

С. С. Недорезов, О. М. Хорошилов

Гідродинамічна модель технологічного процесу безперервного лиття заготовок з кольорових металів та сплавів

(Представлено членом-кореспондентом НАН України В. І. Дубодєловим)

We propose a hydrodynamic model adequately describing the technological process of continuous casting of the billets of non-ferrous metals and alloys. The full system of differential equations with the corresponding boundary conditions forming the basis of the given model is formulated and solved. A close fit of the theory with experimental data is got.

1. В технологічному процесі безперервного лиття кольорових металів та сплавів одним із складних завдань є:

визначення ізотерми фронту твердіння кольорових сплавів, форми лунки рідкої фази для горизонтально розташованого кристалізатора машини безперервного лиття заготовок (ГМБЛЗ);

визначення відстані від вихідного торця кристалізатора до точок перетину ізотерми фронту твердіння з верхньою та нижньою твірною графітової втулки кристалізатора (ГВК);

визначення технологічних параметрів процесу безперервного лиття, при яких буде підтримуватися задана відстань від вихідного торця кристалізатора до точки перетину ізотерми фронту твердіння з верхньою твірною ГВК, що дозволяє підвищити стабільність процесу.

Даний технологічний процес моделюємо в'язкою рідиною, яка проводить тепло та рухається в циліндрі радіусом R , що розташований горизонтально вздовж осі OX у полі важкості $\vec{F} = \rho \cdot \vec{q}$ (див. рис. 1). Фізичні властивості розглянутої рідини описуються рівнянням Нав'є–Стокса, а також рівняннями безперервності й теплопровідності. Дані рівняння доповнюються граничними умовами, сформульованими на основі умов, в яких відбувається розглядуваний технологічний процес.

2. В результаті розв'язання зазначеної системи рівнянь одержуємо розподіл температури T як у поперечному перерізі циліндра, так і на його поверхні, що і є основою пропонованої гідродинамічної моделі. Дана модель дозволяє:

визначати температуру як по об'єму циліндричної заготовки, так і по її поверхні;

визначати особливості процесу горизонтального безперервного лиття, тобто визначати положення ізотерми фронту твердіння кольорових сплавів, а так само форму лунки рідкої фази в заготовці та ступінь термоконвективного розшарування розплаву в горизонтальному кристалізаторі;

визначати відстані від вихідного торця кристалізатора до точок перетину ізотерми фронту твердіння з верхньою й нижньою твірними лініями ГВК;

визначати технологічні параметри процесу безперервного лиття, при яких буде підтримуватися задана відстань від вихідного торця кристалізатора до точки перетину ізотерми фронту твердіння з верхньою твірною лінією ГВК, що дозволить підвищити стабільність процесу.

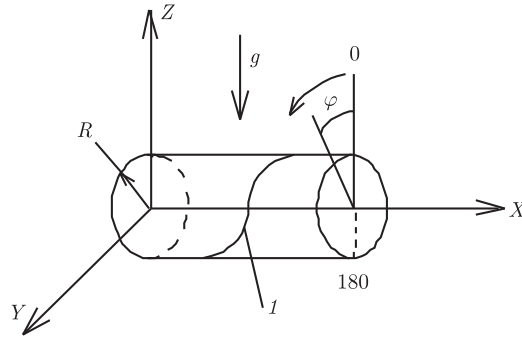


Рис. 1. Схема розташування циліндричної заготовки:

1 – ізотерма фронту твердіння, що розташована на поверхні заготовки, отриманої на машині горизонтального безперервного лиття

Швидкість \vec{V} руху в'язкої рідини визначається стаціонарним рівнянням Нав'є–Стокса [1]

$$(\vec{V}\nabla)\vec{V} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } P + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{V} + \frac{1}{\rho} \left(\varsigma + \frac{\eta}{3} \right) \text{grad div } \vec{V} + \vec{q}, \quad (1)$$

де η й ς – коефіцієнти в'язкості; ρ – густина рідини; P – тиск; Δ – оператор Лапласа.

До рівняння (1) додаємо рівняння безперервності

$$\text{div } \rho \vec{V} = 0 \quad (2)$$

і рівняння теплопровідності

$$(\vec{V}\nabla)T = \chi \Delta T + \frac{\nu}{2C_p} \left[\frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i} \right]^2. \quad (3)$$

Тут C_p – теплоємність; $\chi = \varpi / (\rho C_p)$ – температуропровідність; ϖ – теплопровідність; $\nu = \eta / \rho$ – кінематична в'язкість. У правій частині рівняння (3) за повторюваними індексами робиться підсумовування ($i, k = 1, 2, 3$).

