УДК 517.946

І. М. Конет

Інтегральні зображення розв'язків нестаціонарних задач теплопровідності для багатошарових циліндричних півпросторів

(Представлено членом-кореспондентом НАН України М. О. Перестюком)

The exact analytical solution of the nonstationary heat problem for many-layer cylindrical half-spaces is constructed by the method of integral transformations.

Нестаціонарні крайові задачі феноменологічної теорії теплопровідності для багатошарових (кусково-однорідних) середовищ становлять значний теоретичний та практичний інтерес [1–3]. Питанням побудови методом інтегральних перетворень точних аналітичних розв'язків згаданих задач у декартовій, сферичній та циліндричній системах координат присвячені монографії [4–6]. Зокрема, в [6] розглянуто необмежені, напівобмежені та обмежені багатошарові за радіальною координатою циліндрично-кругові області.

У цьому повідомленні пропонуються інтегральні зображення нестаціонарних задач теплопровідності для багатошарових циліндричних півпросторів.

Задача про структуру нестаціонарного температурного поля в ортотропному суцільному $(n+1)$-шаровому за декартовою координатою циліндричному півпросторі математично зводиться до побудови обмеженого в області

$$D = \Big\{(t, r, \varphi, z)\colon t \in (0;\infty),\ r \in (0;\infty);\ \varphi \in [0;2\pi);\ z \in I_n^+ = \bigcup_{j=1}^{n+1} I_j \equiv \bigcup_{j=1}^{n+1} (l_{j-1}; l_j),$$
$$l_0 \geqslant 0,\ l_k < l_{k+1};\ k = \overline{1,n};\ l_{n+1} = \infty\Big\}$$

2π-періодичного щодо кутової змінної φ розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь теплопровідності параболічного типу [7]

$$\frac{\partial T_j}{\partial t} - \left[a_{rj}^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right) + a_{zj}^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]T_j + \chi_j^2 T_j = f_j(t, r, \varphi, z),$$
$$z \in I_j, \qquad j = \overline{1, n+1}, \tag{1}$$

за початковими умовами

$$T_j(t, r, \varphi, z)\big|_{t=0} = g_j(r, \varphi, z), \qquad j \in I_j, \qquad j = \overline{1, n+1}, \tag{2}$$

крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0\right)T_1\bigg|_{z=l_0} = g_0(t, r, \varphi), \qquad \frac{\partial T_{n+1}}{\partial z}\bigg|_{z=\infty} = 0, \tag{3}$$

$$T_j(t, r, \varphi, z)\bigg|_{r=0} < \infty, \qquad \frac{\partial T_j}{\partial r}\bigg|_{r=\infty} = 0, \qquad j = \overline{1, n+1}, \tag{4}$$

та умовами неідеального теплового контакту [8]

$$\begin{cases} \left[\left(R_k \dfrac{\partial}{\partial z} + 1\right) T_k - T_{k+1}\right]\Big|_{z=l_k} = 0, \\ \left(\nu_k \dfrac{\partial T_k}{\partial z} - \nu_{k+1} \dfrac{\partial T_{k+1}}{\partial z}\right)\Big|_{z=l_k} = 0, \qquad k = \overline{1, n}. \end{cases} \tag{5}$$

Фізико-механічний зміст параметрів і функцій, які беруть участь у формулюванні задачі, розкрито в [7, 8].

Вважаємо, що для задачі (1)–(5) виконуються умови узгодженості [7]

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0\right) g_1(r, \varphi, z)\Big|_{z=l_0} = g_0(0, r, \varphi), \qquad \frac{\partial g_{n+1}}{\partial z}\Big|_{z=\infty} = 0,$$

$$g_j(r, \varphi, z)\Big|_{r=0} < \infty, \qquad \frac{\partial g_j}{\partial r}\Big|_{r=\infty} = 0, \qquad z \in I_j, \qquad j = \overline{1, n+1}.$$

До задачі (1)–(5) застосуємо скінченне інтегральне перетворення Фур'є щодо кутової змінної φ [6] та інтегральне перетворення Фур'є–Бесселя щодо радіальної змінної r [6]. Одержуємо задачу про структуру обмеженого в області $D'' = \{(t, z);\ t \in (0; \infty);\ z \in I_n^+\}$ розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial \widetilde{T}_{jm}}{\partial t} - a_{zj}^2 \frac{\partial^2 \widetilde{T}_{jm}}{\partial z^2} + (a_{rj}^2 \lambda^2 + \chi_j^2) \widetilde{T}_{jm} = \widetilde{f}_{jm}(t, \lambda, z), \qquad z \in I_j, \qquad j = \overline{1, n+1}, \tag{6}$$

