УДК 629.7.054

В. В. Карачун, В. М. Мельник

Коливання і хвилі в імпедансних системах інерціальної навігації

(Представлено академіком НАН України В. М. Кошляковим)

The analysis of the elastic interaction of external influences with a suspended gyroscope is carried out. The coordinate functions of a float for any perturbation are determined.

Незважаючи на стрімкий розвиток альтернативних засобів навігації, зокрема, глобальних супутникових радіонавігаційних систем класу "Транзит" та "ЦИКАДА" з використанням низькоорбітальних штучних супутників Землі, а також середньоорбітальних "NAVSTAR" і "ГЛОНАС", які забезпечують оперативну навігацію наземних, морських та повітряних і космічних апаратів в режимах відкритого (S/A-код) та закритого для військових користувачів (P-код) каналів, а також створення Глобальної європейської геостаціонарної системи GALILEO, інерціальні навігаційні системи на теперішній час все ж залишаються одними з найважливіших на рухомих об'єктах.

На точність інерціальних навігаційних систем впливають зовнішні чинники — кутова хитавиця фюзеляжу, вібрація, проникаюче акустичне випромінювання, тепловий факел тощо. Похибки виведення ракет-носіїв, як відомо, можуть призвести до істотного скорочення часу існування космічного апарату та виникнення позаштатних ситуацій, похибки курсовказування на морі — до виникнення небезпеки судноплавства. Взагалі, похибки систем інерціальної навігації призводять до погіршення тактико-технічних характеристик об'єкта в цілому [1–3].

Натурні випробування дозволяють стверджувати, що саме під час старту ракет-носіїв розгінні блоки інжектують найбільш високий рівень акустичного випромінювання в навколишнє середовище. Частина його потрапляє всередину фюзеляжу та під головний аеродинамічний обтікач і становить 140–150 дБ. Таким чином, прилади і системи інерціальної навігації, які разом з корисним вантажем розміщуються саме тут, підвладні його впливу [4].

Але це джерело не єдине. Зовнішні прошарки примежових шарів рухаються відносно корпуса ракети із надзвуковою швидкістю, внаслідок чого з'являється турбулентність, що є причиною виникнення гостронапрямлених та сферичних хвиль Маха, які, взаємодіючи з корпусом, породжують нове джерело шуму. Ці хвилі найбільш небезпечні, оскільки можуть бути досить інтенсивними [5]. Нарешті відзначимо, що при старті ракет мобільного базування звукове поле має дуже складну структуру внаслідок генерування не тільки прямого випромінювання, але і відбитого акустичного поля, зумовленого реверберраційними ефектами. За об'єкт досліджень авторами обрано серійно виготовлюваний промисловістю поплавковий двостепеневий датчик кутових швидкостей класу ДУСМ. Технічна реалізація цього приладу являє собою систему двох коаксіальних циліндрів, між якими знаходиться важка рідина. Гіроагрегат розташований у внутрішньому циліндрі із залишковою (або нульовою) плавучістю. Проникаюче акустичне випромінювання впливає на динамічний стан рухомої частини гіроскопа-поплавця таким чином:

$$\frac{\partial^2 U_{z,k}}{\partial z^2} - a_1(2z-1)\frac{\partial U_{z,k}}{\partial z} - a_2 U_{zk} + a_3\frac{\partial^2 U_{\varphi,k}}{\partial z\partial\varphi} - a_4\frac{\partial W_k}{\partial z} =$$

$$= -[1+\alpha_1(2z-1)^2]q^*{}_1 + [1+\alpha_1(2z-1)^2]\alpha_1^{*2}\frac{\partial^2 U_{zk}}{\partial t^2}; \qquad (1)$$

$$\frac{\partial^2 U_{\varphi,k}}{\partial\varphi^2} + b_1[1-\beta_1(2z-1)^2]\frac{\partial^2 U_{z,k}}{\partial z\partial\varphi} - b_2[1-2\beta_1(2z-1)^2\frac{\partial^2 U_{\varphi,k}}{\partial z^2} -$$

$$- b_3(2z-1)\frac{\partial U_{\varphi,k}}{\partial z} - b_4(2z-1)\frac{\partial U_{z,k}}{\partial\varphi} + b_5 U_{\varphi,k} - b_6\frac{\partial W_k}{\partial\varphi} =$$

$$= -[1-\beta_3(2z-1)^2]q_2^* + \beta^{*2}[1-\beta_3(2z-1)^2]\frac{\partial^2 U_{\varphi,k}}{\partial t^2}; \qquad (2)$$

$$[-1+\beta_4(2z-1)^2]\frac{\partial^4 W_k}{\partial z^4} - c_1\frac{\partial^4 W_k}{\partial z^2\partial\varphi^2} - c_2\frac{\partial^4 W_k}{\partial\varphi^4} + c_3(2z-1)\frac{\partial^3 W_k}{\partial z^3} - c_4\frac{\partial^3 W_k}{\partial z\partial\varphi^2} +$$

