2. *Mel'nick V. N., Karachun V. V.* Influence of acoustic radiation on the sensors of a gyrostabilization platform // Int. Appl. Mech. – 2004. – **40**, No 10. – P. 122–128.
3. *Mel'nick V. N., Karachun V. V.* Determining Gyroscopic Integrator Errors to Diffraction of Sound Waves // Ibid. – No 3. – P. 328–336.
4. *Черногор Л. Ф.* Физические процессы в околоземной среде // Космічна наука і технологія. – 2003. – **9**, № 2/3. – С. 13–33.
5. *Фокс Вильямс Д. Е.* Шум высокоскоростных ракет // Случайные колебания / Под ред. С. Крендела. – Москва: Мир, 1967. – С. 45–49.

Національний технічний університет України
"Київський політехнічний інститут"

Надійшло до редакції 13.10.2006

УДК 539.3

В. Г. Карнаухов, Я. О. Жук, Т. В. Карнаухова

Уточнена термомеханічна модель вимушених гармонічних коливань фізично нелінійної оболонки з розподіленими трансверсально-ізотропними сенсорами

(Представлено академіком НАН України В. Д. Кубенком)

Using the refined Timoshenko's hypotheses and similar hypotheses for electric field quantities, a thermomechanical model of thin-walled shells with distributed transversely isotropic sensors with regard for dissipative heating and physical nonlinearities is presented. Several types of electric boundary conditions are considered, when electrodes on a sensor are short-circuited or open. The formulas for sensor's indices are obtained for different boundary conditions.

В останні роки для демпфірування коливань тонкостінних елементів з пасивних (без п'єзоефекту) матеріалів почали інтенсивно застосуватися активні методи з використанням п'єзоелектричних сенсорів та актуаторів [1, 2]. На ефективність такого демпфірування впливає багато факторів, зокрема температура дисипативного розігріву та фізично нелінійна поведінка пасивних та п'єзоактивних матеріалів. При досягненні температурою точки Кюрі п'єзоелемент перестає виконувати своє функціональне призначення, тобто має місце специфічний тип теплового руйнування п'єзоелемента. Для оцінки впливу вказаних факторів на ефективність активного демпфірування та для розрахунку критичних механічних навантажень, які викликають таке руйнування, потрібно мати моделі композитних елементів з пасивними та п'єзоактивними шарами.

У даній роботі наведено термомеханічну теорію оболонок з розподіленими п'єзоелектричними сенсорами при моногармонічному навантаженні з урахуванням фізичної нелінійності та дисипативного розігріву.

Для моделювання термомеханічної поведінки матеріалу використовується концепція комплексних характеристик, коли рівняння стану мають такий же вигляд, як і рівняння стану лінійного пружного матеріалу з заміною пружних констант на комплексні, які залежать від частоти, температури та амплітуд деформацій [3, 4–6]. Останні досягнення з цих питань для пасивних і п'єзоактивних матеріалів подано в роботі [4]. Для побудови моделі фізично нелінійних оболонок з розподіленими сенсорами використано ітераційні процедури, які зводять вихідну нелінійну тривимірну задачу термомеханіки до послідовності тривимірних лінійних задач механіки та теплопровідності з відомим джерелом тепла. Зведення цих лінійних задач до двовимірних для оболонок досягається за допомогою гіпотез типу Тимошенка, доповнених відповідними їм гіпотезами про розподіл електричних польових величин і температури по товщині. Розглянуто різні типи електричних граничних умов і для цих типів на кожній ітерації одержано формули для заряду, струму та різниці потенціалів, які показує сенсор. Ці формули дозволяють дати оцінку впливу фізичної нелінійності і дисипативного розігріву на показники сенсорів.

1. При демпфіруванні коливань тонких оболонок за допомогою сенсорів типовою структурою по товщині є така структура, коли середній пасивний ізотропний металічний або діелектричний шар товщиною h_0 лежить між верхнім і нижнім зовнішніми п'єзоактивними трансверсально-ізотропними шарами з товщинами h_1 та h_2 відповідно. Загальна товщина такої композитної оболонки $h = h_0 + h_1 + h_2$. При цьому між пасивним і п'єзоактивними шарами можуть бути розміщені внутрішні електроди або вони можуть бути відсутніми.

