4. *Малютин К. Г.* Ряды Фурье и δ-субгармонические функции // Тр. Ин-та прикладной математики и механики АН УССР. – 1988. – Т. 3. – С. 146–157.
5. *Говоров Н. В.* Краевая задача Римана с бесконечным индексом. – Москва: Наука, 1986. – 240 с.

Сумской национальный аграрный университет *Поступило в редакцию 25.10.2006*

УДК 517.956.2

А. А. Мурач

Эллиптические по Петровскому системы дифференциальных уравнений в уточненной шкале пространств на замкнутом многообразии

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Ю. С. Самойленко)

We study a system of differential equations that is elliptic in the sense of Petrovskii on a closed compact smooth manifold. We prove that the operator generated by the system is a Fredholm one in a refined bilateral scale of functional Hilbert spaces. Elements of this scale are the isotropic spaces of Hörmander–Volevich–Paneyakh. An elliptic system with parameter is investigated as well.

В работе изучаются эллиптические матричные дифференциальные операторы на гладком замкнутом (компактном) многообразии. Известно [1, с. 52], что эти операторы имеют конечный индекс в шкале соболевских пространств. Цель работы — уточнить этот результат применительно к более тонкой двусторонней шкале гильбертовых функциональных пространств. Элементами этой шкалы являются изотропные пространства Хермандера–Волевича–Панеяха [2, с. 54; 3, с. 14], параметризуемые с помощью двух параметров: числового и функционального. Последний является медленно меняющейся на $+\infty$ функцией одной переменной. Эта двусторонняя шкала исследовалась ранее в [4, 5] и названа там уточненной. Она содержит в себе соболевскую шкалу и позволяет значительно точнее охарактеризовать гладкость распределения по свойствам его преобразования Фурье.

Мы предполагаем, что матричный дифференциальный оператор является эллиптическим по И. Г. Петровскому [6, с. 328]. Нами установлено, что исследуемый оператор ограничен и фредгольмов (т. е. имеет конечный индекс) в уточненной двусторонней шкале пространств и порождает в ней семейство изоморфизмов. Получена априорная оценка и исследована локальная гладкость решений эллиптической системы. Изучен также эллиптический матричный оператор с параметром. Скалярный случай рассмотрен ранее в работах [5, 7–10] как для многообразий с краем, так и без края.

1. Постановка задачи. Пусть Γ — бесконечно гладкое замкнутое многообразие размерности $n \geqslant 1$, на котором задан матричный дифференциальный оператор

$$A = (A_{j,k})_{j,k=1}^{p}.$$

Здесь $p \in \mathbb{N}$, а $A_{j,k}$, где $j, k = 1, \ldots, p$, — линейные скалярные дифференциальные операторы на Γ произвольных порядков с бесконечно гладкими комплексными коэффициентами. Для каждого номера $k = 1, \ldots, p$ положим

$$m_k := \max\{\operatorname{ord} A_{1,k}, \ldots, \operatorname{ord} A_{p,k}\}.$$

Свяжем с оператором A матрицу

$$a_0(x, \xi) := (a_{j,k}^{(0)}(x, \xi))_{j,k=1}^{p}, \qquad x \in \Gamma, \qquad \xi \in T_x^*\Gamma.$$

Здесь $a_{j,k}^{(0)}(x, \xi)$ — главный символ дифференциального оператора $A_{j,k}$ в случае, когда $\operatorname{ord} A_{j,k} = m_k$, либо $a_{j,k}^{(0)}(x, \xi) \equiv 0$ в случае, когда $\operatorname{ord} A_{j,k} < m_k$. Как обычно, через $T_x^*\Gamma$ обозначено кокасательное пространство к многообразию Γ в точке $x \in \Gamma$.

