Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

5 • 2007

МАТЕМАТИКА

УДК 517.987

О. С. Бичков

До теорії можливостей та її застосування

(Представлено членом-кореспондентом НАН України А. А. Мартинюком)

An extended model of the space of possibilities is built with the use of the measure of possibility and necessity, and the definitions of perceptive elements and perceptive sets are introdused. It is shown that a perceptive set can be represented as an aggregate of perceptive elements. The operations for the sets and elements are also defined.

Теорію можливості, яка базується на теорії нечітких множин, вперше запропонував Л. Заде [1]. Він ввів поняття нестрогої належності елемента до певної множини. Тобто елемент x універсального простору X належить до множини A із степеня належності $\mu(x)$, яка набуває значень з відрізку [0, 1]. Такий підхід представлено для опису невизначеностей та нечіткої динаміки в [2–6]. Але послідовники теорії Заде зводили дослідження нечіткої динаміки до чіткої, використовуючи α-зрізи. При розв'язанні сучасних задач виявилося, що цей підхід потребує розвитку [7–10]. Теорію можливостей, що базувалася на теорії нечітких множин Л. Заде [11–13], вперше почав узагальнювати Ю. П. Питьєв [14]. На цій основі було запропоновано новий клас диференціальних рівнянь для опису нечіткої динаміки [10].

У роботі розглядаються питання побудови абстрактної аксіоматики теорії можливостей та теорії нечітких множин. Загальноприйнято вважати, що для опису простору можливостей достатнім є використання міри можливостей, а міра необхідностей вводиться лише як допоміжна для опису подій.

Відомо [15], що в теорії ймовірностей можливо охарактеризувати подію та її протилежну подію за допомогою лише однієї міри — імовірнісної. Це випливає із співвідношення $P(A) = 1 - P(\overline{A})$. У теорії можливостей для опису протилежних подій виконується нерівність $P(A) + P(\overline{A}) \geqslant 1$. Тому для адекватної побудови моделі необхідно застосовувати обидві міри — міру необхідностей та можливостей.

При побудові будемо додержуватись схеми теорії ймовірностей, що дозволяє прослідкувати формальні аналогії та відмінності понять і методів теорії ймовірності та теорії можливостей. Найбільш суттєвою відмінністю цих теорій є те, що трактування фізичного змісту події, що описується в термінах можливостей, істотно відрізняється від частотної інтерпретації в термінах імовірностей. Часто виникає необхідність у дослідженні та моделюванні унікальних експериментів, що не повторюються, тобто використання ймовірнісних моделей не може бути адекватним. Тому пропонується для моделювання фізичних явищ з невизначеністю параметрів чи даних використовувати теорію можливостей. Це дозволяє моделювати та досліджувати набагато ширший клас задач, ніж можна було б зробити за допомогою методів теорії ймовірностей. При дослідженні проблематики, пов'язаної з моделюванням суб'єктивності, виявилось, що самої можливості недостатньо для повного та адекватного опису експерименту. Тому було запропоновано розширити простір можливостей шляхом введення іншої характеристики події — необхідності. Це дозволило нам більш коректно структуризувати наші знання про досліджувані явища.

Традиційно для опису невизначеностей використовується поняття нечітких множин Заде. Л. Заде використовував термін fuzzy (нечіткий, розмитий) для опису висловлювань людини природною мовою, які не можуть бути описані традиційними математичними формалізмами.

Для формалізації ж цілісного відображення окремих предметів, об'єктів та явищ зовнішнього світу як людиною, так і вимірювальним приладом, тобто саме суб'єктивного сприйняття дійсності, у роботі пропонується ввести поняття персептивного (від лат. perceptio — сприйняття) елемента та персептивної множини. Для адекватного опису подій пропонується використовувати крім міри можливості, ще й міру необхідності. Тобто будується математична модель розширеного простору можливостей та математичних формалізмів для опису природних невизначеностей.

Побудова розширеної моделі простору можливостей. Нехай X — довільний простір, A — визначена на просторі X σ-алгебра множин. Надалі будемо розглядати суб'єктивну шкалу $L = ([0,1], \leqslant, +, \circ)$ з впорядкованістю, яка визначається класичною нерівністю $\leqslant$, операцією суми “+”: $a + b \triangleq \max(a, b)$ та операцією множення “$\circ$”: $a \circ b \triangleq \min(a, b)$ [14]. Легко впевнитися, що введені таким чином операції задовольняють усі класичні властивості, а саме вони є комутативними, асоціативними та взаємно дистрибутивними. Визначимо нейтральні елементи $\widetilde{0}$ та $\widetilde{1}$, поклавши $\widetilde{0} \triangleq 0$ та $\widetilde{1} \triangleq 1$.

