Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

5 • 2007

ІНФОРМАТИКА ТА КІБЕРНЕТИКА

УДК 517.944

Член-кореспондент НАН України **В. В. Скопецький, В. А. Стоян**

Про задачу ідентифікації динаміки дискретно керованого розподіленого просторово-часового процесу

An identification-pseudoinverse approach to the construction of integral models of the distributed space-time systems with regard for discretely observed external dynamical disturbances and the system's state corresponding to them is proposed. The problem of the control over such systems is solved. The results obtained are illustrated.

Основана на узагальненнях [1] методів лінійної алгебри [2, 3] методика математичного моделювання [4, 5] динаміки систем з розподіленими параметрами дозволяє розв'язувати прямі та обернені задачі динаміки розподілених просторово-часових процесів. Запропонований в [6] підхід до розв'язання некоректно (за початково-крайовими умовами) сформульованих задач динаміки розподіленого просторово-часового процесу грунтується на заміні диференціальної моделі інтегральною. Ідентифікаційні підходи [7, 8] до побудови інтегральної моделі досліджуваного просторово-часового процесу дозволили значно спростити методику [4, 5] математичного моделювання останнього. Інтегральна математична модель процесу, побудована на дискретних спостереженнях за його початково-крайовим станом, дала змогу легко розв'язати і задачі керування. Просторово-часовий стан останнього при цьому задавався теж дискретно.

На основі результатів робіт [7, 9] нижче метод [10] поширюється на ідентифікацію просторово-часових процесів, дискретно спостережуваних за зовнішньо-динамічними збуреннями, та на розв'язання задач керування такими процесами при неперервно заданому бажаному стані останніх.

1. Розглядатимемо розподілений просторово-часовий процес, функція $y(s)$ стану якого в області

$$S_0^T = \{s = (x,t)\colon x \in S_0 \subset R^n,\ t \in [0,T]\}$$

визначається дією зосереджених в точках $(s_1,\ldots,s_M) \in S \subset S_0$ керуючих факторів $u_1,\ldots,u_M$. Будемо виходити з того, що в загальному випадку динаміка такого процесу визначається співвідношенням

$$y(s) = \int\limits_{S_0^T} G(s-s')u(s')\,ds', \tag{1}$$

де $G(s-s')$ — функція Гріна розглядуваного процесу, а $u(s)$ — функція зовнішніх динамічних збурень, які впливають на нього.

Враховуючи труднощі побудови функції $G(s-s')$ для реальних просторово-часових процесів, які протікають в замкнених областях, а також дискретний характер функції $u(s)$, розглянемо задачу ідентифікації перерізів $G_m(s) = G(s-s'_m)$ $(m=\overline{1,M})$ функції Гріна таких, щоб

$$y^{(j)}(s) = \sum_{m=1}^{M} G_m(s) u_m^{(j)} \qquad (j=\overline{1,N}), \tag{2}$$

де $u_m^{(j)}$ та $y^{(j)}(s)$ — спостереження за збурюючими зовнішньо-динамічними факторами та функцією стану системи, яка їм відповідає. Оскільки система (2) еквівалентна матричному рівнянню

$$\overline{G}(s)U = Y(s),$$

де

$$\overline{G}(s) = \mathrm{str}(G_m(s),\, m=\overline{1,M}), \quad Y(s) = \mathrm{str}(y^{(j)}(s),\, j=\overline{1,N}), \quad U = [U_m^{(j)}]_{m,j=1}^{m=M,j=N},$$

сформульовану задачу зведемо до знаходження

$$\overline{G}(s) = \arg \min_{\overline{G}(s)\in R^M} \int\limits_{S_0^T} \|U^T \overline{G}^T(s) - Y^T(s)\|^2 ds, \tag{3}$$

що є частинним випадком проблем, детально досліджених в [5, 9].