Определение 1 [6, с. 328]. Матричный дифференциальный оператор A называется *эллиптическим по Петровскому* на многообразии Γ, если

$$\det a_0(x, \xi) \neq 0 \qquad \text{для произвольных} \qquad x \in \Gamma, \qquad \xi \in T_x^*(\Gamma) \setminus \{0\}.$$

Зафиксируем на Γ какую-либо C^∞-плотность dx. Обозначим через $\mathcal{D}'(\Gamma)$ пространство всех распределений на Γ. При этом суммируемая функция $f\colon \Gamma \to \mathbb{C}$ отождествляется с антилинейным функционалом из $\mathcal{D}'(\Gamma)$:

$$w \mapsto (f, w)_\Gamma := \int_\Gamma f(x)\overline{w(x)}\, dx, \qquad w \in C^\infty(\Gamma).$$

Через $(f, w)_\Gamma$ будем обозначать также значение произвольного распределения $f \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ на основной функции $w \in C^\infty(\Gamma)$.

Матричный дифференциальный оператор A непрерывен в линейном топологическом пространстве $(\mathcal{D}'(\Gamma))^p$ векторных распределений $u = \operatorname{col}(u_1, \ldots, u_p)$ на Γ. Наша задача — изучить его в уточненных шкалах пространств распределений на Γ.

2. Уточненные шкалы пространств введены в [5]. Приведем (для удобства читателя) их определения.

Обозначим через $\mathcal{M}$ совокупность всех таких функций $\varphi\colon [1, +\infty) \to (0, +\infty)$, что:

а) φ измерима по Борелю на полуоси $[1, +\infty)$;

б) функции φ и $1/\varphi$ ограничены на каждом отрезке $[1, b]$, где $1 < b < +\infty$;

в) функция φ медленно меняющаяся на $+\infty$ в смысле Караматы, т. е. [11, с. 9]

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\varphi(\lambda t)}{\varphi(t)} = 1 \qquad \text{для любого} \qquad \lambda > 0.$$

Пусть $s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{M}$. Обозначим через $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ множество всех таких распределений u медленного роста, заданных в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, что преобразование Фурье $\widehat{u}$ распределения u является локально суммируемой по Лебегу в $\mathbb{R}^n$ функцией, удовлетворяющей условию

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle\xi\rangle^{2s} \varphi^2(\langle\xi\rangle) |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi < \infty.$$

Здесь $\langle\xi\rangle = (1+\xi_1^2+\dots+\xi_n^2)^{1/2}$ — сглаженный модуль вектора $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n) \in \mathbb{R}^n$. В пространстве $\mathrm{H}^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ определено скалярное произведение по формуле

$$(u,v)_{\mathrm{H}^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)} := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \langle\xi\rangle^{2s}\varphi^2(\langle\xi\rangle)\widehat{u}(\xi)\overline{\widehat{v}(\xi)}\,d\xi.$$

Пространство $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ — это частный изотропный гильбертов случай пространств, рассмотренных Л. Хермандером [2, с. 54] и Б. П. Волевичем, Л. Р. Панеяхом [3, с. 14]. В случае $\varphi\equiv 1$ пространство $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ совпадает с пространством Соболева $H^s(\mathbb{R}^n)$. Из включений

$$\bigcup_{\varepsilon>0} H^{s+\varepsilon}(\mathbb{R}^n) =: H^{s+}(\mathbb{R}^n) \subset H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n) \subset H^{s-}(\mathbb{R}^n) := \bigcap_{\varepsilon>0} H^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^n)$$

вытекает, что в семействе

$$\{H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)\colon s\in\mathbb{R}, \varphi\in\mathcal{M}\} \tag{1}$$

функциональный параметр φ *уточняет* основную (степенную) s-гладкость. Поэтому семейство называется *уточненной* шкалой в $\mathbb{R}^n$ (по отношению к соболевской шкале).

Уточненная шкала на многообразии Γ строится по шкале (1) следующим образом. Возьмем конечный атлас из C^∞-структуры на Γ, образованный локальными картами $\alpha_j\colon \mathbb{R}^n \leftrightarrow \leftrightarrow U_j$, где $j=1,\dots,r$. Здесь множества U_j составляют открытое покрытие многообразия Γ. Пусть функции $\chi_j \in C^\infty(\Gamma)$, где $j=1,\dots,r$, образуют разбиение единицы на Γ, удовлетворяющее условию $\operatorname{supp}\chi_j \subset U_j$.