$$+ c_5\frac{\partial^2 W_k}{\partial z^2} - c_6\frac{\partial^2 W_k}{\partial\varphi^2} - c_7(2z-1)\frac{\partial W_k}{\partial z} - c_8\frac{\partial^3 U_{\varphi,k}}{\partial\varphi^3} - c_9\frac{\partial^3 U_{\varphi,k}}{\partial z^2\partial\varphi} - c_{10}\frac{\partial^3 U_z,k}{\partial z\partial\varphi^2} +$$

$$+c_{11}(2z-1)\frac{\partial^2 U_{z,k}}{\partial z^2} + c_{12}(2z-1)\frac{\partial^2 U_{\varphi,k}}{\partial z\partial\varphi} + c_{13}\frac{\partial U_{z,k}}{\partial z} + c_{14}\frac{\partial U_{\varphi,k}}{\partial\varphi} - c_{15}(2z-1)U_{z,k} =$$

$$= [1-\beta_5(2z-1)]q^*{}_3 + \gamma^{*2}[1-\beta_5(2z-1)]\frac{\partial^2 W_k}{\partial t^2}, \qquad (3)$$

де $U_{z,k}$, $U_{\varphi,k}$, W_k — координатні функції;

$$q^*{}_i = q^*{}_i(t,z,\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty}[q_{i,k}^{(1)}(t,z)\cos k\varphi + q_{i,k}^{(2)}(t,z)\sin k\varphi], \qquad (4)$$

$i = \overline{1,3}$ — зовнішні чинники, що діють на поверхню поплавця.

Введення параметра $k = 0, 1, 2, \ldots$ дозволяє розширити коло задач, що вивчаються: $k = 0$ відповідає осесиметричній деформації, $k = 1$ — неосесиметричній деформації, $k \geqslant 2$ — циклічному навантаженню.

Координатні функції шукаємо у вигляді:

$$U_{z,k} = U_0 + U_{\text{об}} + \sum_{k=0}^{\infty}[a_k^{(1)}\cos k\varphi\cos nz + a_k^{(2)}\sin k\varphi\sin nz]z^2(1-z)^2\exp i\omega t;$$

$$U_{\varphi,k} = V_0 + V_{\text{об}} + \sum_{k=0}^{\infty}[b_k^{(1)}\sin k\varphi\cos mz + b_k^{(2)}\cos k\varphi\sin mz]z^2(1-z)^2\exp i\omega t; \qquad (5)$$

$$W_k = W_0 + W_{\text{об}} + \sum_{k=0}^{\infty}[c_k^{(1)}\cos k\varphi\cos pz + c_k^{(2)}\sin k\varphi\sin pz]z^4(1-z)^4\exp i\omega t,$$

де $z^2(1-z)^2$, $z^4(1-z)^4$ — коректуючі функції Кравчука, за допомогою яких можна задовольнити будь-які граничні умови; z — поздовжня координата оболонкової частини поплавця; φ — колова.

Оскільки переміщення довільної точки поверхні поплавця дорівнює векторній сумі переміщень точок серединної поверхні і переміщень внаслідок поворотів матеріалу в околиці точки поверхні, у виразі (5) слід прийняти

$$U_{\text{об}} = V_{\text{об}} = W_{\text{об}} = 0,$$

що значно спростить аналіз.

Параметри n, m, p визначають кількість напівхвиль у відповідному координатному напрямку. Чисельний аналіз довів, що partialis частоти координатних функцій практично не змінюються для кількості напівхвиль від 1 до 5. Це підтверджує відомий факт щодо найбільшої відповідності частотам реальної оболонки більш низьких partialis частот. Отже, надалі можна прийняти

$$n = m = p = 1.$$

Інтегруючи вирази (1)–(3) методом Бубнова–Гальоркіна, отримуємо для кожного з них по два звичайних диференціальних рівняння відносно невідомих $a_k^{(1)}$, $a_k^{(2)}$, $b_k^{(1)}$, $b_k^{(2)}$, $c_k^{(1)}$, $c_k^{(2)}$:

