2. *Коляно Ю. М.* Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – Киев: Наук. думка, 1992. – 280 с.
3. *Сергиенко И. В., Скопецкий В. В., Дейнека В. С.* Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – Киев: Наук. думка, 1991. – 432 с.
4. *Ленюк М. П.* Температурні поля в плоских кусково-однорідних ортотропних областях. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1997. – 188 с.
5. *Конет І. М.* Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в ортотропних сферичних областях. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1998. – 209 с.
6. *Конет І. М., Ленюк М. П.* Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в циліндрично-кругових областях. – Чернівці: Прут, 2001. – 312 с.
7. *Перестюк М. О., Маринець В. В.* Теорія рівнянь математичної фізики. – Київ: Либідь, 2001. – 336 с.
8. *Боли Б., Уэйнер Дж.* Теория температурных напряжений. – Москва: Мир, 1964. – 517 с.
9. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – Москва: Наука, 1971. – 1108 с.

Кам'янець-Подільський державний університет *Надійшло до редакції 26.10.2006*

УДК 512.54

Я. В. Лавренюк

Автоморфізми індуктивних границь з діагональними зануреннями скінченних симетричних та знакозмінних груп

(Представлено членом-кореспондентом НАН України М. О. Перестюком)

We show that every automorphism of a diagonal limit of finite symmetric groups is locally inner.

1. Будемо говорити, що занурення симетричних груп $\mathrm{Sym}(X_1) \to \mathrm{Sym}(X_2)$ діагональне, якщо кожна нетривіальна орбіта групи $\mathrm{Sym}(X_1)$ на множині X_2 є природною. Діагональне занурення називається строго діагональним, якщо немає тривіальних орбіт. Так само визначається діагональне занурення у випадку знакозмінних груп. Діагональною границею скінченних симетричних (знакозмінних) груп називатимемо індуктивну границю з діагональними зануреннями скінченних симетричних (знакозмінних) груп, якщо вона не є фінітарною симетричною (знакозмінною) групою.

У роботах [1, 2] досліджувалися автоморфізми діагональних границь у випадку строго діагональних занурень для симетричних і знакозмінних груп. Зокрема, було встановлено, що кожен автоморфізм індуктивної границі із строго діагональними зануреннями скінченних симетричних груп є локально внутрішнім.

Інші властивості діагональних границь скінченних симетричних і знакозмінних груп можна знайти в [3].

У даному повідомленні досліджуються автоморфізми діагональних границь загального вигляду для скінченних симетричних і знакозмінних груп.

2. Нехай (T, v_0) — локально скінченне кореневе дерево з коренем v_0. Для довільних вершин u, v дерева T $(u, v \in V(T))$ відстанню $d(u, v)$ між u та v є довжина найкоротшого шляху, що з'єднує їх. Для (T, v_0) і невід'ємного цілого $n \geqslant 0$ рівнем n (сферою радіуса n) називається множина

$$V_n(T) = \{v \in V(T) \colon d(v_0, v) = n\}.$$

Якщо валентність вершини $v \in V_n(T)$ залежить лише від рівня n, то дерево T є сферично однорідним. Сферичний індекс сферично однорідного дерева T — це послідовність $\Theta = (n_0, n_1, \ldots)$, де n_0 — валентність кореневої вершини, а $n_m + 1$ — валентність довільної вершини з рівня m.

Нехай (T, v_0) є сферично однорідним деревом зі сферичним індексом Θ. Усі такі дерева ізоморфні дереву T_Θ, множина вершин якого це множина всіх скінченних послідовностей $(i_0, i_1, \ldots, i_{m-1})$, де $i_k \in X_k = \{1, 2, \ldots, n_k\}$ і $m \geqslant 0$ — ціле. Ми також включаємо порожню послідовність, що відповідає випадку $m = 0$. Дві вершини будуть з'єднані ребром тоді і лише тоді, коли вони мають такий вигляд: $(i_0, \ldots, i_{m-1})$, $(i_0, \ldots, i_{m-1}, i_m)$.

Вершина v дерева T лежить під вершиною w, якщо шлях, що з'єднує вершину v з коренем, містить вершину w. Ми позначатимемо символом T_v повне піддерево дерева T, що складається з усіх вершин, які лежать нижче від v з коренем v. Кінець кореневого дерева — це нескінченний шлях без повторень з початком у корені. Ми позначатимемо символом ∂T множину всіх кінців (границю) дерева T.

Зафіксуємо деяку нескінченну строго спадну послідовність додатних чисел $\overline{\lambda} = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, яка збігається до 0. Ми можемо ввести природну ультраметрику на ∂T, поклавши $\rho(x_1, x_2) = \lambda_n$, де n — довжина найбільшої спільної частини кінців x_1 і x_2. У результаті дістаємо компактний ультраметричний простір, який позначатимемо $(\partial T, \overline{\lambda})$, чи просто ∂T.

Тепер визначимо дії діагональних границь скінченних симетричних і знакозмінних груп на метричних просторах, які будуються за допомогою кореневих дерев.