Положим

$$H^{s,\varphi}(\Gamma) := \{f\in\mathcal{D}'(\Gamma)\colon (\chi_j f)\circ\alpha_j \in H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n) \text{ для каждого } j=1,\dots,r\}.$$

Здесь $(\chi_j f)\circ\alpha_j$ — представление распределения $\chi_j f$ в локальной карте α_j. В пространстве $H^{s,\varphi}(\Gamma)$ определено скалярное произведение по формуле

$$(f,g)_{\mathrm{H}^{s,\varphi}(\Gamma)} := \sum_{j=1}^{r}((\chi_j f)\circ\alpha_j, (\chi_j g)\circ\alpha_j)_{H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)}.$$

Оно стандартным образом задает норму. Пространство $H^{s,\varphi}(\Gamma)$ сепарабельное гильбертово, непрерывно вложено в $\mathcal{D}'(\Gamma)$ и с точностью до эквивалентности норм не зависит от выбора атласа и разбиения единицы. Множество $C^\infty(\Gamma)$ плотно в $H^{s,\varphi}(\Gamma)$.

Семейство функциональных пространств

$$\{H^{s,\varphi}(\Gamma)\colon s\in\mathbb{R},\ \varphi\in\mathcal{M}\}$$

называется *уточненной* шкалой на Γ. Она содержит пространства Соболева $H^s(\Gamma) = H^{s,1}(\Gamma)$. Отметим следующие свойства этой шкалы.

Пусть на многообразии Γ задана риманова структура, которая определяет плотность dx (это всегда можно сделать), а $\triangle$ — оператор Лапласа–Бельтрами на замкнутом многообразии Γ (см., напр., [12, т. 2, с. 343]). Определим функцию

$$\varphi_s(t) := t^{s/2}\varphi(t^{1/2}) \quad \text{при} \quad t\geqslant 1, \qquad \varphi_s(t) := \varphi(1) \quad \text{при} \quad 0<t<1.$$

Рассмотрим в пространстве $L_2(\Gamma)$ оператор $\varphi_s(1-\triangle)$ как борелевскую функцию от самосопряженного оператора $1-\triangle$.

Предложение 1. *Для произвольных $s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{M}$ пространство $H^{s,\varphi}(\Gamma)$ совпадает с пополнением множества функций $u \in C^\infty(\Gamma)$ по норме $\|\varphi_s(1-\triangle)u\|_{L_2(\Gamma)}$, которая эквивалентна норме $\|u\|_{H^{s,\varphi}(\Gamma)}$.*

Предложение 2. *Пусть функциональный параметр $\varphi \in \mathcal{M}$ удовлетворяет условию*

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\varphi^2(t)} < \infty. \tag{2}$$

Тогда для любого целого $k \geqslant 0$ справедливо компактное вложение

$$H^{k+n/2,\varphi}(\Gamma) \hookrightarrow C^k(\Gamma). \tag{3}$$

Обратно, если справедливо непрерывное вложение (3) *при некоторых $\varphi \in \mathcal{M}$ и целом $k \geqslant 0$, то выполняется условие* (2).

3. Основные результаты. Обозначим через A^+ матричный дифференциальный оператор, формально сопряженный к оператору A. Напомним, что, по определению, A^+ — это транспонированная матрица дифференциальных операторов, формально сопряженных к операторам $A_{j,k}$ относительно полуторалинейной формы $(\cdot,\cdot)_\Gamma$. Положим

$$N := \{u \in (C^\infty(\Gamma))^p \colon Au = 0 \text{ на } \Gamma\} \qquad \text{и} \qquad N^+ := \{v \in (C^\infty(\Gamma))^p \colon A^+v = 0 \text{ на } \Gamma\}.$$

Из эллиптичности оператора A следует [1, с. 52], что пространства N и N^+ конечномерны.