за початковими умовами

$$\widetilde{T}_{jm}(t, \lambda, z)\big|_{t=0} = \widetilde{g}_{jm}(\lambda, z), \qquad z \in I_j, \qquad j = \overline{1, n+1}, \tag{7}$$

крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0\right) \widetilde{T}_{1m}\Big|_{z=l_0} = \widetilde{g}_{0m}(t, \lambda), \qquad \frac{\partial \widetilde{T}_{n+1,m}}{\partial z}\Big|_{z=\infty} = 0 \tag{8}$$

та умовами спряження

$$\begin{cases} \left[\left(R_k \dfrac{\partial}{\partial z} + 1\right) \widetilde{T}_{km} - \widetilde{T}_{k+1,m}\right]\Big|_{z=l_k} = 0, \\ \left(\nu_k \dfrac{\partial \widetilde{T}_{km}}{\partial z} - \nu_{k+1} \dfrac{\partial \widetilde{T}_{k+1,m}}{\partial z}\right)\Big|_{z=l_k} = 0, \qquad k = \overline{1, n}. \end{cases} \tag{9}$$

До задачі (6)–(9) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій півосі $z \geqslant l_0 \geqslant 0$ з n точками спряження [4]:

$$F_{n,+}[f(z)] = \int\limits_{l_0}^{\infty} f(z) V(z, \beta) \sigma(z)\, dz \equiv \widetilde{f}(\beta), \tag{10}$$

$$F_{n,+}^{-1}[\widetilde{f}(\beta)] = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\infty} \widetilde{f}(\beta) V(z, \beta) \Omega_n(\beta) d\beta \equiv f(z), \tag{11}$$

$$F_{n,+}\left[\sum_{j=1}^{n} a_j^2\theta(z-l_{j-1})\theta(l_j-z)\frac{d^2f}{dz^2}+a_{n+1}^2\theta(z-l_n)\frac{d^2f}{dz^2}\right]\equiv$$

$$\equiv\sum_{j=1}^{n+1} a_j^2\int\limits_{l_{j-1}}^{l_j}\frac{d^2f}{dz^2}V_j(z,\beta)\sigma_j dz\equiv-\beta^2\widetilde{f}(\beta)-\sigma_1 a_1^2(\alpha_{11}^0)^{-1}V_1(l_0,\beta)\times$$

$$\times\left(\alpha_{11}^0\frac{df}{dz}+\beta_{11}^0 f\right)\Big|_{z=l_0}-\sum_{j=1}^{n+1}\gamma_j^2\int\limits_{l_{j-1}}^{l_j} f(z)V_j(z,\beta)\sigma_j dz. \qquad (12)$$

У рівностях (10)–(12) беруть участь величини і функції:

$$V(z,\beta)=\sum_{k=1}^{n} V_k(z,\beta)\theta(z-l_{k-1})\theta(l_k-z)+V_{n+1}(z,\beta)\theta(z-l_n);$$

$$\sigma(z)=\sum_{k=1}^{n}\sigma_k\theta(z-l_{k-1})\theta(l_k-z)+\sigma_{n+1}\theta(z-l_n);$$

$$V_m(z,\beta)=\prod_{j=m}^{n} c_{2j}q_{n+1}(\beta^2)G_m(z,\beta), \qquad m=\overline{1,n};$$

$$V_{n+1}(z,\beta)=\omega_{n2}(\beta)\cos(q_{n+1}(\beta^2)z)-\omega_{n1}(\beta)\sin(q_{n+1}(\beta^2)z);$$

$$\sigma_k=\prod_{j=1}^{n}\frac{c_{1j}a_{n+1}}{c_{2j}a_k^2}; \qquad \sigma_n=\frac{c_{1n}a_{n+1}}{c_{2n}a_n^2}; \qquad \sigma_{n+1}=\frac{1}{a_{n+1}^2};$$