$$\begin{cases} (a_{z2}^{(1)} - \omega^2 a_{z1}^{(1)}) a_k^{(1)} + a_{z3}^{(1)} b_k^{(1)} + a_{z4}^{(1)} c_k^{(1)} = Q_z^{(1)}(t); \\ (a_{z2}^{(2)} - \omega^2 a_{z1}^{(2)}) a_k^{(2)} + a_{z3}^{(2)} b_k^{(2)} + a_{z4}^{(2)} c_k^{(2)} = Q_z^{(2)}(t); \\ (-b_{\varphi2}^{(1)} - \omega^2 b_{\varphi1}^{(1)}) b_k^{(1)} + b_{\varphi3}^{(1)} a_k^{(1)} + b_{\varphi4}^{(1)} c_k^{(1)} = Q_\varphi^{(1)}(t); \\ (b_{\varphi2}^{(2)} - \omega^2 b_{\varphi1}^{(2)}) b_k^{(2)} + b_{\varphi3}^{(2)} a_k^{(2)} + b_{\varphi4}^{(2)} c_k^{(2)} = Q_\varphi^{(2)}(t); \\ (c_{w2}^{(1)} - \omega^2 c_{w1}^{(1)}) c_k^{(1)} + c_{w3}^{(1)} b_k^{(1)} + c_{w4}^{(1)} a_k^{(1)} = Q_w^{(1)}(t); \\ (c_{w2}^{(2)} - \omega^2 c_{w1}^{(2)}) c_k^{(2)} + c_{w3}^{(2)} b_k^{(2)} + c_{w4}^{(2)} a_k^{(2)} = Q_w^{(2)}(t). \end{cases} \tag{6}$$

Система рівнянь (6), очевидно, розпадається на дві незалежні системи: 1, 3, 5 рівняння та 2, 4, 6. Це значно спрощує подальші процедури.

Прирівнявши нулю праві частини системи (6), отримуємо рівняння частот

$$\omega^6 + E_1^{(1)}\omega^4 + E_2^{(1)}\omega^2 + E_3^{(1)} = 0; \tag{7}$$

$$\omega^6 + E_1^{(2)}\omega^4 + E_2^{(2)}\omega^2 + E_3^{(2)} = 0, \tag{8}$$

де

$$E_1^{(1)} = \frac{a_{z2}^{(1)}}{a_{z1}^{(1)}} + \frac{b_{\varphi2}^{(1)}}{b_{\varphi1}^{(1)}} + \frac{c_{w2}^{(1)}}{c_{w1}^{(1)}};$$

$$E_2^{(1)} = -\frac{b_{\varphi2}^{(1)}}{b_{\varphi1}^{(1)}}\left(\frac{a_{z2}^{(1)}}{a_{z1}^{(1)}} + \frac{c_{w2}^{(1)}}{c_{w1}^{(1)}}\right) - \frac{a_{z2}^{(1)}}{a_{z1}^{(1)}} \cdot \frac{c_{w2}^{(1)}}{c_{w1}^{(1)}} + \frac{b_{\varphi4}^{(1)}}{b_{\varphi1}^{(1)}} \cdot \frac{c_{w3}^{(1)}}{c_{w1}^{(1)}} + \frac{a_{z3}^{(1)}}{a_{z1}^{(1)}} \cdot \frac{b_{\varphi3}^{(1)}}{b_{\varphi1}^{(1)}} + \frac{a_{z4}^{(1)}}{a_{z1}^{(1)}} \cdot \frac{c_{w4}^{(1)}}{c_{w1}^{(1)}};$$

$$E_3^{(1)} = \frac{a_{z2}^{(1)}}{a_{z1}^{(1)}} \cdot \frac{b_{\varphi2}^{(1)}}{b_{\varphi1}^{(1)}} \cdot \frac{c_{w2}^{(1)}}{c_{w1}^{(1)}} - \frac{a_{z2}^{(1)}}{a_{z1}^{(1)}} \cdot \frac{b_{\varphi4}^{(1)}}{b_{\varphi1}^{(1)}} \cdot \frac{c_{w3}^{(1)}}{c_{w1}^{(1)}} + \frac{a_{z3}^{(1)}}{a_{z1}^{(1)}} \cdot \frac{b_{\varphi4}^{(1)}}{b_{\varphi1}^{(1)}} \cdot \frac{c_{w4}^{(1)}}{c_{w1}^{(1)}} - \frac{c_{w2}^{(1)}}{c_{w1}^{(1)}} \cdot \frac{a_{z3}^{(1)}}{a_{z1}^{(1)}} \cdot \frac{b_{\varphi3}^{(1)}}{b_{\varphi1}^{(1)}} + {}$$

$$+ \frac{a_{z4}^{(1)}}{a_{z1}^{(1)}} \cdot \frac{b_{\varphi3}^{(1)}}{b_{\varphi1}^{(1)}} \cdot \frac{c_{w3}^{(1)}}{c_{w1}^{(1)}} - \frac{a_{z4}^{(1)}}{a_{z1}^{(1)}} \cdot \frac{b_{\varphi2}^{(1)}}{b_{\varphi1}^{(1)}} \cdot \frac{c_{w4}^{(1)}}{c_{w1}^{(1)}};$$

$$E_1^{(2)} = \frac{a_{z2}^{(2)}}{a_{z1}^{(2)}} - \frac{b_{\varphi 2}^{(2)}}{b_{\varphi 1}^{(2)}} + \frac{c_{w2}^{(2)}}{c_{w1}^{(2)}};$$