Означення 1. Послідовність $\{a_n\} \subset L$ називається збіжною, якщо

$$\lim_{n\to\infty}\inf a_n \triangleq \sup_N \inf_{n\geqslant N} a_n = \inf_N \sup_{n\geqslant N} a_n \triangleq \lim_{n\to\infty}\sup a_n = a,$$

число a називається границею послідовності, $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Для кількісного опису подій введемо оцінку — можливість. Кожній множині $A \in$ A поставимо у відповідність деяке число $P(A) \geqslant 0$, $P(A) \in L$.

Означення 2. Функцію $P\colon$ A $\to L$ будемо називати мірою можливості, якщо:

1) $P(A) \geqslant 0$ для $\forall A \in$ A;

2) $P(A)$ — зліченно-адитивна, тобто для

$$\forall \{A_i\},\ i = \overline{1,\infty},\ A_i \in \mathrm{A}\colon \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathrm{A} \Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigoplus_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \sup_{i=\overline{1,\infty}} P(A_i).$$

Відмітимо, що на відміну від класичної теорії міри в теорії можливостей не є необхідною умова $A_i \bigcap A_j = \varnothing$, $i \neq j$. Можна показати, що якщо властивість 2 введена тільки для множин, що не перетинаються, то вона може бути легко поширена на будь-які множини. Це досягається введенням операції додавання як супремум.

Міра можливості монотонна, тобто для A, $B \in \mathrm{A}$ з того, що $A \subseteq B$, випливає, що $P(A) \leqslant P(B)$, неперервна відносно монотонно зростаючої послідовності та напівнеперервна знизу відносно монотонно спадної послідовності.

Нехай $P(\cdot)$ — можливість на A. Природним є питання продовження міри на більш широкий клас множин. Для цього введемо поняття зовнішньої міри.

Означення 3. Функцію $P^*(\cdot)\colon \beta(\mathrm{X}) \to L$, задану як $P^*(B) = \inf\limits_{\{E_j\}\in \mathrm{A}} \sup\limits_j P(E_j)$, де $\{E_j\}$, $j = \overline{1,\infty}$, $E_j \in \mathrm{A}$ такі, що $B \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_j$, будемо називати зовнішньою мірою можливості.

Лема 1. *Для довільної множини $A \in \mathrm{A}$ зовнішня міра можливості дорівнює мірі можливості, тобто $P^*(A) = P(A)$.*

Доведення. Виберемо послідовність $\{E_j\}$, $j = \overline{1,\infty}$, $E_j \in \mathrm{A}$ таким чином, що $E_1 = A$, $E_2 = E_3 = \dots = \varnothing$. Отримаємо, що $A \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_j$ і, відповідно, $\inf\limits_{\{E_j\}} \sup\limits_j P(E_j) \leqslant P(A)$. Тобто $P^*(A) \geqslant P(A)$. За визначенням точної нижньої межі для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \{E_j\} \in \mathrm{A}$ маємо, що $\sup\limits_j P(E_j) < P^*(A) + \varepsilon$.

Оскільки $A = A \bigcap \left(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} (A \bigcap E_j)$, то для $A \in \mathrm{A}$ одержуємо

$$P(A) = P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}(A \bigcap E_j)\right) = \overset{\infty}{\underset{j=1}{\oplus}} P(A \bigcap E_j) = \sup_{j=\overline{1,\infty}} P(A \bigcap E_j) \leqslant \sup_{j=\overline{1,\infty}} P(E_j).$$

Звідси випливає, що $P(A) < P^*(A) + \varepsilon$. Але при $\varepsilon \to 0$ матимемо знак нестрогої нерівності, тобто $P(A) \leqslant P^*(A)$. А отже, $P(A) = P^*(A)$.

Лема 2. *Зовнішня міра можливості $P^*(\cdot)$ є невід'ємною функцією множин, тобто $P^*(A) \geqslant 0$ для $\forall A \subset \mathrm{X}$.*

Доведення випливає з невід'ємності самої міри можливості.

Лема 3. *Зовнішня міра можливості $P^*(\cdot)$ монотонна, тобто для $\forall A$, $B \subset \mathrm{X}$ таких, що $A \subset B$ матимемо $P^*(A) \leqslant P^*(B)$.*

Доведення. Нехай $\{E_j\}$, $j = \overline{1,\infty}$, $E_j \in \mathrm{A}$ — послідовність, яка у визначенні зовнішньої міри надає inf в рівності $P^*(B) = \inf\limits_{\{E_j\}} \sup\limits_j P(E_j)$. Але тоді $A \subset B \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_j$, звідки випливає, що $P^*(A) \leqslant P^*(B)$. Справедлива така теорема.