$$G_k(z,\beta)=\omega_{k-1,2}(\beta)\cos(q_k(\beta^2)z)-\omega_{k-1,1}(\beta)\sin(q_k(\beta^2)z), \qquad k=\overline{1,n};$$

$$q_j(\beta^2)=a_j^{-1}(\beta^2+\gamma_j^2)^{1/2}, \qquad j=\overline{1,n+1}; \qquad b_j(\beta^2)=(\beta^2+\gamma_j^2)^{1/2};$$

$$\omega_{01}(q_1l_0)=-\nu_{11}^{01}(q_1l_0); \qquad \omega_{02}(q_1l_0)=-\nu_{11}^{02}(q_1l_0);$$

$$\omega_{jm}(\beta)=\omega_{j-1,2}(\beta)\Psi_{1m}^j(q_jl_j,q_{j+1}l_j)-\omega_{j-1,1}(\beta)\Psi_{2m}^j(q_jl_j,q_{j+1}l_j);$$

$$\Psi_{jm}^k(q_kl_k,q_{k+1}l_k)=\nu_{11}^{kj}(q_kl_k)\nu_{22}^{km}(q_{k+1}l_k)-\nu_{21}^{kj}(q_kl_k)\nu_{12}^{km}(q_{k+1}l_k);$$

$$\nu_{ij}^{k1}(q_sl_m)=-\alpha_{ij}^k q_s(\beta^2)\cos(q_s(\beta^2)l_m)+\beta_{ij}^k\sin(q_s(\beta^2)l_m), \qquad i,j=1,2, \qquad k=\overline{1,n};$$

$$\nu_{ij}^{k2}(q_sl_m)=\alpha_{ij}^k q_s(\beta^2)\cos(q_s(\beta^2)l_m)+\beta_{ij}^k\sin(q_s(\beta^2)l_m), \quad s=\overline{1,n+1}, \quad m=\overline{1,n+1};$$

$$\alpha_{11}^k=R_k; \qquad \beta_{11}^k=1; \qquad \alpha_{12}^k=0; \qquad \beta_{12}^k=1;$$

$$\alpha_{21}^k=\nu_k; \qquad \beta_{21}^k=0; \qquad \alpha_{22}^k=\nu_{k+1}; \qquad \beta_{22}^k=0;$$

$$c_{jk}=\alpha_{2j}^k\beta_{1j}^k-\alpha_{1j}^k\beta_{2j}^k\neq 0, \qquad j=1,2, \qquad k=\overline{1,n};$$

$$\omega_n(\beta)=[\omega_{n1}(\beta)]^2+[\omega_{n2}(\beta)]^2; \qquad \Omega_n(\beta)=\frac{1}{b_{n+1}(\beta^2)\omega_n(\beta)};$$

$\theta(x)$ — одинична функція Гевісайда.

Запишемо систему диференціальних рівнянь (6) та початкові умови (7) у матричній формі

$$\begin{bmatrix} \left(\dfrac{\partial}{\partial t} - a_{z1}^2 \dfrac{\partial^2}{\partial z^2} + a_{r1}^2 \lambda^2 + \chi_j^2\right) \widetilde{T}_{1m}(t, \lambda, z) \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t} - a_{z2}^2 \dfrac{\partial^2}{\partial z^2} + a_{r2}^2 \lambda^2 + \chi_j^2\right) \widetilde{T}_{2m}(t, \lambda, z) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t} - a_{z,n+1}^2 \dfrac{\partial^2}{\partial z^2} + a_{r,n+1}^2 \lambda^2 + \chi_j^2\right) \widetilde{T}_{n+1,m}(t, \lambda, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{f}_{1m}(t, \lambda, z) \\ \widetilde{f}_{2m}(t, \lambda, z) \\ \dots\dots\dots\dots \\ \widetilde{f}_{n+1,m}(t, \lambda, z) \end{bmatrix}, \tag{13}$$

$$\left.\begin{bmatrix} \widetilde{T}_{1m}(t, \lambda, z) \\ \widetilde{T}_{2m}(t, \lambda, z) \\ \dots\dots\dots\dots \\ \widetilde{T}_{n+1,m}(t, \lambda, z) \end{bmatrix}\right|_{t=0} = \begin{bmatrix} \widetilde{g}_{1m}(\lambda, z) \\ \widetilde{g}_{2m}(\lambda, z) \\ \dots\dots\dots\dots \\ \widetilde{g}_{n+1,m}(\lambda, z) \end{bmatrix} \tag{14}$$