Відповідно до концепції комплексних характеристик, визначальні рівняння для пасивного матеріалу матимуть вигляд

$$\sigma_{km} = 2\mu\varepsilon_{km} + \lambda\varepsilon_{ll}\delta_{km},$$

де комплексні параметри Ламе λ, μ залежать від інтенсивності деформацій або напружень та температури [4–6]. Рівняння енергії в моногармонічному наближенні має вигляд звичайного рівняння теплопровідності [7] з джерелом тепла $D = \omega(\sigma''\varepsilon' - \sigma'\varepsilon'')/2$. Кінематичні співвідношення, рівняння руху, граничні механічні та теплові граничні умови мають стандартний вигляд [8]. Використовуючи ці співвідношення та нелінійні визначальні рівняння, матимемо складну нелінійну систему диференціальних рівнянь відносно зміщень і температури, яка описує термомеханічний стан пасивного шару.

Для п'єзоактивних трансверсально-ізотропних поляризованих по товщині шарів рівняння стану мають такий же вигляд як і рівняння стану пружних матеріалів [3] з заміною дійсних характеристик на комплексні, які можуть залежати від частоти і температури [3, 7]. Кінематичні співвідношення, рівняння руху, рівняння енергії, рівняння електростатики, граничні механічні, теплові та електричні умови наведено в роботах [3, 4, 9, 10]. З їх використанням одержимо складну нелінійну систему диференціальних рівнянь відносно зміщень, температури та електричного потенціалу, яка описує термоелектромеханічний стан п'єзоелектричних шарів.

Для лінеаризації вказаних вище нелінійних задач можна використати різного типу ітераційні методи — метод послідовних наближень, метод квазілінеаризації або метод змінних параметрів [3, 5, 6]. Детально розглянемо останній метод. Відповідно до цього методу, лінеаризація задачі на i-й ітерації досягається шляхом лінеаризації визначальних рівнянь для пасивного та п'єзоактивних шарів за формулами типу

$$\lambda = \lambda(\varepsilon'_{i-1}, \varepsilon''_{i-1}, \theta_{i-1}), \qquad \mu = \mu(\varepsilon'_{i-1}, \varepsilon''_{i-1}, \theta_{i-1}), \qquad D = D(\varepsilon'_{i-1}, \varepsilon''_{i-1}, \theta_{i-1}).$$

Тут ε'_{i-1}, ε''_{i-1}, θ_{i-1} — дійсні та уявні частини деформацій та температура, розраховані на $(i-1)$-й ітерації. Для прискорення збіжності ітераційного процесу використовується метод Ейткена–Стеффенсена [6]. Таким чином, на кожній ітерації матимемо тривимірну лінеаризовану задачу механіки та теплопровідності з відомим джерелом тепла.

Для зведення цих задач до двовимірних застосуємо гіпотези типу Тимошенка для механічних польових величин, коли тангенціальні складові вектора переміщень змінюються по товщині оболонки за лінійним законом, а для деформацій зсуву задається деякий закон. Для п'єзоактивних шарів приймається гіпотеза, що тангенціальні складові вектора індукції набагато менші від нормальної складової. В результаті з рівняння електростатики матимемо, що нормальна складова індукції постійна по товщині п'єзошару.

Згідно з вказаним, зміщення змінюються по товщині оболонки за лінійним законом

$$u_1^z = u_1 + \varphi_1 z; \qquad v_1^z = v_1 + \varphi_{21} z; \qquad u_3^z = u_3. \tag{1}$$

Тоді компоненти тензора деформацій визначаються співвідношеннями, наведеними, наприклад, в роботі [8]. Рівняння (1) доповнюються співвідношеннями

$$\sigma_{13} = f_1(z)\overset{0}{\sigma}_{13}; \qquad \sigma_{23} = f_1(z)\overset{0}{\sigma}_{23}.$$

Вирази для $\overset{0}{\sigma}_{13}$ і $\overset{0}{\sigma}_{23}$ знаходяться з варіаційного принципу Рейснера, який дає $\overset{0}{\sigma}_{i3} = (I_1/I_{2i})\varepsilon_{i3}$, де $I_1 = \int\limits_{(h_0)} f_1(z)\,dz$, $I_{2i} = \int\limits_{(h_0)} (f_1^2(z)/G_{i3}(z))\,dz$.