$$E_2^{(2)} = \frac{b_{\varphi 2}^{(2)}}{b_{\varphi 1}^{(2)}}\left(\frac{a_{z2}^{(2)}}{a_{z1}^{(2)}} + \frac{c_{w2}^{(2)}}{c_{w1}^{(2)}}\right) - \frac{a_{z2}^{(2)}}{a_{z1}^{(2)}}\cdot\frac{c_{w2}^{(2)}}{c_{w1}^{(2)}} + \frac{b_{\varphi 4}^{(2)}}{b_{\varphi 1}^{(2)}}\cdot\frac{c_{w3}^{(2)}}{c_{w1}^{(2)}} + \frac{a_{z3}^{(2)}}{a_{z1}^{(2)}}\cdot\frac{b_{\varphi 3}^{(2)}}{b_{\varphi 1}^{(2)}} + \frac{a_{z4}^{(2)}}{a_{z1}^{(2)}}\cdot\frac{c_{w4}^{(2)}}{c_{w1}^{(2)}};$$

$$E_3^{(2)} = -\frac{a_{z2}^{(2)}}{a_{z1}^{(2)}}\cdot\frac{b_{\varphi 2}^{(2)}}{b_{\varphi 1}^{(2)}}\cdot\frac{c_{w2}^{(2)}}{c_{w1}^{(2)}} - \frac{a_{z2}^{(2)}}{a_{z1}^{(2)}}\cdot\frac{b_{\varphi 4}^{(2)}}{b_{\varphi 1}^{(2)}}\cdot\frac{c_{w3}^{(2)}}{c_{w1}^{(2)}} + \frac{a_{z3}^{(2)}}{a_{z1}^{(2)}}\cdot\frac{b_{\varphi 4}^{(2)}}{b_{\varphi 1}^{(2)}}\cdot\frac{c_{w4}^{(2)}}{c_{w1}^{(2)}} - \frac{a_{z3}^{(2)}}{a_{z1}^{(2)}}\cdot\frac{b_{\varphi 3}^{(2)}}{b_{\varphi 1}^{(2)}}\cdot\frac{c_{w2}^{(2)}}{c_{w1}^{(2)}} +$$

$$+ \frac{a_{z4}^{(2)}}{a_{z1}^{(2)}}\cdot\frac{b_{\varphi 3}^{(2)}}{b_{\varphi 1}^{(2)}}\cdot\frac{c_{w3}^{(2)}}{c_{w1}^{(2)}} + \frac{a_{z4}^{(2)}}{a_{z1}^{(2)}}\cdot\frac{b_{\varphi 2}^{(2)}}{b_{\varphi 1}^{(2)}}\cdot\frac{c_{w4}^{(2)}}{c_{w1}^{(2)}};$$

$$a_{z1}^{(1)} = -\alpha^{*2}\int_0^1 [1+\alpha_1(2z-1)^2]\omega_1^2(z){\varphi_1}^{(1)2}(z)\partial z;$$

$$\omega_1(z) = z^2(1-z)^2; \qquad \varphi_1^{(1)}(z) = \cos(nz);$$

$$a_{z2}^{(1)} = \int_0^1 \left\{\frac{\partial^2}{\partial z^2}[\omega_1(z)\varphi_1^{(1)}(z)] - a_1(2z-1)\frac{\partial}{\partial z}[\omega_1(z)_1\varphi_1^{(1)}(z)] - a_2\omega_1(z)\varphi_1^{(1)}(z)\right\}\omega_1(z)\varphi_1^{(1)}(z)\partial z;$$

$$a_{z3}^{(1)} = a_3\int_0^1 \frac{\partial}{\partial z}[\omega_1(z)\psi_1^{(1)}(z)]\omega_1(z)\varphi_1^{(1)}(z)\partial z; \quad a_{z4}^{(1)} = -a_4\int_0^1 \frac{\partial}{\partial z}[\omega_2(z)\gamma_1^{(1)}(z)]\omega_1(z)\varphi_1^{(1)}(z)\partial z;$$

$$\omega_2(z) = z^4(1-z)^4; \qquad \gamma_1^{(1)}(z) = \cos(mz);$$

$$a_{z1}^{(2)} = -\alpha^{*2}\int_0^1 [1+\alpha_1(2z-1)^2]\cdot\omega_1^2(z)\varphi_1^{(2)2}(z)\partial z;$$

$$a_{z2}^{(2)} = \int_0^1 \left\{\frac{\partial^2}{\partial z^2}[\omega_1(z)\varphi_1^{(2)}(z)] - a_1(2z-1)\frac{\partial}{\partial z}[\omega_1(z)\varphi_1^{(2)}(z)] - a_2\omega_1(z)\varphi_1^{(2)}(z)\right\}\omega_1(z)\varphi_1^{(2)}(z)\partial z;$$