і подамо інтегральний оператор $F_{n,+}$, який діє за правилом (10), у вигляді операторної матриці-рядка

$$F_{n,+}[\dots] = \left[\int\limits_{l_0}^{l_1} \dots V_1(z, \beta)\sigma_1 dz \dots \int\limits_{l_n}^{\infty} \dots V_{n+1}(z, \beta)\sigma_{n+1} dz\right]. \tag{15}$$

Перепозначимо сталі a_{zj}^2 через a_j^2 та застосуємо до задачі (13), (14) за правилом множення матриць операторну матрицю-рядок (15). Внаслідок тотожності (12), одержуємо задачу Коші

$$\sum_{j=1}^{n+1} \left(\frac{d}{dt} + \beta^2 + \gamma_j^2 + a_{zj}^2 \lambda^2 + \chi_j^2\right) \widetilde{\widetilde{T}}_{jm}(t, \lambda, \beta) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n+1} \widetilde{\widetilde{f}}_{jm}(t, \lambda, \beta) - \sigma_1 a_1^2 (\alpha_{11}^0)^{-1} V_1(l_0, \beta) \widetilde{g}_{0m}(t, \lambda), \tag{16}$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} \widetilde{\widetilde{T}}_{jm}(t, \lambda, \beta)\big|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n+1} \widetilde{\widetilde{g}}_{jm}(\lambda, \beta), \tag{17}$$

де

$$\widetilde{\widetilde{T}}_{jm}(t, \lambda, \beta) = \int\limits_{l_{j-1}}^{l_j} \widetilde{T}_{jm}(t, \lambda, z) V_j(z, \beta) \sigma_j \, dz; \quad \widetilde{\widetilde{f}}_{jm}(t, \lambda, \beta) = \int\limits_{l_{j-1}}^{l_j} \widetilde{f}_{jm}(t, \lambda, z) V_j(z, \beta) \sigma_j \, dz;$$

$$\widetilde{\widetilde{g}}_{jm}(\lambda, \beta) = \int\limits_{l_{j-1}}^{l_j} \widetilde{g}_{jm}(\lambda, z) V_j(z, \beta) \sigma_j \, dz, \qquad j = \overline{1, n+1}.$$

Припустимо, що $\max(a_{r1}^2 - a_{rj}^2)\lambda^2 \geqslant 0$ $(j = \overline{2, n+1})$ при будь-яких $\lambda \in (0; \infty)$, і покладемо всюди $\gamma_j^2 = (a_{ri}^2 - a_{zj}^2)\lambda^2$. Задача Коші (16), (17) набуває вигляду

$$\frac{d\widetilde{\widetilde{T}}_m}{dt} + (\beta^2 + a_{r1}^2\lambda^2 + \chi_j^2)\widetilde{\widetilde{T}}_m = \widetilde{\widetilde{f}}_m(t, \lambda, \beta) - \sigma_1 a_1^2 (\alpha_{11}^0)^{-1} V_1(l_0, \beta)\widetilde{\widetilde{g}}_{0m}(t, \lambda), \tag{18}$$

$$\widetilde{\widetilde{T}}_m(t, \lambda, \beta)\big|_{t=0} = \widetilde{\widetilde{g}}_m(\lambda, \beta), \tag{19}$$

де

$$\widetilde{\widetilde{T}}_m(t, \lambda, \beta) = \sum_{j=1}^{n+1} \widetilde{\widetilde{T}}_{jm}(t, \lambda, \beta); \qquad \widetilde{\widetilde{f}}_m(t, \lambda, \beta) = \sum_{j=1}^{n+1} \widetilde{\widetilde{f}}_{jm}(t, \lambda, \beta);$$

$$\widetilde{\widetilde{g}}_m(\lambda, \beta) = \sum_{j=1}^{n+1} \widetilde{\widetilde{g}}_{jm}(\lambda, \beta).$$

Безпосередньо перевіряється, що єдиним обмеженим розв'язком задачі (18), (19) є функція

$$\widetilde{\widetilde{T}}_m(t, \lambda, \beta) = \int_0^t e^{-(\beta^2 + a_{r1}^2\lambda^2 + \chi_1^2)} [\widetilde{\widetilde{f}}_m(\tau, \lambda, \beta) - \sigma_1 a_1^2 (\alpha_{11}^0)^{-1} V_1(l_0, \beta)\widetilde{g}_{0m}(\tau, \lambda) + \\ + \delta_+(\tau)\widetilde{\widetilde{g}}_m(\lambda, \beta)]d\tau, \tag{20}$$

де $\delta_+(\tau)$ — міра Дірака, зосереджена в точці $\tau = 0_+$.

