)-y_k\psi_{yk}(\gamma)]-\tau_1(b\gamma)\right\}^2\Bigg\}d\gamma=$$

$$=\sum_{k,j=1}^{N}\{x_kx_jB_{k,j}^1-2x_jy_kB_{k,j}^2+y_jy_kB_{k,j}^4\}-2\sum_{k=1}^{N}\{x_kP_{r,k}-y_kP_{y,k}\}+P^2, \tag{9}$$

де коефіцієнти $B_{k,j}^m$ знайдені в явному вигляді [2, 3]; $P_{r,k}=\operatorname{Re}P_k$, $P_{y,k}=\operatorname{Im}P_k$, $P_k= =\int_0^1[\sigma_1(\gamma)\chi_k(\gamma)+\tau_1(\gamma)\psi_k(\gamma)]d\gamma$, $P^2=\int_0^1[\sigma_1(\gamma)^2+\tau_1(\gamma)^2]d\gamma$. Дійсні x_k і уявні y_k частини комплексних коефіцієнтів c_k визначимо із умови мінімуму функціоналу (9), який є додатно визначеною квадратичною формою. Для цього знайдемо частинні похідні

$$\frac{\partial\Psi\{x_1,\ldots,x_N,y_1,\ldots,y_N\}}{\partial x_j},\qquad\frac{\partial\Psi\{x_1,\ldots,x_N,y_1,\ldots,y_N\}}{\partial y_j},\qquad j=\overline{1,N},$$

прирівняємо їх до нуля і одержимо систему $2N$ лінійних рівнянь для визначення $2N$ невідомих x_k, y_k, $k=\overline{1,N}$,

$$\sum_{k=1}^{N}\{x_kB_{k,j}^1-y_kB_{k,j}^2\}=P_{r,j},\qquad\sum_{k=1}^{N}\{-x_kB_{j,k}^2+y_kB_{k,j}^4\}=-P_{y,j},\qquad j=\overline{1,N}. \tag{10}$$

Розв'яжемо систему лінійних рівнянь (10) чисельно і знайдемо дійсні коефіцієнти x_k, y_k, а отже і комплексні коефіцієнти g_k, $k=\overline{1,N}$. Покажемо, що на розв'язках системи (10) має місце

Нерівність Бесселя. *Для будь-яких квадратично інтегрованих на проміжку* $[0,1]$ *функцій* $\sigma_1(b\gamma)$, $\tau_1(b\gamma)$ *виконується нерівність Бесселя*

$$\mathrm{MinFnz}=\int_0^1[\sigma_1(b\gamma)^2+\tau_1(b\gamma)^2]d\gamma-\sum_{k=1}^{N}\{x_kP_{r,k}-y_kP_{y,k}\}\geqslant 0. \tag{11}$$

Якщо в (11) *має місце знак рівності, то граничні умови* (8) *задовольняються точно за метрикою простору* L_2.

Доведення. Оскільки функціонал (9) є невід'ємним, то з нього після врахування рівнянь (10) випливає нерівність (11). Якщо в (11) має місце знак рівності, то із функціоналу (9) одержимо

$$\int_0^1\left\{\sum_{k=1}^{N}[x_k\chi_{rk}(\gamma)-y_k\chi_{yk}(\gamma)]-\sigma_1(b\gamma)\right\}^2d\gamma=0,$$

$$\int_0^1\left\{\sum_{k=1}^{N}[x_k\psi_{rk}(\gamma)-y_k\psi_{yk}(\gamma)]-\tau_1(b\gamma)\right\}^2d\gamma=0,$$

що доводить останню частину твердження.

Відзначимо, що знайдений розв'язок системи рівнянь (10) має, згідно з енергетичною нерівністю Бесселя, стійкість. Крім того, мінімум функціоналу (9) у випадку, якщо система вибраних власних функцій повна, наближається до нуля, а якщо вона не повна, то до фіксованого числа.