Зафіксуємо послідовність сферичних індексів $\Theta(i) = (n_i, n_{i+1}, \ldots)$ та послідовність невід'ємних цілих чисел $\{k_i\}$, $i \geqslant 0$. Для зручності надалі будемо вважати, що $n_0 = 1$ і $k_0 \geqslant 1$. Також ми обмежимо розгляд сферичних індексів умовою $n_i \geqslant 2$ для всіх $i \geqslant 1$. Розглянемо ліс T_χ, який складається з об'єднання k_i екземплярів дерев $T_{\Theta(i)}$ для всіх i:

$$T_\chi = \bigcup_{i \geqslant 0} \bigcup_{k_i} T_{\Theta(i)}.$$

Границя ∂T_χ лісу T_χ визначається як об'єднання границь дерев:

$$\partial T_\chi = \bigcup_{i \geqslant 0} \bigcup_{k_i} \partial T_{\Theta(i)}.$$

Метрику на границі ∂T_χ вводимо таким чином: якщо $x_1 \in \partial T_{\Theta(i)}$, $x_2 \in \partial T_{\Theta(j)}$, то

$$\rho(x_1, x_2) = \lambda_{n + \min\{i, j\}},$$

де n — довжина найбільшої спільної частини кінців x_1 і x_2.

Розбиття на рівні визначимо в T_χ рівністю:

$$V_n(T_\chi) = \bigcup_{i=0}^{n} V_{n-i}(T_{\Theta(i)}).$$

За таких домовленостей матимемо, що для довільних v_1, v_2 з $V_n(T_\chi)$ кореневі дерева T_{v_1} та T_{v_2} є ізоморфними сферично-однорідними деревами.

Тому ми можемо визначити групу $S(\partial T_\chi, n)$ тих гомеоморфізмів ∂T_χ, які лише переставляють кулі ∂T_v ($v \in V_n(T_\chi)$), тобто не змінюють відповідні координати відповідних шляхів. Очевидно, що $S(\partial T, n)$ збігається з симетричною групою $\mathrm{Sym}\,(V_n(T_\chi))$ і $S(\partial T, n) \leqslant$ $\leqslant S(\partial T, k)$ для $n \leqslant k$. Група $S(\partial T_\chi) < \mathrm{Homeo}\,\partial T_\chi$ визначається як об'єднання підгруп $S(\partial T, n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Визначимо також підгрупу $A(\partial T)$ групи $S(\partial T)$, як об'єднання знакозмінних підгруп $A(\partial T, n) = \mathrm{Alt}\,(V_n(T_\chi)) \leqslant S(\partial T, n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Нехай V — підмножина $V_i(T_\chi)$ для $i > 0$ і нехай H — один із символів S або A. Розглянемо підгрупу, що складається з усіх гомеоморфізмів ∂T_χ, які діють тривіально за межами $\partial(V) = \bigcup\limits_{v \in V} \partial T_v$. Ми будемо позначати цю підгрупу — $H(\partial(V))$. Група $H(\partial(V))$ є індуктивною границею зі строго діагональними зануреннями скінченних симетричних (відповідно знакозмінних) груп.

3. Нехай T_χ — побудований вище ліс, тобто виконуються всі встановлені раніше обмеження.

Лема 1. *Централізатори підгруп $S(\partial T_\chi, n)$ та $A(\partial T_\chi, n)$ збігаються, якщо $|V_n| \geqslant 4$.*

Твердження 1. *Нехай H означає S або A. Розглянемо автоморфізм $\alpha \in \mathrm{Aut}\,H_\chi$. Тоді для довільного натурального n існує таке натуральне $k \geqslant n$, що звуження $\alpha|_{H(\partial T, n)}$ належить до $\mathrm{Inn}\,S(\partial T, k)$.*

Схема доведення. Оскільки H_χ має тривіальний центр, то різні гомеоморфізми з $\mathrm{Homeo}\,\partial T$, які нормалізують H_χ, індукують різні автоморфізми H_χ. За теоремою 1 [4] такими автоморфізмами вичерпуються всі автоморфізми групи H_χ. Тому, дозволяючи собі певну вільність у термінології, ототожнюватимемо групу автоморфізмів H_χ та нормалізатор H_χ в $\mathrm{Homeo}\,\partial T_\chi$. Нехай гомеоморфізм $\alpha \in \mathrm{Homeo}\,\partial T_\chi$ є автоморфізмом групи H_χ. Розглянемо групу $X(\partial(V_n))$. Це у випадку $S(\partial(V_n))$ найбільша група, що діє нетривіально на множині $\partial(V_n)$, або у випадку $A(\partial(V_n))$ — її комутант. В обох випадках її образом під дією α є $H(\partial(V_n)^\alpha)$. Оскільки ж $\partial(V_n)^\alpha$ є компактом, то існує таке натуральне $m \geqslant n$ і підмножина $V \subseteq V_m$, що $\partial(V_n)^\alpha = \partial(V)$.