Оскільки суперпозиція операторів $F_{n,+}$ та $F_{n,+}^{-1}$ є одиничним оператором, то оператор $F_{n,+}^{-1}$ зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця

$$F_{n,+}^{-1}[\ldots] = \begin{bmatrix} \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \ldots V_1(z, \beta)\Omega_n(\beta)d\beta \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \ldots V_{n+1}(z, \beta)\Omega_n(\beta)d\beta \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Застосуємо до матриці-елемента $[\widetilde{\widetilde{T}}_m(t, \lambda, \beta)]$, де функція $\widetilde{\widetilde{T}}_m(t, \lambda, \beta)$ визначена формулою (20), за правилом множення матриць операторну матрицю-стовпець (21). Одержуємо єдиний обмежений розв'язок задачі (6)–(9):

$$\widetilde{T}_{jm}(t, \lambda, z) = \int_0^t \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-(\beta^2 + a_{r1}^2\lambda^2 + \chi_1^2)(t-\tau)} [\widetilde{\widetilde{f}}_m(\tau, \lambda, \beta) - \sigma_1 a_1^2 (\alpha_{11}^0)^{-1} V_1(l_0, \beta)\widetilde{g}_{0m}(\tau, \lambda) + \\ + \delta_+(\tau)\widetilde{\widetilde{g}}_m(\lambda, \beta)]V_j(z, \beta)\Omega_n(\beta)d\beta d\tau, \qquad j = \overline{1, n+1}. \tag{22}$$

До функції $\widetilde{\widetilde{T}}_{jm}(t,\lambda,z)$ послідовно застосуємо обернені оператори Фур'є–Бесселя та Фур'є. Виконавши нескладні перетворення, одержуємо функції

$$T_j(t,r,\varphi,z)=\sum_{k=1}^{n+1}\int\limits_0^t\int\limits_0^\infty\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{l_{k-1}}^{l_k}E_{jk}(t-\tau,r,\rho,\varphi-\alpha,z,\zeta)\times$$

$$\times[f_k(\tau,\rho,\alpha,\xi)+\delta_+(\tau)g_k(\rho,\varphi,\xi)]\sigma_k\rho d\xi d\alpha d\rho d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^\infty\int\limits_0^{2\pi}W_j(t-\tau,r,\rho,\varphi-\alpha,z)g_0(\tau,\rho,\alpha)\rho d\alpha d\rho d\tau,\qquad j=\overline{1,n+1},\tag{23}$$

які описують структуру нестаціонарного температурного поля в ортотропному $(n+1)$-шаровому за декартовою координатою циліндричному півпросторі.

У формулах (23) беруть участь: компоненти фундаментальної матриці розв'язків

$$E_{jk}(t,r,\rho,\varphi,z,\xi)=\frac{1}{\pi^2}\sum_{m=0}^\infty\varepsilon_mE_{jk,m}(t,r,\rho,z,\xi)\cos(m\varphi)$$

та компоненти аплікатної матриці Гріна

$$W_j(t,r,\rho,\varphi,z)=-\sigma_1a_1^2(\alpha_{11}^0)^{-1}E_{j1}(t,r,\rho,\varphi,z,l_0)$$

параболічної крайової задачі (1)–(5), де

$$E_{jk,m}(t,r,\rho,z,\xi)=\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty e^{-(\beta^2+a_{r1}^2\lambda^2+\chi_j^2)t}V_j(z,\beta)V_k(\xi,\beta)\Omega_n(\beta)d\beta J_m(\lambda r)J_m(\lambda\rho)\lambda d\lambda;$$

$$j,k=\overline{1,n+1}.$$

Відомо [9], що

$$\int\limits_0^\infty e^{-b^2x^2}J_\nu(\alpha x)J_\nu(\beta x)x\,dx=\frac{1}{2b^2}\exp\left(-\frac{\alpha^2+\beta^2}{4b^2}\right)I_\nu\left(\frac{\alpha\beta}{2b^2}\right),\tag{24}$$

де $I_\nu(x)$ — модифікована циліндрична функція 1-го роду ν-го порядку.