Визначимо чисельно відношення MinFnz/P^2; якщо воно буде менше, ніж 10^{-6}, то розв'язок знайдено із відносною точністю не менше 0,01. Якщо воно буде більше, ніж 10^{-6}, то збільшуємо кількість членів ряду N і вдруге проводимо обчислення. Тобто, цей метод побудований на інтегральному контролі точності задоволення граничних умов. Крім того, ми безпосередньо по точках контролюємо максимальне відхилення знайдених напружень від заданих граничних навантажень. Далі за знайденою функцією напружень визначаємо НДС пластини.

3. Числовий аналіз. Запропонований алгоритм реалізований при знаходженні НДС пластини. Числові розрахунки показали, що нульові граничні умови на горизонтальних сторонах пластини 2, 4 задовольняються з точністю 10^{-18} і залежать тільки від точності знаходження комплексних коренів рівняння (7), що характеризує високу точність запропонованого методу.

В роботі досліджувався вплив навантажень, заданих на стороні пластини 1 на розподіл напружень біля сторони 3. Чисельним експериментом встановлено, що вже при $a > 2{,}5b$ відносний вплив навантаження не перевищує 0,01, що підтверджує теоретичні висновки, одержані в [2, 3]. Тобто, якщо відношення сторін прямокутника більш, ніж 1,3, то при технічних розрахунках збуреного НДС взаємним впливом навантажень, прикладених до менших сторін, можна знехтувати.

Параболічний розподіл зовнішнього навантаження. Розглянемо приклад Тимошенка [12] про розтяг прямокутника нормальними зусиллями, розподіленими по сторонах $x = 0$, $x = a$ нормальним $\sigma_1(\gamma) = 1{,}5\sigma_0(1-\gamma^2)$, де σ_0 має розмірність напруження, і дотичним $\tau_1(b\gamma) = 0$ напруженнями. Для цього навантаження основний напружений стан задається $T_1 = T_3 = S\sigma_0$, де $S = 2hb$ — площа перерізу пластини, σ_0 — постійне напруження в напрямку осі x, а всі інші зусилля і моменти дорівнюють нулю. Права частина системи рівнянь (10) для параболічного розподілу нормальних напружень визначається

$$P_k = 1{,}5\sigma_0\frac{(m_k z_k - 3)F_k + \cos(z_k)}{z_k},$$

де $F_k = [(z_k^2 - 2)\sin(z_k) + 2\cos(z_k)]/z_k^3$. Внаслідок плавності розподілу зовнішнього навантаження вже при $N = 5$, $\mathrm{MinFnz} = 6{,}5 \cdot 10^{-6}$, а граничні умови задовольняються з точністю 10^{-2}; при $N = 10$, $\mathrm{MinFnz} = 4 \cdot 10^{-7}$ граничні умови задовольняються з точністю 10^{-3}. Збільшуючи значення N, ми наближуємо мінімум функціоналу до нуля. Так при $N = 20$ він дорівнює $1{,}8 \cdot 10^{-8}$; при $N = 40$ — $7{,}4 \cdot 10^{-10}$; а при $N = 100$ — $7{,}4 \cdot 10^{-10}$. Точність задоволення граничних умов постійно зростає і прямує до нуля.

Повний час розв'язування цієї задачі на комп'ютері Pentimum-3 для $N = 10$ не перевищує однієї секунди.

В табл. 1 наведено розподіл напружень в прямокутній пластині $\sigma_0 = 1$, $a/b = 5$. Нормальні і дотичні напруження подані залежно від бізрозмірної змінної γ, $\sigma_1(\gamma)$ задає зовнішнє нормальне напруження. Як показує аналіз числових даних, вже на відстані ширини пластини $2b$ компоненти напруженого стану в пластині відрізняються від основного НДС менше, ніж на один відсоток.

На закінчення зробимо такі висновки.