$$a_{z3}^{(2)} = -a_3\int_0^1 \frac{\partial}{\partial z}[\omega_1(z)\varphi_1^{(2)}(z)]\omega_1(z)\varphi_1^{(2)}(z)\partial z; \qquad \varphi_1^{(2)}(z) = \sin(nz);$$

$$a_{z4}^{(2)} = -a_4\int_0^1 \frac{\partial}{\partial z}[\omega_2(z)\gamma_1^{(2)}(z)]\omega_1(z)\varphi_1^{(2)}(z)\partial z;$$

$$\alpha^{*2} = (1-\nu^2)\frac{\rho\omega_{o\partial}^2 l^2}{E}; \qquad \alpha_1 = \frac{2\mu\delta}{R(1+\zeta)}; \qquad \zeta = \frac{\delta}{R}; \qquad \mu = 8\zeta(1+\zeta)\eta^2; \qquad \eta = \frac{R}{l};$$

R, l — радіус та довжина поплавця; δ — опуклість (угнутість) лінії меридіана оболонки поплавця; ν — коефіцієнт Пуассона; $\omega_{o\partial}^2$ — власна частота оболонки у поздовжньому напрямку;

$$\beta_{\varphi1}^{(1)} = -\beta^{*2}\int\limits_0^1 [1-\beta_3(2z-1)^2]\cdot\omega_1^2(z){\psi_1}^{(1)2}(z)\partial z; \qquad \psi_1^{(1)}(z) = \cos(mz);$$

$$\beta_{\varphi2}^{(1)} = \int\limits_0^1 \Big\{-b_2[1-2\beta_1(2z-1)^2]\frac{\partial^2}{\partial z^2}[\omega_1(z)\psi_1^{(1)}(z)] - b_3(2z-1)\frac{\partial}{\partial z}[\omega_1(z)\psi_1^{(1)}(z)] +$$

$$+ b_5\omega_1(z)\psi_1^{(1)}(z)\Big\}\omega_1(z)\psi_1^{(1)}(z)\partial z;$$

$$\beta_{\varphi3}^{(1)} = \int\limits_0^1 \Big\{-b_2[1-\beta_1(2z-1)^2]\frac{\partial^2}{\partial z^2}[\omega_1(z)\varphi_1^{(1)}(z)] + b_4(2z-1)\omega_1(z)\varphi_1^{(1)}(z)\Big\}\omega_1(z)\psi_1^{(1)}(z)\partial z;$$

$$b_{\varphi4}^{(1)} = b_6\int\limits_0^1 \omega_2(z)\gamma_1^{(1)}(z)\omega_1(z)\psi_1^{(1)}(z)\partial z;$$

$$\beta_{\varphi1}^{(2)} = -\beta^{*2}\int\limits_0^1 [1-\beta_3(2z-1)^2]\omega_1^2(z)\psi_1^{(2)2}(z)\partial z; \qquad \psi_1^{(2)}(z) = \sin(mz);$$

$$\beta_{\varphi2}^{(2)} = \int\limits_0^1 \Big\{-\omega_1(z)\psi_1^{(2)}(z) - b_2[1-2\beta_1(2z-1)^2]\frac{\partial^2}{\partial z^2}[\omega_1(z)\psi_1^{(2)}(z)] -$$

$$- b_3(2z-1)\frac{\partial}{\partial z}[\omega_1(z)\psi_1^{(2)}(z)] + b_5\omega_1(z)\psi_1^{(2)}(z)\Big\}\omega_1(z)\psi_1^{(2)}(z)\partial z;$$

$$\beta_{\varphi3}^{(2)} = \int\limits_0^1 \{b_1[1-\beta_1(2z-1)^2]\frac{\partial}{\partial z}[\omega_1(z)\varphi_1^{(2)}(z)] - b_4(2z-1)\omega_1(z)\varphi_1^{(2)}(z)\}\omega_1(z)\psi_1^{(2)}(z)\partial z;$$

$$b_{\varphi4}^{(2)} = -\int\limits_0^1 b_6\omega_2(z)\gamma_1^{(2)}(z)\omega_1(z)\psi_1^{(2)}(z)\partial z; \qquad \gamma_1^{(2)} = \sin pz;$$

$$\beta^{*2} = (1-\nu^2)\frac{\rho\omega_{\text{on}}^2}{E}R^2(1+\zeta)^2;$$

ω_{on}^2 — власна частота оболонки в коловому напрямку;