Швидкість руху рідини \vec{V} спрямована вздовж осі циліндра OX , так що з (1) виходить система рівнянь

$$\begin{cases} V \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho} \Delta V + \frac{1}{\rho} \left(\varsigma + \frac{\eta}{3} \right) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial P}{\partial y} = \left(\varsigma + \frac{\eta}{3} \right) \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial P}{\partial z} = \left(\varsigma + \frac{\eta}{3} \right) \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} - \rho q, \end{cases} \quad (4)$$

а рівняння теплопровідності (3) зводиться до вигляду

$$V \frac{\partial T}{\partial x} = \chi \Delta T + \frac{\nu}{C_p} \left[2 \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right]. \quad (5)$$

Припускаючи, що зміна густини рідини ρ визначається температурою, з рівняння безперервності (2) одержуємо:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \beta V \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (6)$$

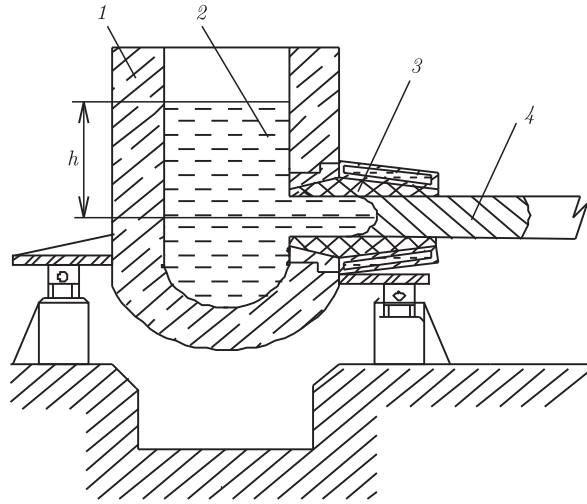


Рис. 2. Машина горизонтального безперервного лиття заготовок із кольорових сплавів:
 1 — металопримач; 2 — розплав; 3 — циліндричний вузол кристалізації; 4 — тверда заготовка; h — висота розплаву (рідкої фази) у металопримачі

де

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T} - \quad (7)$$

температурний коефіцієнт розширення рідини.

Рівняння (4)–(6) утворюють повну систему диференціальних рівнянь, що описують даний технологічний процес. До цих рівнянь додаємо граничні умови ($r < R$):

$$V|_{x=0} = \sqrt{2q(h-z)}, \quad V|_{x=x_i(r,\varphi)} = V_d. \quad (8)$$

Тут V_d — швидкість руху заготовки із фронтом твердіння $x = x_i(r, \varphi)$; h — висота рідкої фази у металопримачі (див. рис. 2).

3. Розв'язок рівнянь (4)–(6) шукаємо послідовними наближеннями за малим параметром

$$kR \ll 1, \quad (9)$$

де $\lambda = 1/k$ — характерна відстань, на якій істотно змінюються швидкість V і температура T залежно від x . В результаті для швидкості руху рідини $\vec{V}(V, 0, 0)$ одержуємо:

$$V(x, r, \varphi) = \Psi_0(r, \varphi) + \Psi_1(r, \varphi)e^{kx} + \Psi_2(r, \varphi)e^{-kx}, \quad (10)$$

де

$$\begin{aligned} \Psi_0 &= \frac{\sigma_0}{4\eta}(r^2 - R^2), \\ \Psi_1 &= \frac{1}{e^{kx_t} - e^{-kx_t}}(V_d - V_0 e^{-kx_t} - (1 - e^{-kx_t})\Psi_0), \\ \Psi_2 &= \frac{1}{e^{kx_t} - e^{-kx_t}}(V_0 e^{kx_t} - V_d + (1 - e^{kx_t})\Psi_0). \end{aligned}$$

Тут $V_0 = \sqrt{2q(h - r \cos \varphi)}$ — швидкість рідини (розплаву) на початку вхідного торця циліндричної графітової втулки кристалізатора (ГВК), а σ_0 — постійна частка градієнта тиску

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \sigma_0 + \sigma_1 e^{kx} + \sigma_2 e^{-kx}.$$

Розв'язок рівняння теплопровідності (5) шукаємо у вигляді

$$T = \sum_{S=-\infty}^{+\infty} \alpha_S e^{skx}. \quad (11)$$

Підстановкою (11) в (5) одержуємо диференціальні рівняння для функцій $\alpha_s(r, \varphi)$, які розв'язуються послідовними наближеннями за малим параметром (9). В основному наближенні одержуємо

$$T(x, r, \varphi) = T_0 + \alpha_1(e^{kx} - 1) + \alpha_{-1}(e^{-kx} - 1) + \alpha_0 r \cos \varphi, \quad (12)$$

де T_0 — початкова температура рідини в центрі поперечного перетину циліндра (циліндричної ГВК).

Розподіл температури $T(x, r, \varphi)$ рідкої фази залежить від параметрів α_s , які визначаємо з вимірів слідів кристалізації на поверхні циліндра при твердінні рідкої фази.