Скориставшись формулою (24), одержуємо, що

$$E_{jk,m}(t,r,\rho,z,\xi)=\frac{e^{-\chi_j^2t}}{2a_{r1}^2t}\exp\left(-\frac{r^2+\rho^2}{4a_{r1}^2t}\right)I_m\left(\frac{r\rho}{2a_{r1}^2t}\right)\int\limits_0^\infty e^{-t\beta^2}V_j(z,\beta)V_k(\xi,\beta)\Omega_n(\beta)\,d\beta.$$

Підсумком викладеного вище є така теорема.

Теорема. *Припустимо, що:*

1) функції $f_k(t,r,\varphi,z)$, $k=\overline{1,n}$, неперервні на множинах $\{(t,r,\varphi,z);\ t\in(0;\infty);\ r\in\in(0;\infty);\ \varphi\in[0;2\pi);\ z\in I_k\}$ і мають обмежену варіацію за кожною із змінних r, φ, z;

2) функція $f_{n+1}(t,r,\varphi,z)$ неперервна на множині $\{(t,r,\varphi,z);\ t\in(0;\infty),\ r\in(0;\infty);\ \varphi\in\in[0;2\pi);\ z\in I_{n+1}\}$, має обмежену варіацію за кожною із змінних r, φ, z, абсолютно сумовна на проміжку $\{z; z\geqslant l_n\}$ і зникає разом зі своїми частинними похідними 1-го порядку при $z\to\infty$;

3) функції $f_j(t,r,\varphi,z)$, $j=\overline{1,n+1}$, абсолютно сумовні з вагою r на проміжку $\{r; r\geqslant 0\}$ і зникають разом зі своїми частинними похідними 1-го порядку при $r\to\infty$;

4) функції $f_j(t,r,\varphi,z)$, $g_j(r,\varphi,z)$, $j=\overline{1,n+1}$, задовольняють умови неідеального теплового контакту;

5) функції $g_k(r,\varphi,z)$, $k=\overline{1,n}$, неперервні і мають обмежену варіацію за кожною змінною на множинах $\{(r,\varphi,z);\ r\in(0;\infty),\ \varphi\in[0;2\pi);\ z\in I_k\}$;

6) функція $g_{n+1}(r,\varphi,z)$ неперервна і має обмежену варіацію за кожною змінною на множині $\{(r,\varphi,z);\ r\in(0;\infty),\ \varphi\in[0;2\pi);\ z\in I_{n+1}\}$, абсолютно сумовна на проміжку $\{z; z\geqslant l_n\}$ і зникає разом зі своїми частинними похідними 1-го порядку при $z\to\infty$;

7) функції $g_j(r,\varphi,z)$, $j=\overline{1,m+1}$, абсолютно сумовні з вагою r на проміжку $\{r, r\geqslant 0\}$ і зникають разом зі своїми частинними похідними 1-го порядку при $r\to\infty$;

8) функція $g_0(t,r,\varphi)$ неперервна на множині $\{(t,r,\varphi); t\in(0;\infty),\varphi\in[0;2\pi)\}$, має обмежену варіацію за кожною із змінних r, φ, абсолютно сумовна з вагою r на проміжку $\{r; r\geqslant 0\}$ і зникає разом зі своїми частинними похідними 1-го порядку при $r\to\infty$;

9) виконуються умови узгодженості.

Тоді в класі неперервно диференційовних за змінною t і двічі неперервно диференційовних за змінними r, φ, z в області D вектор-функцій $u(t,r,\varphi,z)=\{u_1(t,r,\varphi,z),u_2(t,r,\varphi,z),\ldots,u_n(t,r,\varphi,z)\}$, що задовольняють умови 1–3, єдиний обмежений розв'язок параболічної початково-крайової задачі (1)–(5) *визначається формулами* (23).

Зауваження:

1. При $R_k=0$ ($k=\overline{1,n}$) безпосередньо з формул (23) одержуємо структуру нестаціонарного температурного поля у випадку здійснення на площинах $z=l_k$ ідеального теплового контакту.