В результаті складові рівняння стану (зусилля, моменти, перерізуючі сили), які вносяться шаром із пасивного ізотропного матеріалу в загальні рівняння стану, на кожній ітерації визначаються традиційними співвідношеннями [8]:

$$\begin{gathered}
\widetilde{T}_1 = \widetilde{C}_{11}\varepsilon_1 + \widetilde{C}_{12}\varepsilon_2 + \widetilde{K}_{11}\varkappa_1 + \widetilde{K}_{12}\varkappa_2, \ldots, \\
\widetilde{M}_1 = \widetilde{K}_{11}\varepsilon_1 + \widetilde{K}_{12}\varepsilon_2 + \widetilde{D}_{11}\varkappa_1 + \widetilde{D}_{12}\varkappa_2, \ldots, \\
\widetilde{Q}_1 = \widetilde{G}_{13}\varepsilon_{13}, \qquad \widetilde{Q}_2 = \widetilde{G}_{23}\varepsilon_{23}, \qquad \widetilde{G}_{13} = \frac{I_1^2}{I_{21}}, \qquad \widetilde{G}_{23} = \frac{I_1^2}{I_{22}}.
\end{gathered} \tag{2}$$

Визначальні рівняння для п'єзоактивного трансверсально-ізотропного шару представлено в [3, 4, 9, 10]. Після нехтування в них нормальною складовою тензора напружень σ_{33} та тангенціальними складовими вектора індукції, виключення тангенціальних складових вектора напруженості електричного поля у рівняннях стану спрощені визначальні рівняння набувають вигляду

$$\begin{gathered}
\overset{k}{\sigma}_{11} = \overset{k}{B}_{11}(z)\varepsilon_{11}^z + \overset{k}{B}_{12}(z)\varepsilon_{22}^z - \overset{k}{\gamma}_{31}(z)\overset{k}{E}_3, \quad \overset{k}{\sigma}_{22} = \overset{k}{B}_{12}(z)\varepsilon_{11}^z + \overset{k}{B}_{22}(z)\varepsilon_{22}^z - \overset{k}{\gamma}_{31}(z)\overset{k}{E}_3, \\
\overset{k}{\sigma}_{12} = \overset{k}{B}_{66}(z)\varepsilon_{12}, \qquad \overset{k}{\sigma}_{13} = \overset{k}{B}_{13}(z)\varepsilon_{13}, \qquad \overset{k}{\sigma}_{23} = \overset{k}{B}_{23}(z)\varepsilon_{23}, \\
\overset{k}{D}_3 = \overset{k}{\gamma}_{33}(z)\overset{k}{E}_3 + \overset{k}{\gamma}_{31}(z)[(\varepsilon_{11}^z + \varepsilon_{22}^z)].
\end{gathered} \tag{3}$$

Тут прийнято позначення, аналогічні роботам [3, 9]. Як видно з (3), рівняння стану для перерізуючих сил матимуть такий же вигляд, як і для пасивних шарів з модифікованими жорсткісними характеристиками і "коефіцієнтами зсуву" [11].

2. Розглянемо випадок, коли внутрішні електроди присутні. Цей випадок завжди має місце, якщо пасивний шар — металічний. Тоді на внутрішніх електродах різниця потенціалів дорівнює нулю. Якщо ж пасивний шар виготовлено з діелектрика, то вважатимемо, що на внутрішніх електродах ця різниця також нульова.