Определение 2. Линейный ограниченный оператор $T \colon X \to Y$, где X, Y — банаховы пространства, называется *фредгольмовым*, если его ядро конечномерно, а область значений $T(X)$ замкнута в Y и имеет там конечную коразмерность. *Индексом* фредгольмового оператора T называется число $\dim\ker T - \dim(Y/T(X))$.

Теорема 1. *Линейное отображение*

$$u \mapsto Au, \qquad u \in (C^\infty(\Gamma))^p,$$

продолжается по непрерывности до ограниченного фредгольмового оператора

$$A \colon \prod_{k=1}^{p} H^{s+m_k,\varphi}(\Gamma) \to (H^{s,\varphi}(\Gamma))^p \qquad \text{для произвольных} \qquad s \in \mathbb{R}, \qquad \varphi \in \mathcal{M}. \tag{4}$$

Этот оператор имеет ядро N и область значений

$$\Big\{ f = \operatorname{col}(f_1,\ldots,f_p) \in (H^{s,\varphi}(\Gamma))^p \colon \sum_{j=1}^{p} (f_j, w_j)_\Gamma = 0 \text{ для любого } w = (w_1,\ldots,w_p) \in N^+ \Big\}.$$

Индекс оператора (4) *равен числу $\dim N - \dim N^+$ и не зависит от s, φ.*

Согласно этой теореме, N^+ — дефектное подпространство оператора (4). Отметим [12, т. 1, с. 139], что в скалярном случае $p = 1$ индекс оператора (4) равен 0.

Теорема 2 (априорная оценка). *Пусть $s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{M}$. Предположим, что вектор-функция*

$$u = \operatorname{col}(u_1,\ldots,u_p) \in \prod_{k=1}^{p} H^{s+m_k,\varphi}(\Gamma) \tag{5}$$

является решением уравнения

$$Au = f \qquad \textit{на} \qquad \Gamma, \qquad f = \mathrm{col}(f_1, \ldots, f_p) \in (H^{s,\varphi}(\Gamma))^p.$$

Для выбранных параметров s, φ и произвольного числа $\sigma > 0$ существует такое число $c > 0$, не зависящее от вектор-функций u, f, что

$$\sum_{k=1}^{p} \|u_k\|_{H^{s+m_k,\varphi}(\Gamma)} \leqslant c\left(\sum_{j=1}^{p} \|f_j\|_{H^{s,\varphi}(\Gamma)} + \sum_{k=1}^{p} \|u_k\|_{H^{s-\sigma}(\Gamma)}\right). \tag{6}$$

Отметим, что в случае тривиального ядра N вторая сумма в правой части неравенства (6) отсутствует. Согласно теореме 1, если пространства N и N^+ тривиальны, то оператор (4) является топологическим изоморфизмом. В общем случае изоморфизм удобно задавать с помощью следующих проекторов.

Рассмотрим две прямые суммы

$$\prod_{k=1}^{p} H^{s+m_k,\varphi}(\Gamma) = N \dotplus \left\{u \text{ — вектор (5)}\colon \sum_{k=1}^{p} (u_k, v_k)_\Gamma = 0 \text{ для любого } v = (v_1, \ldots, v_p) \in N\right\},$$

$$(H^{s,\varphi}(\Gamma))^p = N^+ \dotplus A((H^{s,\varphi}(\Gamma))^p).$$

Обозначим через P и P^+ косые проекторы соответственно пространств

$$\prod_{k=1}^{p} H^{s+m_k,\varphi}(\Gamma) \qquad \text{и} \qquad (H^{s,\varphi}(\Gamma))^p$$

на вторые слагаемые в этих суммах. Эти проекторы не зависят от s, φ.

