ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

4 • 2007

ТЕПЛОФІЗИКА

УДК 532.526

А. А. Авраменко, Т. В. Сорокина, Т. Б. Басок

Центробежная неустойчивость течения в пористом криволинейном канале

(Представлено академиком НАН Украины А. А. Долинским)

The problems of the centrifugal instability of a flow in the porous curvilinear channel are considered. The criteria of the longitudinal vortex appearance are obtained as Dean numbers. The influence of the channel width and the medium porosity on values of the Dean critical numbers and wave numbers is investigated.

В процессах ДИВЭ (дискретно-импульсного ввода энергии) [1], которые встречаются в процессах грануляции и биотехнологиях, возникают проблемы, связанные с вопросами гидродинамической неустойчивости течения в пористом криволинейном канале. Необходимо знать значения критериев возникновения центробежной неустойчивости (условий возникновения продольных вихрей), чтобы корректно прогнозировать протекание процессов ДИВЭ.

Гидродинамика криволинейных потоков в пористой среде описывается системой модифицированных уравнений Навье–Стокса

$$\begin{gathered}
\frac{\partial w}{\partial t}+v\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{u}{r}\frac{\partial w}{\partial \varphi}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)-\frac{\nu}{K}w,\\
\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{u}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}-\frac{u^2}{r}+w\frac{\partial v}{\partial z}=\\
=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)-\frac{\nu}{K}v,\\
\frac{\partial u}{\partial t}+v\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}+\frac{uv}{r}+w\frac{\partial u}{\partial z}=\\
=-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \varphi}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{u}{r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \varphi}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)-\frac{\nu}{K}u,\\
\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{v}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}+\frac{\partial w}{\partial z}=0.
\end{gathered}\tag{1}$$

где p — давление; r, φ, z — цилиндрические координаты; t — время; v, u, w — компоненты скорости, соответствующие координатам r, φ, z; ν — кинематическая вязкость; ρ — плотность; K — проницаемость пористой среды. Уравнения (1) учитывают линейное гидродинамическое сопротивление пористой среды Дарси, которое учитывается последними слагаемыми первых трех уравнений (1).

Для расчета критериев центробежной неустойчивости необходим профиль скорости невозмущенного течения. Этот профиль определяется из третьего уравнения (1), в котором сохранены лишь силы давления и вязкого сопротивления

$$\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \varphi} = \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} - \frac{u}{K}\right). \tag{2}$$

Течение происходит вдоль азимутальной координаты φ. Азимутальный градиент давления не зависит от радиальной координаты и является постоянной величиной. Следовательно, уравнение (2) представляет собой неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение и может быть решено методом вариации произвольных постоянных при следующих граничных условиях:

$$u = 0 \quad \text{при} \quad r = R_1, \qquad u = 0 \quad \text{при} \quad r = R_2,$$

где R_1 и R_2 — радиусы выпуклой и вогнутой стенок канала соответственно. Решение имеет следующий вид:

$$u^* = \frac{\mathrm{Da}}{\bar r} + C_1 I_1\left(\frac{\bar r}{\sqrt{\mathrm{Da}}}\right) + C_2 K_1\left(\frac{\bar r}{\sqrt{\mathrm{Da}}}\right), \tag{3}$$

где I_1 и K_1 — модифицированные функции Бесселя первого порядка первого и второго рода соответственно

$$u^* = \frac{\nu\rho u}{R_2\left(-\dfrac{\partial p}{\partial \varphi}\right)}, \qquad \bar r = \frac{r}{R_2}, \qquad \mathrm{Da} = \frac{K}{R_2^2} \text{ — число Дарси},$$

а константы интегрирования определяются следующими соотношениями ($\eta = R_1/R_2$):

$$C_1 = \frac{\mathrm{Da}}{\eta}\frac{K_1\left(\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{Da}}}\right) - \eta K_1\left(\dfrac{\eta}{\sqrt{\mathrm{Da}}}\right)}{I_1\left(\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{Da}}}\right)K_1\left(\dfrac{\eta}{\sqrt{\mathrm{Da}}}\right) - I_1\left(\dfrac{\eta}{\sqrt{\mathrm{Da}}}\right)K_1\left(\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{Da}}}\right)},$$

$$C_2 = \frac{\mathrm{Da}}{\eta}\frac{I_1\left(\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{Da}}}\right) - \eta I_1\left(\dfrac{\eta}{\sqrt{\mathrm{Da}}}\right)}{I_1\left(\dfrac{\eta}{\sqrt{\mathrm{Da}}}\right)K_1\left(\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{Da}}}\right) - I_1\left(\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{Da}}}\right)K_1\left(\dfrac{\eta}{\sqrt{\mathrm{Da}}}\right)}.$$