Для верхнього та нижнього п'єзоактивних шарів $D_3 = C_1(\alpha,\beta)$ та $D_3 = C_2(\alpha,\beta)$ відповідно. Нехай внутрішні електроди коротко замкнуті. При цьому якщо на них різниця потенціалів нульова, то одержані нижче формули мають місце як для металічного, так і для діелектричного середнього шару. Після інтегрування останнього з рівнянь (3) по товщині верхнього та нижнього п'єзоактивних шарів матимемо:

$$C_1(\alpha,\beta) = \frac{v_{11}}{v_{10}}(\varepsilon_1+\varepsilon_2) + \frac{w_{11}}{v_{10}}(\varkappa_1+\varkappa_2), \quad C_2(\alpha,\beta) = \frac{v_{21}}{v_{20}}(\varepsilon_1+\varepsilon_2) + \frac{w_{21}}{v_{20}}(\varkappa_1+\varkappa_2). \tag{4}$$

При цьому введені в (4) величини v_{kl}, w_{kl} розраховуються за формулами типу $v_{(11)} = \int\limits_{(h_1)} (\overset{1}{\gamma}_{(31)}/\overset{1}{\gamma}_{(33)})dz, \ldots$. Для визначення величини заряду, який знімається з електродів, проінтегруємо (4) по площі електродів. В результаті матимемо:

$$Q = -\frac{1}{2}\iint\limits_{(S)} (\overset{1}{C} + \overset{2}{C})AB\,d\alpha d\beta = -\frac{1}{2}\iint\limits_{(S)} \left[\left(\frac{v_{11}}{v_{10}} + \frac{v_{21}}{v_{20}}\right)\varepsilon_1 + \left(\frac{v_{12}}{v_{10}} + \frac{v_{22}}{v_{20}}\right)\varepsilon_2 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{w_{11}}{v_{10}} + \frac{w_{21}}{v_{20}}\right)\varkappa_1 + \left(\frac{w_{12}}{v_{10}} + \frac{w_{22}}{v_{20}}\right)\varkappa_2\right] AB\,d\alpha d\beta. \tag{5}$$

Якщо верхній і нижній сенсори мають однакові властивості, за виключенням того, що вони протилежно поляризовані, то заряд розраховується за формулою

$$Q = -\iint\limits_{(S)} \left[\left(\frac{w_{11}}{v_{10}} + \frac{w_{21}}{v_{20}}\right)\varkappa_1 + \left(\frac{w_{12}}{v_{10}} + \frac{w_{22}}{v_{20}}\right)\varkappa_2\right] AB\,d\alpha d\beta. \tag{6}$$

3. Розглянемо тепер випадок розімкнутих електродів. При цьому, за аналогією з вищевикладеним, матимемо

$$\begin{aligned} C_1(\alpha,\beta) &= -\frac{V_1}{v_{10}} + \frac{v_{11}}{v_{10}}(\varepsilon_1+\varepsilon_2) + \frac{w_{11}}{v_{10}}(\varkappa_1+\varkappa_2), \\ C_2(\alpha,\beta) &= \frac{V_2}{v_{20}} + \frac{v_{21}}{v_{20}}(\varepsilon_1+\varepsilon_2) + \frac{w_{21}}{v_{20}}(\varkappa_1+\varkappa_2). \end{aligned} \tag{7}$$

Підставляючи (6) в останнє з рівнянь (3), визначимо напруженість електричного поля в кожному з сенсорів. Підставивши її в спрощені відповідно до вказаних гіпотез визначальні рівняння для напружень (3) і проінтегрувавши по товщині сенсора, одержимо складові визначальних рівнянь для п'єзоактивних шарів

$$\begin{aligned} \overline{T}_{(1,2)} &= \overline{C}_{11,21}\varepsilon_1 + \overline{C}_{12,22}\varepsilon_2 + \overline{K}_{11,21}\varkappa_1 + \overline{K}_{12,22}\varkappa_2 - \overset{0}{T}_{(1,2)}, \\ \overline{M}_{(1,2)} &= \overline{K}_{11,21}\varepsilon_1 + \overline{K}_{12,22}\varepsilon_2 + \overline{D}'_{11,21}\varkappa_1 + \overline{D}_{12,22}\varkappa_2 - \overset{0}{M}_{(1,2)}, \\ \overline{S} &= \overline{C}_{66}\varepsilon_{12} + \overline{K}_{66}\varkappa_{12}, \qquad \overline{H} = \overline{K}_{66}\varepsilon_{12} + \overline{D}_{66}\varkappa_{12}. \end{aligned} \tag{8}$$