$$\beta_1 = \frac{1+\mu}{1+\zeta}\cdot\frac{\delta}{R}; \quad \beta_3 = \frac{1}{1+\zeta}\cdot\frac{\delta}{R}; \quad b_1 = \frac{1}{2}(1+\nu)(1+\zeta)\frac{R}{l}; \quad b_2 = \frac{1}{2}(1-\nu)(1+\zeta)^2\frac{R^2}{l^2};$$

$$b_3 = 2(1-\nu)(1+\mu)(1+\zeta)\frac{\delta}{l}\cdot\frac{R}{l}; \qquad b_4 = 2(3-\nu)\cdot\frac{\delta}{R}; \qquad b_5 = 1+\nu\mu;$$

$$c_{w1}^{(1)} = -\gamma^{*2}\int\limits_0^1 [1-\beta_5(2z-1)]\omega_2^2(z){\gamma_1}^{(1)2}(z)\partial z; \qquad \gamma_1^{(1)} = \cos(pz);$$

$$c_{w2}^{(1)}=\int\limits_0^1\biggl\{[-1+\beta_4(2z-1)^2]\frac{\partial^4}{\partial z^4}[\omega_2(z)\gamma_1^{(1)}(z)]+c_1\frac{\partial^2}{\partial z^2}[\omega_2(z)\gamma_1^{(1)}(z)]-$$

$$-c_2\omega_2(z)\gamma_1^{(1)}(z)+c_3(2z-1)\frac{\partial^3}{\partial z^3}[\omega_2(z)\gamma_1^{(1)}(z)]+c_4\frac{\partial^2}{\partial z^2}[\omega_2(z)\gamma_1^{(1)}(z)]+$$

$$+c_5\frac{\partial^2}{\partial z^2}[\omega_2(z)\gamma_1^{(1)}(z)]+c_6\omega_2(z)\gamma_1^{(1)}(z)-c_7(2z-1)\frac{\partial}{\partial z}[\omega_2(z)\gamma_1^{(1)}(z)]\biggr\}\omega_2(z)\gamma_1^{(1)}(z)\partial z;$$

$$c_{w3}^{(1)}=\int\limits_0^1\biggl\{c_8\omega_1(z)\psi_1^{(1)}(z)-c_9\frac{\partial^2}{\partial z^2}[\omega_1(z)\psi_1^{(1)}(z)]+c_{12}(2z-1)\frac{\partial}{\partial z}[\omega_1(z)\psi_1^{(1)}(z)]+$$

$$+c_{14}\omega_1(z)\psi_1^{(1)}(z)\biggr\}\omega_2(z)\gamma_1^{(1)}(z)\partial z;$$

$$c_{w4}^{(1)}=\int\limits_0^1\biggl\{c_{10}\frac{\partial}{\partial z}[\omega_1(z)\varphi_1^{(1)}(z)]+c_{11}(2z-1)\frac{\partial^2}{\partial z^2}[\omega_1(z)\varphi_1^{(1)}(z)]+c_{13}\frac{\partial}{\partial z}[\omega_1(z)\varphi_1^{(1)}(z)]-$$

$$-c_{15}(2z-1)\omega_1(z)\varphi_1^{(1)}(z)\biggr\}\omega_2(z)\gamma_1^{(1)}(z)\partial z;$$

$$c_{w1}^{(2)}=-\gamma^{*2}\int\limits_0^1[1-\beta_5(2z-1)]\omega_2^2(z){\gamma_1}^{(2)2}(z)\partial z;$$

$$c_{w2}^{(2)}=\int\limits_0^1\biggl\{[-1+\beta_4(2z-1)^2]\frac{\partial^4}{\partial z^4}[\omega_2(z)\gamma_1^{(2)}(z)]+c_1\frac{\partial^2}{\partial z^2}[\omega_2(z)\gamma_1^{(2)}(z)]-$$

$$-c_2\omega_2(z)\gamma_1^{(2)}(z)+c_3(2z-1)\frac{\partial^3}{\partial z^3}[\omega_2(z)\gamma_1^{(2)}(z)]+c_4\frac{\partial}{\partial z}[\omega_2(z)\gamma_1^{(2)}(z)]+$$

$$+c_5\frac{\partial^2}{\partial z^2}[\omega_2(z)\gamma_1^{(2)}(z)]+c_6\omega_2(z)\gamma_1^{(2)}(z)-c_7(2z-1)\frac{\partial}{\partial z}[\omega_2(z)\gamma_1^{(2)}(z)]\biggr\}\omega_2(z)\gamma_1^{(2)}(z)\partial z;$$

$$c_{w3}^{(2)}=\int\limits_0^1\biggl\{-c_8\omega_1(z)\psi_1^{(2)}(z)+c_9\frac{\partial^2}{\partial z^2}[\omega_1(z)\psi_1^{(2)}(z)]-c_{12}(2z-1)\frac{\partial}{\partial z}[\omega_1(z)\psi_1^{(2)}(z)]-$$