2. У випадку $a_{rj}^2=a_{zj}^2=a_j^2>0$ формули (23) визначають структуру нестаціонарного температурного поля в ізотропному $(n+1)$-шаровому за декартовою координатою циліндричному півпросторі.

3. Параметри α_{11}^0, β_{11}^0 дають можливість виділяти із формул (23) розв'язки періодичних початково-крайових задач у випадках задання на поверхні $z=l_0$ крайової умови 1, 2 і 3-го роду.

Таким чином, при найбільш загальних припущеннях в межах феноменологічної теорії теплопровідності побудовано інтегральні зображення точних аналітичних розв'язків нестаціонарних задач в багатошарових циліндричних півпросторах. Одержані розв'язки мають алгоритмічний характер, неперервно залежать від параметрів та даних задачі й можуть бути використані як в теоретичних дослідженнях, так і в інженерних розрахунках.

1. *Подстригач Я. С., Ломакин В. А., Коляно Ю. М.* Термоупругость тел неоднородной структуры. – Москва: Наука, 1984. – 368 с.
2. *Коляно Ю. М.* Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – Киев: Наук. думка, 1992. – 280 с.
3. *Сергиенко И. В., Скопецкий В. В., Дейнека В. С.* Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – Киев: Наук. думка, 1991. – 432 с.
4. *Ленюк М. П.* Температурні поля в плоских кусково-однорідних ортотропних областях. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1997. – 188 с.

5. *Конет І. М.* Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в ортотропних сферичних областях. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1998. – 209 с.
6. *Конет І. М., Ленюк М. П.* Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в циліндрично-кругових областях. – Чернівці: Прут, 2001. – 312 с.
7. *Перестюк М. О., Маринець В. В.* Теорія рівнянь математичної фізики. – Київ: Либідь, 2001. – 336 с.
8. *Боли Б., Уэйнер Дж.* Теория температурных напряжений. – Москва: Мир, 1964. – 517 с.
9. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – Москва: Наука, 1971. – 1108 с.

Кам'янець-Подільський державний університет *Надійшло до редакції 26.10.2006*

УДК 517.535.4

К. Г. Малютин, В. А. Герасименко

Обобщенные представления субгармонических функций в полуплоскости

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. П. Моторным)

We obtain the presentation of subharmonic functions of finite gamma-growth in a half-plane. This presentation is a generalization of the known integral formulas for the subharmonic functions of finite order.

В теории аналитических и субгармонических функций многие важные результаты получаются с помощью различных представлений этих функций. Наиболее известная их них — формула Пуассона–Иенсена, на которую опирается значительная часть теории субгармонических функций. К ним также относятся формулы Неванлинны, Симидзу–Альфорса, Карлемана, Левина, которые приведены в [1]. Теория субгармонических функций в полуплоскости $\mathbb{C}_+ = \{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$, созданная А. Ф. Гришиным [2], в значительной мере опирается на открытые им интегральные формулы. Из представления Гришина ясно видно, что субгармоническая функция конечного порядка в верхней полуплоскости определяется своей полной мерой с точностью до гармонического полинома, обращающегося в нуль на вещественной оси, аналогично тому, как целая функция конечного порядка определяется своими корнями с точностью до функции вида $\exp\{P(z)\}$, где $P(z)$ — полином.

В настоящей работе приведены представления субгармонических функций в полуплоскости более общего роста $\gamma(r)$, чем конечный порядок. Вышеупомянутое представление Гришина получается как частный случай при $\gamma(r) = r^\rho$, где $\rho > 0$ — фиксированное число.

Обозначим через $\mathbb{C}_+ = \{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$ верхнюю полуплоскость комплексного переменного z. Через $C(a,r)$ будем обозначать открытый, а через $B(a,r)$ — замкнутый круг радиуса r с центром в точке a; через Ω_+ — пересечение множества Ω с полуплоскостью $\mathbb{C}_+$: $\Omega_+ = \Omega \bigcap \mathbb{C}_+$. Если $0 < r_1 < r_2$, то $D_+(r_1,r_2) = \overline{C_+(0,r_2) \setminus C_+(0,r_1)}$ означает замкнутое полукольцо.

Субгармоническая в $\mathbb{C}_+$ функция v называется истинно субгармонической, если $\limsup\limits_{z\to t} v(z) \leqslant 0$ для любого вещественного числа $t \in \mathbb{R}$. Класс истинно субгармонических