Применяя (3), определим среднерасходную скорость по формуле

$$\overline{u}^* = \frac{1}{1-\eta}\int_{\eta}^{1} u^*(\bar r)\,d\bar r = \frac{\sqrt{\mathrm{Da}}}{1-\eta}\left\{C_1\left[I_0\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Da}}}\right) - I_0\left(\frac{\eta}{\sqrt{\mathrm{Da}}}\right)\right] + \right.$$
$$\left. + C_2\left[K_0\left(\frac{\eta}{\sqrt{\mathrm{Da}}}\right) - K_0\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Da}}}\right)\right] - \sqrt{\mathrm{Da}}\ln\eta\right\}. \tag{4}$$

Здесь I_0 и K_0 — модифицированные функции Бесселя нулевого порядка первого и второго рода соответственно.

Для определения критериев центробежной неустойчивости используем метод линейных возмущений. На основное течение накладываем возмущения так, что суммарные величины выглядят таким образом:

$$u_\Sigma(t,r,z) = u(r) + u_A(r)\cos(\gamma z)\exp[\beta t], \tag{5}$$

$$v_\Sigma(t,r,z) = v_A(r)\cos(\gamma z)\exp[\beta t], \tag{6}$$

$$w_\Sigma(t,r,z) = w_A(r)\sin(\gamma z)\exp[\beta t], \tag{7}$$

$$p_\Sigma(t,r,z) = p(r) + p_A(r)\cos(\gamma z)\exp[\beta t], \tag{8}$$

где $u(r)$ и $p(r)$ — параметры невозмущенного потока; u_A, v_A, w_A и p_A — амплитуды возмущения соответствующих величин; γ — волновое число в трансверсальном направлении; β — коэффициент нарастания возмущений.

Подстановка (5)–(8) в (1) с последующей линеаризацией при $\beta = 0$ приводит к

$$\left(DD^* - \sigma^2 - \frac{(1-\eta)^2}{\mathrm{Da}}\right)\overline{u}_A = D^* U \overline{v}_A, \tag{9}$$

$$\left[(DD^* - \sigma^2)^2 - \frac{(1-\eta)^2}{\mathrm{Da}}(DD^* - \sigma^2)\right]\overline{v}_A = 2\sigma^2\frac{\mathrm{De}^2}{\xi}U\overline{u}_A, \tag{10}$$

где

$$D = \frac{d}{dx}, \qquad D^* = D + \frac{1-\eta}{\xi}, \qquad x = \frac{r - \dfrac{R_1+R_2}{2}}{R_2 - R_1},$$

$$\xi = \frac{r}{R_2} = \eta + (1-\eta)\left(x + \frac{1}{2}\right), \qquad \sigma = \gamma(R_2 - R_1),$$

$$\overline{u}_A = \frac{u_A}{\overline{u}}, \qquad \overline{v}_A = \frac{v_A(R_2-R_1)}{\nu}, \qquad \mathrm{De} = \frac{\overline{u}(R_2-R_1)}{\nu}\sqrt{\frac{R_2-R_1}{R_2}}, \qquad U = \frac{u^*}{\overline{u}^*}.$$

Здесь $\overline{u}$ — среднерасходная размерная скорость.

Критерий центробежной неустойчивости определяется на основе решения задачи на собственные значения системы уравнений (9) и (10) при следующих граничных условиях:

$$\overline{u}_A = \overline{v}_A = D\overline{u}_A = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm\frac{1}{2}. \tag{11}$$

В результате решения задачи на собственные значения получаем зависимость

$$\mathrm{De} = \mathrm{De}(\sigma, \eta, \mathrm{Da}),$$

минимум которой по волновому числу определяет критерий центробежной неустойчивости $\mathrm{De}_{\text{кр}}$ как функцию параметров η и Da, которые отражают влияние ширины зазора и пористости среды соответственно.