$$-c_{14}\omega_1(z)\psi_1^{(2)}(z)\biggr\}\omega_2(z)\gamma_1^{(2)}(z)\partial z;$$

$$c_{w4}^{(2)}=\int\limits_0^1\biggl\{c_{10}\frac{\partial}{\partial z}[\omega_1(z)\varphi_1^{(2)}(z)]+c_{11}(2z-1)\frac{\partial^2}{\partial z^2}[\omega_1(z)\varphi_1^{(2)}(z)]+c_{13}\frac{\partial}{\partial z}[\omega_1(z)\varphi_1^{(2)}(z)]-$$

$$-c_{15}(2z-1)\omega_1(z)\gamma_1^{(2)}(z)\biggr\}\omega_2(z)\gamma_1^{(2)}(z);\qquad \gamma^{*2}=12(1-\nu^2)\frac{\rho h\omega_{\text{op}}^2}{E}\cdot\frac{l^4}{h^4};$$

h — товщина оболонки;

$$\beta_4 = \frac{1 \pm 2\mu}{1+\zeta} \cdot \frac{\delta}{R}; \qquad \beta_5 = \frac{1-\mu}{1+\zeta} \cdot \frac{\delta}{R}; \qquad c_1 = \frac{2}{(1+\zeta)^2} \cdot \frac{l^2}{R^2};$$

$$c_2 = \frac{1}{(1+\zeta)^4} \cdot \frac{l^4}{R^4}; \; c_3 = 8\frac{1 \pm 3\mu}{1+\zeta} \cdot \frac{\delta}{R}; \qquad c_4 = 4\frac{(1-\nu)(3-\mu)}{(1+\zeta)^3} \cdot \frac{\delta}{R} \cdot \frac{l^2}{R^2};$$

$$c_5 = 8\frac{(1+\nu+4\mu)}{1+\zeta} \cdot \frac{\delta}{R}; \qquad c_6 = 16\frac{(1-\nu)}{(1+\zeta)^3} \cdot \frac{\delta}{R} \cdot \frac{l^2}{R^2}; \qquad c_7 = 32\mu\frac{\nu+\mu}{(1+\zeta)^2} \cdot \frac{\delta^2}{R^2};$$

$$c_8 = \frac{1}{(1+\zeta)^4} \cdot \frac{l^4}{R^4}; \quad c_9 = \frac{1-\nu}{(1+\zeta)^2} \cdot \frac{l^2}{R^2}; \quad c_{10} = \frac{\nu\mu}{(1+\zeta)^3} \cdot \frac{l^3}{R^3}; \quad c_{11} = \frac{4\mu^2}{(1+\zeta)^2} \cdot \frac{\delta}{R} \cdot \frac{l}{R};$$

$$c_{12} = \frac{4\mu(1-\nu)(3-\mu)}{(1+\zeta)^3} \cdot \frac{\delta}{R} \cdot \frac{l^2}{R^2}; \qquad c_{13} = 12(\nu+\mu)\frac{l^3}{Rh^2}; \qquad c_{14} = 12\frac{1+\nu\mu}{(1+\zeta)^2} \cdot \frac{l^4}{R^2\,h^2};$$

$$c_{15} = 4\frac{1+\nu\mu}{(1+\zeta)^2} \cdot \frac{\delta}{R} \cdot \frac{12\,l^3}{Rh^2};$$

ω_{op}^2 — власна частота оболонки у радіальному напрямку.

Таким чином, із системи рівнянь (6) можна знайти шукані величини:

$$a_k^{(1)} = \frac{D_a^{(1)}}{D^{(1)}}; \qquad b_k^{(1)} = \frac{D_b^{(1)}}{D^{(1)}}; \qquad c_k^{(1)} = \frac{D_c^{(1)}}{D^{(1)}};$$
$$a_k^{(2)} = \frac{D_a^{(2)}}{D^{(2)}}; \qquad b_k^{(2)} = \frac{D_b^{(2)}}{D^{(2)}}; \qquad c_k^{(2)} = \frac{D_c^{(2)}}{D^{(2)}}, \tag{9}$$

де $D^{(1)}$, $D^{(2)}$ — визначники (7) та (8); $D_a^{(1)}$, $D_b^{(1)}$, $D_c^{(1)}$ — частинні визначники системи першого, третього і п'ятого рівнянь виразу (6); $D_a^{(2)}$,$D_b^{(2)}$, $D_c^{(2)}$ — частинні визначники системи другого, четвертого і шостого рівнянь виразу (6). Так,