Теорема 3. *Для произвольных $s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{M}$ сужение оператора* (3) *на подпространство $P\left(\prod\limits_{k=1}^{p} H^{s+m_k,\varphi}(\Gamma)\right)$ является топологическим изоморфизмом*

$$A\colon P\left(\prod_{k=1}^{p} H^{s+m_k,\varphi}(\Gamma)\right) \leftrightarrow P^+((H^{s,\varphi}(\Gamma))^p).$$

4. Приложение. Первостепенное приложение теорем о разрешимости в теории эллиптических операторов — это утверждения о повышении локальной гладкости решения эллиптического уравнения (напр., [2, 13, 14]). Приведем одно из таких утверждений.

Пусть Γ_0 — открытое непустое подмножество многообразия Γ. Обозначим

$$H^{s,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0) := \{f \in \mathcal{D}'(\Gamma)\colon \chi f \in H^{s,\varphi}(\Gamma) \text{ для любого } \chi \in C^\infty(\Gamma),\ \mathrm{supp}\,\chi \subset \Gamma_0\}.$$

Теорема 4. *Пусть вектор-функция $u \in (\mathcal{D}'(\Gamma))^p$ является обобщенным решением уравнения $Au = f$ на Γ_0, в котором $f \in (H^{s,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0))^p$ для некоторых $s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{M}$. Тогда*

$$u \in \prod_{k=1}^{p} H^{s+m_k,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0).$$

Таким образом, уточненная гладкость φ правой части f уравнения наследуется решением u. Отметим, что в случае $\Gamma_0 = \Gamma$ справедливо $H^{s,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Gamma) = H^{s,\varphi}(\Gamma)$. Поэтому теорема 4 содержит в себе также утверждение о повышении глобальной гладкости, т. е. на всем многообразии Γ. Из теоремы 4 и предложения 1 вытекает

Следствие 1. *Пусть вектор-функция* $u \in (\mathcal{D}'(\Gamma))^p$ *является обобщенным решением уравнения* $Au = f$ *на* Γ, *где* $f \in (H^{n/2,\varphi}(\Gamma))^p$ *для некоторого функционального параметра* φ, *удовлетворяющего условию* (2). *Тогда*

$$u \in \prod_{k=1}^{p} C^{m_k}(\Gamma), \qquad \text{т. е. решение } u \text{ — классическое.}$$

5. Эллиптический оператор с параметром. Эллиптические операторы и краевые задачи с параметром изучались в работах М. С. Аграновича, М. И. Вишика и их последователей (см. [15, 1] и цитируемую там литературу). Ими установлено, что при достаточно больших по модулю значениях комплексного параметра оператор является изоморфизмом в подходящих парах пространств Соболева. Для пространств уточненной шкалы справедлив аналог этого результата.

Пусть на многообразии Γ задан матричный дифференциальный оператор

$$A(\lambda) = (A_{j,k}(\lambda))_{j,k=1}^{p},$$

зависящий от комплексного параметра λ следующим образом:

$$A_{j,k}(\lambda) = \sum_{r=0}^{m_k} \lambda^{m_k - r} A_{j,k}^{(r)}.$$

Здесь $p \in \mathbb{N}$, $m_1, \ldots, m_p$ — неотрицательные целые числа, а $A_{j,k}^{(r)}$ — линейные скалярные дифференциальные операторы на Γ с бесконечно гладкими комплексными коэффициентами, причем $\operatorname{ord} A_{j,k}^{(r)} \leqslant r$.

Свяжем с оператором $A(\lambda)$ матрицу

$$a_0(x,\xi,\lambda) := \left(\sum_{r=0}^{m_k} \lambda^{m_k - r} a_{j,k}^{r,0}(x,\xi) \right)_{j,k=1}^{p}, \qquad x \in \Gamma, \qquad \xi \in T_x^*\Gamma.$$

Здесь $a_{j,k}^{r,0}(x,\xi)$ — главный символ дифференциального оператора $A_{j,k}^{(r)}$ в случае, когда $\operatorname{ord} A_{j,k}^{(r)} = r$, либо $a_{j,k}^{r,0}(x,\xi) \equiv 0$ в случае, когда $\operatorname{ord} A_{j,k}^{(r)} < r$.