Теорема 1 (про продовження міри можливості). *Зовнішня міра P^*, яка визначена на булеані $\beta(\mathrm{X})$, є мірою можливості.*

Слід відзначити, що таке продовження можливе лише для моделі простору можливостей, що запропонована Ю. П. Питьєвим в [14], і воно не єдине. Продовжуючи міру, ми отримуємо лише верхню оцінку, більшою за яку не може бути можливість виникнення певної події.

Властивості міри можливості показують, що введення лише цієї міри в моделі експерименту недостатньо для адекватного опису подій. Тому існує потреба введення нижньої оцінки міри, фізична суть якої полягає в тому, що певна подія мусить відбутися.

Означення 4. Мірою необхідності називатимемо функцію $N\colon \mathrm{A} \to L$, яка задовольняє такі умови:

1) $N(A) \geqslant 0$ для $\forall\, A \in \mathrm{A}$;

2) $N(A)$ — зліченна мультиплікативна, тобто для

$$\forall \{A_i\} \in \mathrm{A}\colon \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathrm{A} \Rightarrow N\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigotimes_{i=1}^{\infty} A_i = \inf_{i=\overline{1,\infty}} N(A_i).$$

Можна показати, що введена міра має властивості монотонності, неперервності відносно збіжної монотонно спадної послідовності, напівнеперервності зверху відносно монотонно зростаючої послідовності. Для міри необхідностей теж можливо побудувати продовження, використовуючи внутрішнє покриття.

Теорема 2. *Міру необхідності можна продовжити з алгебри* A *на булеан* $\beta(\mathrm{X})$ *із збереженням властивостей міри.*

Таким чином, для опису експерименту ми отримали дві числові характеристики події — можливість та необхідність. Використовуючи теореми про продовження, ми можемо описувати будь-яку подію. Як ми вже зазначили, ці продовження мають значення відповідно верхньої та нижньої оцінок появи події.

Персептивні елементи та персептивні множини. Невизначеність виникає в той момент, коли з'являється потреба описувати ту чи іншу подію. Така ситуація має місце тоді, коли дослідник спостерігає за приладом або проводить опис експерименту. Оцінюючи дійсність, реальність, ми говоримо насамперед від свого імені, що не є, прямо кажучи, об'єктивним. До того ж реальний об'єкт може уявлятися нам зовсім в іншому світлі, але таким чином, що його неможливо описати в рамках поняття "дійсність". Тобто можна сказати, що відбувається суб'єктивне сприйняття дійсності. Розглянемо, як можна описувати цей процес.

Нехай X — це простір для опису реальних об'єктів, які ми досліджуємо, а P^* і N_* — відповідно можливість та необхідність, визначені для подій булеана. Розглянемо (PN)-модель $(\mathrm{X}, \beta(\mathrm{X}), P^*, N_*)$. Введемо також простір Υ елементів, які є значенням суб'єктивного сприйняття дійсності.

Означення 5. Довільну функцію $\xi\colon \mathrm{X} \to \Upsilon$, задану на $(\mathrm{X}, \beta(\mathrm{X}), P^*, N_*)$, яка набуває значень в Υ, називатимемо персептивним елементом.

Це визначення говорить про те, що конкретному суб'єктивному сприйняттю дійсності ξ, тобто величинам із Υ, відповідає якийсь визначений стан (або навіть не один) реальності $\xi^{-1}(y) \subset \mathrm{X}$.

Означення 6. Назвемо функцію $\varphi_\xi(y)\colon \mathrm{X} \to L$ таку, що задається рівністю $\varphi_\xi(y) = P\{x \mid \xi(x) = y\}$, розподілом можливостей персептивного елемента ξ. А функцію $\psi_\xi(y)\colon \mathrm{X} \to L$, що задана як $\psi_\xi(y) = N\{x \mid \xi(x) = y\}$, — розподілом необхідності персептивного елемента ξ.

Означення 7. Функцію $\eta\colon \mathrm{X} \to \beta(\Upsilon)$ будемо називати η-персептивною множиною.

Таке визначення персептивних елементів та множин дозволяє сформулювати означення персептивної множини.

Означення 8. Сукупність персептивних елементів $A = \{\xi_j\}$, $j \in J$, будемо називати A-персептивною множиною.

Встановимо взаємозв'язок між цими двома означеннями.