$$D_a^{(1)} = Q_z^{(1)}[\omega^4 b_{\varphi 1}^{(1)} c_{w4}^{(1)} + \omega^2 \left(\frac{b_{\varphi 2}^{(1)}}{b_{\varphi 1}^{(1)}} - \frac{c_{w2}^{(1)}}{c_{w4}^{(1)}} \right) b_{\varphi 1}^{(1)} c_{w4}^{(1)} - b_{\varphi 2}^{(1)} c_{w2}^{(1)} - b_{\varphi 4}^{(1)} c_{w3}^{(1)}] +$$
$$+ Q_\varphi^{(1)}[\omega^2 a_{z\;3}^{(1)} c_{w1}^{(1)} - a_{z\;3}^{(1)} c_{w2}^{(1)} + a_{z\;4}^{(1)} c_{w3}^{(1)}] + Q_w^{(1)}[\omega^2 a_{z\;4}^{(1)} b_{\varphi 1}^{(1)} + a_{z\;4}^{(1)} b_{\varphi 2}^{(1)} + a_{z\;3}^{(1)} b_{\varphi 4}^{(1)}]$$

і т. д.

Отже, задавши певним чином зовнішні збурення Q, можна визначити координатні функції поплавця гіроскопа для режиму деформації — $k = 0$, $k = 1$, $k \geqslant 2$, що цікавить. В свою чергу, визначені закономірності пружного руху поверхні дозволяють обчислити величини "уявної" кутової швидкості основи і встановити ступінь її впливу на похибку інерціальних навігаційних приладів. Якщо мова йтиме про вплив проникаючого акустичного випромінювання, зовнішній збурюючий чинник можна, для спрощення, розглядати у вигляді плоскої монохроматичної хвилі. Це значно полегшить математичний апарат. Для дифузного поля ця процедура ускладнюється і потребує осереднення за Перисом по куту падіння акустичної хвилі.

1. *Koshljakov V. N., Karachun V. V., Mel'nik V. N. et al.* The some Aspects of Flight Safety in Conditions Penetrate Acoustic Radiation. – The World Congress "Aviation in the XXI Century", Sept. 14–16, 2003. – Kyiv, Ukraine, National Aviation University. – P. 2.37–2.40.

2. *Mel'nick V. N., Karachun V. V.* Influence of acoustic radiation on the sensors of a gyrostabilization platform // Int. Appl. Mech. – 2004. – **40**, No 10. – P. 122–128.
3. *Mel'nick V. N., Karachun V. V.* Determining Gyroscopic Integrator Errors to Diffraction of Sound Waves // Ibid. – No 3. – P. 328–336.
4. *Черногор Л. Ф.* Физические процессы в околоземной среде // Космічна наука і технологія. – 2003. – **9**, № 2/3. – С. 13–33.
5. *Фокс Вильямс Д. Е.* Шум высокоскоростных ракет // Случайные колебания / Под ред. С. Крендела. – Москва: Мир, 1967. – С. 45–49.

Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут"

Надійшло до редакції 13.10.2006

УДК 539.3

В. Г. Карнаухов, Я. О. Жук, Т. В. Карнаухова

Уточнена термомеханічна модель вимушених гармонічних коливань фізично нелінійної оболонки з розподіленими трансверсально-ізотропними сенсорами

(Представлено академіком НАН України В. Д. Кубенком)

Using the refined Timoshenko's hypotheses and similar hypotheses for electric field quantities, a thermomechanical model of thin-walled shells with distributed transversely isotropic sensors with regard for dissipative heating and physical nonlinearities is presented. Several types of electric boundary conditions are considered, when electrodes on a sensor are short-circuited or open. The formulas for sensor's indices are obtained for different boundary conditions.

В останні роки для демпфірування коливань тонкостінних елементів з пасивних (без п'єзоефекту) матеріалів почали інтенсивно застосуватися активні методи з використанням п'єзоелектричних сенсорів та актуаторів [1, 2]. На ефективність такого демпфірування впливає багато факторів, зокрема температура дисипативного розігріву та фізично нелінійна поведінка пасивних та п'єзоактивних матеріалів. При досягненні температурою точки Кюрі п'єзоелемент перестає виконувати своє функціональне призначення, тобто має місце специфічний тип теплового руйнування п'єзоелемента. Для оцінки впливу вказаних факторів на ефективність активного демпфірування та для розрахунку критичних механічних навантажень, які викликають таке руйнування, потрібно мати моделі композитних елементів з пасивними та п'єзоактивними шарами.

У даній роботі наведено термомеханічну теорію оболонок з розподіленими п'єзоелектричними сенсорами при моногармонічному навантаженні з урахуванням фізичної нелінійності та дисипативного розігріву.

Для моделювання термомеханічної поведінки матеріалу використовується концепція комплексних характеристик, коли рівняння стану мають такий же вигляд, як і рівняння стану лінійного пружного матеріалу з заміною пружних констант на комплексні, які залежать від частоти, температури та амплітуд деформацій [3, 4–6]. Останні досягнення з цих питань для пасивних і п'єзоактивних матеріалів подано в роботі [4]. Для побудови