1. Чисельно доведено ефективність, швидкодію і високу точність нового аналітично-числового методу розв'язування двовимірних крайових задач теорії пружності. Метод основа-

Таблиця 1

γ	0	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9	1
$\sigma_1(\gamma)$	1,500	1,485	1,440	1,260	0,960	0,540	0,285	0
$\sigma_y(0,\gamma)$	0,682	0,671	0,637	0,506	0,309	0,095	0,018	0
$\sigma_x(0,2b,\gamma)$	1,463	1,449	1,406	1,235	0,955	0,577	0,352	0,094
$\sigma_y(0,2b,\gamma)$	0,258	0,253	0,247	0,184	0,109	0,037	0,011	0,0
$\tau(0,2b,\gamma)$	0,000	0,031	0,062	0,113	0,139	0,114	0,072	0,000
$\sigma_x(b,\gamma)$	1,149	1,143	1,126	1,060	0,967	0,868	0,827	0,800
$\sigma_y(b,\gamma)$	−0,107	−0,105	−0,099	−0,077	−0,046	−0,015	−0,004	0,000
$\tau(b,\gamma)$	0,000	0,029	0,056	0,097	0,108	0,077	0,044	0,000
$\sigma_x(2b,\gamma)$	1,009	1,009	1,007	1,001	0,995	0,992	0,993	0,997

ний на аналітичному розв'язанні крайової граничної проблеми, побудові власних функцій і числовій мінімізації квадратичної форми, яка є інтегральною мірою наближення шуканого розв'язку до заданих граничних умов.

2. Чисельно встановлена збіжність запропонованого методу, яка випливає із доведеної нерівності Бесселя. Введена інтегральна міра, яка дає змогу оцінити точність задоволення граничних умов на контурі пластини.

3. Встановлено, що вже при $a > 2{,}5b$ відносний вплив самозрівноважених навантажень, прикладених на стороні 1 на розподіл напружень біля сторони 3, не перевищує 0,01.

4. Надалі необхідно застосовувати запропонований метод до розв'язування двовимірних та тривимірних змішаних крайових задач.

1. *Ревенко В. П.* Спектральна задача осесиметричної теорії пружності // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2003. – Вип. 61. – С. 249–258.
2. *Ревенко В. П.* Побудова розв'язку плоскої задачі теорії пружності для прямокутної пластини методом інтегральних моментів // Доп. НАН України. – 2004. – № 8. – С. 59–65.
3. *Ревенко В. П.* Розвиток спектрального методу Штурма–Ліувілля розв'язування крайової задачі для бігармонічного рівняння // Нелінійні коливання. – 2003. – **6**, № 3. – С. 368–377.
4. *Ревенко В. П.* Розвиток спектрального методу Остроградського для розв'язування плоскої задачі теорії пружності в прямокутній області // Математ. вісн. Наук. товариства ім. Шевченка. – 2004. – **1**. – С. 105–119.
5. *Остроградский М. В.* Мемуар о распространении волн в цилиндрическом бассейне. (Доклад в Парижской Академии 6 ноября 1826 г.) // Полное собр. тр. – Киев: Изд-во АН УССР. – 1959. – Т. 1. – С. 7–22.
6. *Ревенко В. П.* Спектральний метод розв'язання задачі Кірша у тривимірній постановці // Доп. НАН України. – 2006. – № 1. – С. 59–66.
7. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. – Москва: Наука, 1975. – 576 с.
8. *Гринченко В. Т., Улитко А. Ф.* Пространственные задачи теории упругости и пластичности // Равновесие упругих тел канонической формы. – Киев: Наук. думка, 1985. – Т. 3. – 280 с.
9. *Meleshko V. V. Gomilko A. M.* Infinite systems for a biharmonic problem in a rectangle // Proc. Roy. Soc. London. – 1997. – **A 453**. – P. 2139–2160.
10. *Мелешко В. В.* Бигармоническая задача для прямоугольника: история и современность // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – **47**, № 3. – С. 45–68.
11. *Космодамианский А. С., Шалдырван В. А.* Толстые многосвязные пластины. – Киев: Наук. думка, 1978. – 240 с.
12. *Тимошенко С. П.* Теория упругости. – Ленинград–Москва: Гостехтеоретиздат, 1975. – 451 с.

Інститут прикладних проблем механіки
і математики ім. Я. С. Підстригача
НАН України, Львів

Надійшло до редакції 06.09.2006