Теорема 3 (про еквівалентність означень). *η-персептивну множину можна зобразити у вигляді A-персептивної множини та навпаки.*

Доведення. Розглянемо розширений простір $\mathrm{X} \bigcup \varnothing$, де $\varnothing$ — порожня множина, що складається лише з одного порожнього елемента, $\{e\} = \varnothing$. Покажемо, що A-персептивну множину можна зобразити через η-персептивну множину. Для кожного $x \in \mathrm{X}$ розглянемо множини $A(x) = \{\xi_j(x)\}$, $j \in J$. Цілком очевидно, що $A(x) \subset \Upsilon$, тобто для кожного x існує також множина $A(x) \in \beta(\Upsilon)$. Таким чином, множина $A(x)$ може бути зображена у вигляді $x \xrightarrow{\eta} A(x)$.

Покажемо тепер, що η-персептивну множину можна зобразити через A-персептивну множину. Розглянемо число $M = \sup\limits_{x \in \mathrm{X}} \operatorname{card} \eta(x)$. Виберемо довільну множину індексів I, розмірність якої $\operatorname{card} I = M$. У цьому випадку A-персептивна множина A буде складатися з M елементів, тобто $A = \{E_j\}$, $j \in I$. Тоді для будь-якого $x \in \mathrm{X}$ виберемо персептивні елементи таким чином.

Розглянемо $\eta(x) = \bigcup\limits_{y \in \eta(x)} \{y\}$. Якщо $\operatorname{card} \eta(x) < M$, то покладемо $\xi_i(x) = y$, $i \in I_{\eta(x)}$, $\operatorname{card} I_{\eta(x)} = \operatorname{card} \eta(x)$, $\xi_i(x) = e$, $i \in I_{\overline{\eta}(x)}$, $\operatorname{card} I_{\overline{\eta}(x)} = M - \operatorname{card} \eta(x)$.

Таким чином, ми визначили персептивні елементи ξ_j, $j \in J$.

Зауваження 1. Як видно з доведення, ми можемо неоднозначним чином зобразити η-персептивну множину у вигляді A-персептивної множини.

Зауваження 2. Згідно з класичною теорією множин ми можемо визначити поняття порожнього персептивного елемента та порожньої персептивної множини, а саме: $\xi_0 \colon \mathrm{X} \to e$; $\eta_0 \colon \mathrm{X} \to \varnothing$.

Легко переконатися, що поняття персептивного елемента не відрізняється від поняття нечіткого елемента, введеного Ю. А. Питьєвим [14]. Але на відміну від поняття нечіткої множини, введеного в роботі [14], поняття персептивної множини істотно відрізняється.

Розглянемо основні операції над η-персептивними множинами.

Під перетином $\eta_1 \bigcap \eta_2$ будемо розуміти множину $\eta_{1\cap 2}$ таку, що $\forall x \in \mathrm{X}$ $\eta_{1\cap 2}(x) = \eta_1(x) \bigcap \eta_2(x)$.

Під об'єднанням $\eta_1 \bigcup \eta_2$ будемо розуміти множину $\eta_{1\cup 2}$ таку, що $\forall x \in \mathrm{X}$ $\eta_{1\cup 2}(x) = \eta_1(x) \bigcup \eta_2(x)$.

Під різницею $\eta_1 \backslash \eta_2$ будемо розуміти множину $\eta_{1\backslash 2}$ таку, що $\forall x \in \mathrm{X}$ $\eta_{1\backslash 2}(x) = \eta_1(x) \backslash \eta_2(x)$.

Під доповненням $\overline{\eta}_1$ будемо розуміти множину $\eta_{\overline{1}}$ таку, що $\forall x \in \mathrm{X}$ $\eta_{\overline{1}}(x) = \Upsilon \setminus \eta_1(x)$.

Під включенням $\eta_1 \subset \eta_2$ будемо розуміти виконання співвідношення $\eta_1(x) \subset \eta_2(x)$ для $\forall x \in \mathrm{X}$.

Зауваження 3.

1. Запропоновані операції більш природні ніж операції, що використовуються в теорії нечітких множин.

2. Порожню множину розглядатимемо як множину $\eta_{\varnothing}(x)$ таку, що $\forall x \in \mathrm{X}$ $\eta(x) = \varnothing$;

3. Під універсальною персептивною множиною будемо розуміти множину η_{univ} таку, що $\forall x \in \mathrm{X}$ $\eta_{\mathrm{univ}}(x) = \Upsilon$;

4. Простір усіх η-персептивних множин будемо позначати через $\beta(X, Y)$. Ясно, що пара $\langle \beta(X, Y), \subset \rangle$ утворює частково впорядковану множину.