Тут жорсткісні характеристики визначаються інтегралами по товщині оболонки, підінтегральні вирази яких залежать від електромеханічних характеристик пасивних і п'єзоактивних шарів, Так, наприклад,

$$\overline{C}_{11} = \int\limits_{(h)} \left(B_{11} + \frac{\gamma_{31}^2}{\gamma_{33}}\right) dz - \frac{v_{11}^2}{v_{10}} - \frac{v_{21}^2}{v_{20}}.$$

При цьому

$$\overset{0}{T}_{(1,2)} = -\frac{v_{(11,12)}}{v_{10}}V_1 + \frac{v_{(21,22)}}{v_{20}}V_2, \qquad \overset{0}{M}_{(1,2)} = -\frac{w_{(11,12)}}{v_{10}}V_1 + \frac{w_{(21,22)}}{v_{20}}V_2, \tag{9}$$

де V_1, V_2 — невідомі різниці потенціалів на верхньому та нижньому електродах відповідно. Вони визначаються з умови рівності нулю струму:

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{v_{01}}\iint\limits_{(S)}\left[\frac{v_{11}}{v_{10}}(\varepsilon_1+\varepsilon_2) + \frac{w_{11}}{v_{10}}(\varkappa_1+\varkappa_2)\right]AB\,d\alpha d\beta, \\ V_2 &= -\frac{1}{v_{02}}\iint\limits_{(S)}\left[\frac{v_{21}}{v_{20}}(\varepsilon_1+\varepsilon_2) + \frac{w_{21}}{v_{20}}(\varkappa_1+\varkappa_2)\right]AB\,d\alpha d\beta. \end{aligned} \tag{10}$$

Загальні рівняння стану одержуємо, підсумовуючи (2) і (8): $T_1 = \widetilde{T}_1 + \overline{T}_1, \ldots$.

4. Розглянемо випадок, коли внутрішній шар діелектричний і внутрішні електроди відсутні. Для цього випадку при коротко-замкнутих електродах матимемо такий вираз для заряду:

$$Q = \iint\limits_{(S)}\left[\frac{v_{11}}{v_{10}}(\varepsilon_1+\varepsilon_2) + \frac{w_{11}}{v_{10}}(\varkappa_1+\varkappa_2)\right]AB\,d\alpha d\beta. \tag{11}$$

Для розрахунку струму слід взяти похідну за часом від заряду. Для моногармонічного процесу $I = i\omega Q(\alpha,\beta)$.

Для розімкнутих електродів різниця потенціалів визначається з рівності нулеві струму, так що

$$V_S = \frac{1}{\displaystyle\int\limits_{(S)}\frac{dS}{v_{10}}}\iint\limits_{(S)}\left[\frac{v_{11}}{v_{10}}(\varepsilon_1+\varepsilon_2) + \frac{w_{11}}{v_{10}}(\varkappa_1+\varkappa_2)\right]AB\,d\alpha dS. \tag{12}$$

Якщо сенсори мають однакові властивості, за виключенням того, що вони мають протилежну поляризацію, то у виразах (11), (12) під інтегралами слід залишити згинні деформації.

До наведених вище рівнянь потрібно додати стандартні рівняння руху та механічні граничні умови, наведені, наприклад, в [8]. В них враховуються інерція повороту. Для періодичних за часом процесів необхідно замінити другі похідні $\partial^2 f/\partial t^2$ на $-\omega^2 f$. Кінематичні співвідношення також представлені в [8]. Тому всі названі рівняння не будемо наводити.

Для того щоб одержати двовимірні рівняння енергії для шаруватої оболонки, приймаємо, що нормальна складова теплового потоку змінюється по товщині за заданим законом, наприклад, за степеневим. При цьому автоматично задовольняються умови неперервності теплового потоку між шарами пластини. Інтегруючи по z вираз $q_3 = -\lambda_{33}(z)\partial\theta/\partial z$, матимемо $\theta = \sum\limits_{\nu=0}^{N} P_\nu(z)\theta_\nu$, де $\theta_\nu(x,y,t)$ — невідомі функції, а $P_\nu(z)$ — функції розподілу температури по товщині пакету шарів.