Далі, оскільки α зберігає міру (див. [5]), то $S(\partial T, m)$ містить такий елемент g, що $g(\partial(V_n)) = \partial(V)$. Звідси звуження гомеоморфізму αg^{-1} на $H(\partial(V_n))$ є автоморфізмом цієї групи. За твердженням 1 з [1] існує таке $k \geqslant m$, що звуження αg^{-1} на $X(\partial T, n)$ збігається з дією деякого елемента з $S(\partial T, k)$.

Користуючись цим твердженням, можна довести такі теореми.

Теорема 1. *Для довільного T_χ кожен автоморфізм групи S_χ є локально внутрішнім.*

Теорема 2. *Нехай H позначає або S або A, $m \in \mathbb{N}$. Якщо ϕ — деякий ізоморфізм групи H_{χ_1} на групу H_{χ_2}, то звуження ϕ на $H(\chi_1, m)$ буде діагональним зануренням $H(\chi_1, m)$ в $H(\chi_2, n)$ для деякого $n \in \mathbb{N}$.*

Теорема 3. *Нормалізатор $N(A_\chi)$ підгрупи A_χ в $\mathrm{Homeo}(\partial T_\chi)$ збігається з нормалізатором $N(S_\chi)$ групи S_χ в $\mathrm{Homeo}(\partial T_\chi)$.*

Схема доведення. Нехай $a \in \mathrm{Homeo}(\partial T_\chi)$ нормалізує A_χ, а α — автоморфізм A_χ, що індукується a. З твердження 2 випливає, що $\alpha|_{S(\partial T_\chi, n)} \in \mathrm{Inn}\,S(\partial T_\chi, k)$. Це включення та лема 1 забезпечують належність гомеоморфізму a до $N_{\mathrm{Homeo}(\partial T_\chi)}(S_\chi)$. Тому нормалізатор A_χ міститься в нормалізаторі S_χ. З іншого боку, A_χ є комутантом S_χ. Звідси $N(S_\chi)$ є підгрупою $N(A_\chi)$. Таким чином, $N(A_\chi) = N(S_\chi)$.

Центалізатори цих груп в $\mathrm{Homeo}(\partial T_\chi)$ тривіальні. Тому одержуємо як наслідок

Теорема 4. *Для довільного T_χ група автоморфізмів групи A_χ ізоморфна групі автоморфізмів групи S_χ.*

1. *Lavrenyuk Ya. V., Sushchansky V. I.* Automorphisms of homogeneous symmetric groups and hierarchomorphisms of rooted trees // Algebra and Discrete Mathematics. – 2003. – **2**, No 4. – P. 33–49.
2. *Lavrenyuk Y. V., Sushchansky V. I.* Notes to "automorphisms of homogeneous symmetric groups and hierarchomorphisms of rooted trees" // Ibid. – 2005. – **4**, No 2. – P. 70–72.
3. *Лавренюк Я.В.* Класифікація індуктивних границь з діагональними зануреннями скінченних симетричних та знакозмінних груп // Доп. НАН України. – 2005. – № 9. – С. 24–27.
4. *Rubin M.* On the reconstruction of topological spaces from their groups of homeomorphisms // Trans. Amer. Math. Soc. – 1989. – **312**, No 2. – P. 487–538.
5. *Nekrashevych V.* Self-similar groups. AMS: Mathematical Surveys and Monographs. – 2005. – Vol. 117. – 231 p.

Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 13.09.2006

УДК 512.4

Ю. Г. Леонов

Критерий промежуточного роста самоподобных групп

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Ю. С. Самойленко)

A new method for the upper estimation of growth for some infinite groups of the automorphisms of trees is investigated. A criterion which distinguishes when a group has exponential growth or subexponential is established.

В 1968 г. Дж. Милнор [1] поставил вопрос о существовании групп, у которых функция роста растет быстрее любой степенной функции и медленнее показательной. Такие группы называются группами промежуточного роста.

Напомним, что функция роста конечно порожденной группы G с системой порождающих S определяется соотношением

$$\gamma(n) = \#\{g \in G;\, l(g) \leqslant n\},$$

где $l(g)$ — длина элемента g относительно S.

Будем говорить, что функция $f_1(n)$ растет не быстрее, чем $f_2(n)$: $f_1(n) \preceq f_2(n)$, если найдется $c > 0$ такое, что $f_1(n) \leqslant f_2(cn)$, для любых $n \in \mathbb{N}$. Если $f_1(n) \preceq f_2(n)$ и $f_2(n) \preceq f_1(n)$, то функции эквивалентны: $f_1(n) \sim f_2(n)$. Функции роста одной и той же конечно порожденной группы при различных конечных системах порождающих эквивалентны.

В работе [2] Р. И. Григорчук показал, что группа из [3] Gr имеет промежуточный рост, тем самым ответив на вопрос Милнора. Исследуя функции роста группы, мы часто можем