Пусть K — фиксированный замкнутый угол на комплексной плоскости с вершиной в начале координат (не исключается случай, когда K вырождается в луч).

Определение 3. Матричный дифференциальный оператор $A(\lambda)$ называется *эллиптическим с параметром по Петровскому* на многообразии Γ в угле K, если для произвольных точки $x \in \overline{\Omega}$, ковектора $\xi \in T_x^*\Gamma$ и параметра $\lambda \in K$ справедливо

$$(\xi, \lambda) \neq 0 \Rightarrow \det a_0(x,\xi,\lambda) \neq 0.$$

Если оператор $A(\lambda)$ эллиптичен с параметром по Петровскому на Γ в угле K, то он эллиптичен по Петровскому на Γ для каждого фиксированного $\lambda \in \mathbb{C}$. В силу теоремы 1 оператор

$$A(\lambda)\colon \prod_{k=1}^{p} H^{s+m_k,\varphi}(\Gamma) \to (H^{s,\varphi}(\Gamma))^p, \qquad s \in \mathbb{R}, \qquad \varphi \in \mathcal{M}, \tag{7}$$

ограничен и фредгольмов. Этот результат допускает следующее усиление.

Теорема 5. *Пусть оператор $A(\lambda)$ эллиптический с параметром по Петровскому на многообразии Γ в угле K. Тогда существует такое число $\sigma > 0$, что для каждого значения параметра $\lambda \in K$, удовлетворяющего условию $|\lambda| \geqslant \sigma$, оператор* (7) *является топологическим изоморфизмом.*

Из этой теоремы вытекает (см. [15, с. 96])

Следствие 2. *Если оператор $A(\lambda)$ эллиптический с параметром по Петровскому на многообразии Γ на некотором замкнутом луче $K := \{\lambda \in \mathbb{C}\colon \arg\lambda = \mathrm{const}\}$, то оператор* (7) *имеет нулевой индекс.*

Автор выражает признательность В. А. Михайлецу за обсуждение результатов.

1. *Агранович М. С.* Эллиптические операторы на замкнутых многообразиях. – Москва: ВИНИТИ, 1990. – С. 5–129. – (Итоги науки и техники. Соврем. пробл. мат. Фунд. напр.; Т. 63).
2. *Хермандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. – Москва: Мир, 1965. – 380 с.
3. *Волевич Л. Р., Панеях Б. П.* Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения // Успехи мат. наук. – 1965. – **20**, № 1. – С. 3–74.
4. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Уточненные шкалы пространств и эллиптические краевые задачи. I // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 2. – С. 217–235.
5. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Уточненные шкалы пространств и эллиптические краевые задачи. II // Там же. – 2006. – **58**, № 3. – С. 352–370.
6. *Петровский И. Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. – Москва: Физматгиз, 1961. – 400 с.
7. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Эллиптический оператор в уточненной шкале пространств на замкнутом многообразии // Доп. НАН України. – 2006. – № 10. – С. 27–33.
8. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Регулярная эллиптическая граничная задача для однородного уравнения в двусторонней уточненной шкале пространств // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 11. – С. 1536–1555.
9. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Эллиптический оператор с однородными регулярными граничными условиями в двусторонней уточненной шкале пространств // Укр. мат. вісник. – 2006. – **3**, № 4. – С. 447–480.
10. *Мурач А. А.* Эллиптические краевые задачи в многосвязной области в уточненной шкале пространств // Доп. НАН України. – 2007. – № 4. – С. 29–35.
11. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – Москва: Наука, 1985. – 142 с.
12. *Трев Ф.* Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье: В 2 т. – Москва: Мир, 1984. – Т. 1. – 360 с; Т. 2. – 400 с.
13. *Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л.* Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях. I. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 206 с.
14. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка., 1965. – 800 с.
15. *Агранович М. С., Вишик М. И.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // Успехи мат. наук. – 1964. – **19**, № 3. – С. 53–161.

Институт математики НАН Украины, Киев
Черниговский государственный технологический университет

Поступило в редакцию 24.10.2006