Таблица 1. Значения критических чисел Дина и волновых чисел

η	$\sigma_{\text{кр}}$ [2]	$\text{De}_{\text{кр}}$ [2]	$\text{Da} \to \infty$		$\text{Da} = 1$		$\text{Da} = 0{,}1$		$\text{Da} = 0{,}01$		$\text{Da} = 0{,}001$		$\text{Da} = 0{,}0001$	
			$\sigma_{\text{кр}}$	$\text{De}_{\text{кр}}$	$\sigma_{\text{кр}}$	$\text{De}_{\text{кр}}$	$\sigma_{\text{кр}}$	$\text{De}_{\text{кр}}$	$\sigma_{\text{кр}}$	$\text{De}_{\text{кр}}$	$\sigma_{\text{кр}}$	$\text{De}_{\text{кр}}$	$\sigma_{\text{кр}}$	$\text{De}_{\text{кр}}$
1	3,96	37,31	3,96	35,93	3,97	35,93	3,97	35,93	3,97	35,93	3,97	35,93	3,97	35,93
0,9	4,06	37,7	4,04	36,85	4,04	36,86	4,05	36,93	4,096	37,67	4,47	44,66	7,05	147,43
0,8	4,16	38,3	4,11	37,98	4,10	38,018	4,12	38,31	4,3	41,17	5,34	66,17	13,41	477,12
0,7	4,24	39,51	4,19	39,4	4,21	39,48	4,24	40,13	4,57	46,33	7,085	147,4	20,297	834,56
0,6	4,32	40,96	4,27	41,24	4,31	41,37	4,376	42,51	4,876	53,18	8,596	196,03	6,11	1153,43

Задача на собственные значения решалась методом коллокаций с пробными функциями

$$\overline{u}_A = \sum_{j=1}^{N} a_j \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) x^{j-1}, \qquad \overline{v}_A = \sum_{j=1}^{N} b_j \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)^2 x^{j-1} \tag{12}$$

и

$$\overline{u}_A = \sum_{j=1}^{N} a_j \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) T_{2j-1}(x), \qquad \overline{v}_A = \sum_{j=1}^{N} b_j \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)^2 T_{2j-1}(x), \tag{13}$$

которые удовлетворяют граничным условиям (11). В (13) T — полиномы Чебышева первого рода.

Расчеты показали, что при $N = 500$ отличие результатов расчета чисел Дина при использовании пробных функций (12) и (13) составляет менее 1%.

Результаты расчетов критических чисел Дина и волновых чисел представлены в табл. 1. Здесь же даны результаты расчетов для чистой жидкости, полученные в работе [2]. Как видно, имеется хорошее согласование между результатами настоящих расчетов ($\text{Da} \to \infty$) и данными работы [2] для чистой жидкости. Из таблицы видно, что с увеличением ширины зазора канала (уменьшение η) и увеличением пористости среды (уменьшение Da) критические значения чисел Дина возрастают, т. е. течение становится более устойчивым. При этом влияние пористости возрастает с ростом ширины зазора канала. При $\eta \to 1$ пористость практически не влияет на центробежную неустойчивость, что непосредственно следует из вида уравнений (9) и (10). Критические волновые числа также возрастают с увеличением ширины зазора канала и пористости среды, т. е. с уменьшением значений параметров η и Da трансверсальный масштаб продольных вихрей уменьшается.

Проведенные исследования помогли понять природу образования продольных вихрей в пористых средах. Это позволяет контролировать протекания процессов ДИВЭ, регулируя характеристики вторичных структур.

1. *Долинский А. А., Басок Б. И., Гулый И. С. и др.* Дискретно-импульсный ввод энергии в теплотехнологиях. – Киев: Изд. Ин-та техн. теплофизики НАН Украины, 1996. – 208 с.
2. *Walowit J., Tsao S., DiPrima R. C.* Stability of flow between arbitrarily spaced concentric cylindrical surfaces including the effect of a radial temperature // Trans. ASME, J. Appl. Mech. – 1964. – **31**. – P. 585–594.

Институт технической теплофизики
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 11.09.2009