Наведений вираз автоматично задовольняє умову неперервності температури по пакету шарів. Двовимірні рівняння енергії для різних варіантів розподілу температури по товщині оболонки наведено в [3]. Найпростіший варіант маємо, коли $q_3 = 0$ і температура постійна по товщині оболонки. Для стаціонарного випадку вона визначається з рівняння [5]:

$$\frac{k}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(B\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(B\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\right]\theta-\frac{2\delta\theta-D}{h}=0, \tag{13}$$

де прийнято позначення [3], а дисипативна функція D для пасивного шару розраховується за формулою

$$D=\frac{\omega}{2}[(T_1''\varepsilon_1'-T_1'\varepsilon_1'')+(T_2''\varepsilon_2'-T_2'\varepsilon_2'')+2(S''\varepsilon_{12}''-S'\varepsilon_{12}'')+(M_1''\chi_1'-M_1'\chi_1'')+$$
$$+(M_2''\chi_2'-M_2'\chi_2'')+2(H_1''\chi_{12}'-H_1'\chi_{12}'')+(Q_1''\varepsilon_{13}'-Q_1'\varepsilon_{13}'')+(Q_2''\varepsilon_{23}'-Q_2'\varepsilon_{23}'')]. \tag{14}$$

Представлена вище модель є теоретичною основою для дослідження впливу фізичної нелінійності та температури дисипативного розігріву на ефективність роботи трансверсально-ізотропних сенсорів та на ефективність активного демпфірування оболонок за їх допомогою.

1. *Gabbert U., Tzou H. S.* Smart Structures and Structronic Systems. – Dordrecht/Boston/London: Kluwer. – 2001. – 384 p.
2. *Tzou H. S., Bergman L. A.* Dynamics and control of distributed systems. – Cambridge: Cambridge University Press, 1998. – 400 p.
3. *Карнаухов В. Г., Киричок И. Ф.* Механика связанных полей в элементах конструкций. Электротермовязкоупругость. Т. 4. – Киев: Наук. думка, 1988. – 320 с.
4. *Карнаухов В. Г., Михайленко В. В.* Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении. – Житомир: ЖГТУ, 2005. – 428 с.
5. *Сенченков И. К., Жук Я. А., Карнаухов В. Г.* Моделирование термомеханического поведения физически нелинейных материалов при моногармоническом нагружении // Прикл. механика. – 2004. – **40**, № 9. – С. 3–34.
6. *Термомеханика* эластомерных элементов конструкций при циклическом нагружении / Потураев В. Н., Дырда В. И., Карнаухов В. Г. и др. / Под ред. Потураева В. Н. – Киев: Наук. думка, 1987. – 288 с.
7. *Коваленко А. Д.* Основы термоупругости. – Киев: Наук. думка, 1970. – 307 с.
8. *Луговой П. З., Мейш В. Ф., Штанцель Э. А.* Нестационарная динамика неоднородных оболочечных конструкций. – Киев: ИПЦ "Киев. ун-т", 2005. – 536 с.
9. *Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А.* Механика связанных полей в элементах конструкций. Электроупругость. Т. 5. – Киев: Наук. думка, 1989. – 290 с.
10. *Жук Я. А., Сенченков И. К.* Соотношения связанной динамической задачи термовязкопластичности для тонкостенных оболочек с пьезоактивными слоями // Теорет. и прикл. механика. – 2001. – Вып. 34. – С. 115–121.
11. *Григоренко Я. М., Василенко А. Т.* Методы расчета оболочек. Теория оболочек переменной жесткости. Т. 4. – Киев: Наук. думка, 1981. – 544 с.
12. *Бондарь А. Г., Рассказов А. О., Козлов В. И., Бондарский А. Г.* Термоупругое равновесие многослойных составных оболочек // Пробл. прочности. – 1989. – № 6. – С. 68–72.

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ
Національний технічний університет України
"Київський політехнічний інститут"

Надійшло до редакції 12.09.2006