4. Проведемо порівняння запропонованої моделі з відповідними експериментальними даними. Фронт твердіння рідкої фази $x = x_e(r, \varphi)$ знаходимо з рівняння $T(x_t, r, \varphi) = T_c$, де T_c — температура твердіння.

В результаті одержуємо

$$x_t(r, \varphi) = -\lambda \ln \left[\frac{1}{2} \left(\gamma - \beta \frac{r}{R} \cos \varphi + \sqrt{\left(\gamma - \beta \frac{r}{R} \cos \varphi \right)^2 - 4\alpha} \right) \right]. \quad (13)$$

Тут введені безрозмірні параметри

$$\alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_{-1}}, \quad \beta = \frac{R\alpha_0}{\alpha_{-1}}, \quad \gamma = 1 + \alpha - \frac{T_0 - T_c}{\alpha_{-1}}. \quad (14)$$

У табл. 1 наведені результати x_{exp} виміру відстані від вхідного торця графітової втулки кристалізатора ($x = 0$) до фронту твердіння на поверхні циліндричної заготовки $r = R$ при різних значеннях кута φ (див. рис. 3).

Зазначена відстань визначалася за методикою, що містить у собі визначення відстані фронту твердіння від вихідного торця ГВК за методом рівчаків ("рисок") [2]. Знаючи загальну довжину ГВК, визначаємо шукану відстань із похибкою одного виміру, що становить 0,5 мм. Шукана відстань визначалася за формулою $l_2 = L - l_1$.

Таблиця 1. Порівняльні розрахункові (x_{cal}) і експериментальні (x_{exp}) дані щодо визначення положення ізотерми фронту твердіння залежно від кута φ на поверхні циліндричної заготовки

φ , град	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
x_{exp} , мм	152	151	149,5	148,5	145,5	142	140	139	137,5	135
x_{cal} , мм	150,6	150,4	149,7	148,5	146,9	144,9	142,6	140,0	137,3	134,5
φ , град	100	110	120	130	140	150	160	170	180	
x_{exp} , мм	133	129	127,5	125	124	122	121,5	119,5	117,5	
x_{cal} , мм	131,6	128,9	126,3	123,9	121,9	120,2	119,0	118,3	118,0	

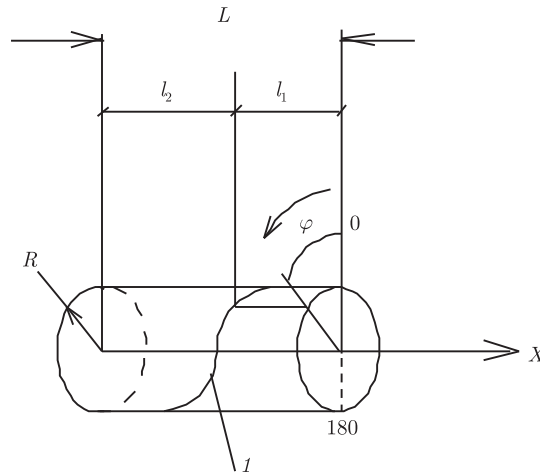


Рис. 3. Схема визначення відстані від вхідного торця графітової втулки кристалізатора до фронту твердіння на поверхні циліндричної заготовки:

1 — ізотерма фронту твердіння на поверхні заготовки; l_1 — відстань від вихідного торця кристалізатора до фронту твердіння; l_2 — відстань від вхідного торця ГВК до фронту твердіння; L — загальна довжина ГВК

Величини $x_{cal} = x_{t_t}(R, \varphi)$ обчислювалися за формулою (13). Параметри λ , α , β й γ знаходили методом найменших квадратів, використовуючи лише п'ять вимірювань при значеннях кута $\varphi = 0^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 180^\circ$. В результаті маємо

$$\lambda = 246,1938 \text{ мм}; \quad \alpha = -0,514; \quad \beta = 0,09716; \quad \gamma = -0,30828. \quad (15)$$

Як видно з табл. 1, отримана гарна відповідність між обчисленими й виміряними величинами, практично в межах похибки вимірів. Досліджувався циліндричний кристалізатор радіусом $R = 25$ мм. Відношення $R/\lambda = 0,1$ досить мале, так що (9) дійсно є малим параметром.

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Э. М. Гидродинамика. — Москва: Наука, 1988. — 733 с.
2. Горизонтальное непрерывное литье цветных металлов и сплавов / О. А. Шатагин, В. Т. Сладкош-теев, М. А. Вартазаров и др. — Москва: Металлургия, 1974. — 175 с.

Харківський національний
автомобільно-дорожній університет
НТУ «Харківський політехнічний інститут»

Надійшло до редакції 13.11.2006