Для операцій, введених таким чином, неважко переконатися, що доповнення $\overline{\eta}$ можна зобразити у вигляді $\overline{\eta} = \eta_{\mathrm{univ}} \setminus \eta$. Також легко переконатися, що виконуються такі елементарні властивості (під символами A, B, C розуміємо η-персептивні множини):

1) закон ідемпотенції: $A \bigcap A = A \bigcup A = A$;

2) закон комутативності: $A \bigcap B = B \bigcap A$, $A \bigcup B = B \bigcup A$;

3) закон асоціативності: $A \bigcap (B \bigcap C) = (A \bigcap B) \bigcap C$, $A \bigcup (B \bigcup C) = (A \bigcup B) \bigcup C$;

4) закон абсорбції: $A \bigcap (A \bigcup B) = A \bigcup (A \bigcap B) = A$;

5) закон дистрибутивності: $A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$, $A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap \bigcap (A \bigcup C)$;

6) закон компліментарності: $A \bigcap \overline{A} = \varnothing$, $A \bigcup \overline{A}$ — універсальна множина.

Таким чином, клас персептивних множин разом з операціями доповнення, об'єднання та перетину з розглянутими операціями включення є дистрибутивною решіткою.

Наведемо деякі співвідношення між η- та A-персептивними множинами.

Означення 9. Персептивні множини A^1 та A^2 називатимемо η-еквівалентними, якщо $\forall x \in \mathrm{X}$ маємо $A^1(x) = A^2(x)$.

Лема 4. *Відношення η-еквівалентності є відношенням еквівалентності.*

Доведення. Властивості рефлективності, симетричності та транзитивності випливають з того, що вони справедливі для кожного фіксованого значення $x \in \mathrm{X}$.

Природним чином вводяться операції перетину, об'єднання, включення, різниці та доповнення для A-персептивних множин.

Таким чином, у роботі побудовано розширену модель $(\mathrm{X}, \beta(\mathrm{X}), P^*, N_*)$ простору можливостей з двома мірами, яку називатимемо (PN)-моделлю. Ця модель може використовуватись для розв'язання поставлених на початку роботи задач, оскільки дозволяє більш адекватно характеризувати події. Введено означення персептивних елементів, персептивних множин. Показано, що персептивну множину можна логічно подати як сукупність персептивних елементів. Також введено операції об'єднання, перетину, доповнення, включення, різниці та закони ідемпотенції, комутативності, асоціативності, абсорбції, дистрибутивності, компліментарності.

1. *Zadeh L. A.* Fuzzy sets // Information and Control. – 1965. – **8**. – P. 338–353.
2. *Buckley J., Feuring T.* Fuzzy differential equations // Fuzzy Sets and Systems. – 2000. – **110**, No 1. – P. 43–54.
3. *Kaleva O.* Fuzzy differential equations // Ibid. – 1987. – **24**, No 3. – P. 301–317.
4. *Kloeden P. E.* Fuzzy dynamical systems // Ibid. – 1982. – **19**, No 7. – P. 275–296.
5. *Аверкин А. Н., Батыршин И. З., Блишун А. Ф. и др.* Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / Под ред. Д. А. Поспелова. – Москва: Наука, 1986. – 312 с.
6. *Борисов А. Н., Алексеев А. В.* Обработка нечеткой информации в системах принятия решений. – Москва: Радио и связь, 1989. – 304 с.
7. *Орлов А. И.* Прикладная статистика: Учебник. – Москва: Экзамен, 2004. – 656 с.
8. *Орлов А. И.* Нечисловая статистика. – Москва: МЗ-Пресс, 2004. – 513 с.
9. *Мартынюк А. А., Слынько В. И.* О расщеплении фазового пространства нечеткой системы дифференциальных уравнений // Докл. АН. – 2005. – **402**, № 3. – С. 303–307.
10. *Бичков О.* Побудова інтегралу за процесом нечіткого блукання // Вісник Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. – 2005. – № 4. – С. 125–134.
11. *Zadeh L. A.* Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility // Fuzzy Sets and Systems. – 1978. – **1**. – P. 3–28.
12. *Дюбуа Д., Прад А.* Теория возможностей. Приложения к представлению знаний в информатике. Пер. с франц. – Москва: Радио и связь, 1990. – 288 с.
13. *Sugeno M.* Fuzzy measures and fuzzy integrals: a survey // Fuzzy automata and decision processes / Eds. M. M. Gupta, G. N. Saridis, B. R. Gains. – Amsterdam, 1977. – P. 89–102.
14. *Пытьев Ю. П.* Возможность. Элементы теории и применение. – Москва: УРСС, 1990. – 190 с.
15. *Колмогоров А. Н.* Основные понятия теории вероятностей. – Москва: Наука, 1974. – 120 с.

Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 03.11.2006