2. Розглянемо задачу (3), виходячи з [5, 9]. За умови, коли

$$\varepsilon^2 = \int\limits_{S_0^T} Y(s)(I - PP^+)Y^T(s)\, ds = 0, \tag{4}$$

де $P = U^T U$, задача (3), а отже і (2), має точний розв'язок

$$\overline{G}^T(s) = UP^+Y^T(s) + v(s) - UP^+U^T v(s), \qquad \forall v(s) \in R^M. \tag{5}$$

Зауважимо, що $v(x) \equiv 0$ при $\det UU^T > 0$. В іншому випадку (при $\varepsilon^2 > 0$) покращити

$$\min_{\overline{G}(s)} \int\limits_{S_0^T} \|G(s)U - Y(s)\|^2 ds = \varepsilon^2 \tag{6}$$

можна, замінивши лінійно залежний (якщо він є) рядок $u_{(p)}^T$ матриці

$$U = \mathrm{col}\big(u_{(i)}^T, i=\overline{1,M}\big)$$

лінійною комбінацією

$$\left[\sum_{k=2}^{k_*} c_k(s) u_{(p)}^{k\otimes}\right]^T,$$

в якій

$$u_{(p)}^{k\otimes} = u_{(p)} \underbrace{\otimes \ldots \otimes}_{k} u_{(p)} \tag{7}$$

(тут $\otimes$ — операція декартового добутку) такі, що

$$(I - U^+U)u_{(p)}^{k\otimes} > 0 \qquad (k = \overline{1, k_*}),$$

а k_* та $c_k(s)$ визначаються умовами

$$\begin{gathered} \operatorname{rank}(u_{(p)}^{2\otimes}, u_{(p)}^{3\otimes}, \ldots, u_{(p)}^{k_*\otimes}, u_{(p)}^{(k_*+1)\otimes}) = k_* - 1, \\ \sum_{k=2}^{k_*} c_k(s) u_{(p)}^{k\otimes} = Z(U)Y^T(s) \end{gathered} \tag{8}$$

при

$$Z(U) = I - U^+U. \tag{9}$$

За умови, коли

$$\int\limits_{S_0^T} Y(s)Z(U)Y^T(s)\,ds - \int\limits_{S_0^T} Y(s)Z(U)U_*U_*^+Z(U)Y^T(s)\,ds = 0, \tag{10}$$

де

$$U_* = (u_{(p)}^{2\otimes}, \ldots, u_{(p)}^{k_*\otimes}),$$

$$\operatorname{col}(c_k(s), k = \overline{2, k_*}) = U_*^+ Z(U)Y(s) + Z(U_*)v(s) \qquad \forall v(s) \in R^{(k_*-1)}$$

(при $\det U_*^T U_* > 0$ $v(s) \equiv 0$), а

$$\overline{G}^T(s) = \overline{U}_*(s)P_*^+Y^T(s) + w(s) - \overline{U}_*(s)P_*^+U_w \qquad \forall w(s) \in R^M,$$

де

$$\overline{U}_*(s) = \operatorname{col}\left(u_{(1)}^T, \ldots, u_{(p-1)}^T, \left(\sum_{k=2}^{k_*} c_k(s)u_{(p)}^{k\otimes}\right)^T, u_{(p+1)}^T, \ldots, u_{(M)}^T\right),$$

$$P_* = \int\limits_{S_0^T} \overline{U}_*^T(s)\overline{U}_*(s)\,ds, \qquad U_w = \int\limits_{S_0^T} \overline{U}_*^T(s)w(s)\,ds.$$

Для зменшення визначеної в (6) величини ε^2 при відсутності лінійно-залежних рядків матриці U останню замінимо на

$$\widetilde{U}_i(s) = \operatorname{col}\left(u_1^T, \ldots, u_{(i-1)}^T, \left[\sum_{k=1}^{k_*} c_k^{(i)}(s)u_{(i)}^{k\otimes}\right]^T, u^T_{(i+1),\ldots,}u_{(M)}^T\right) \tag{11}$$

послідовно для $i = \overline{1, M}$. Вектори $u_{(i)}^{k\otimes}$ $(k = \overline{1, k_*})$ при цьому визначимо, як і раніше, згідно з (7)–(9), а коефіцієнти-функції $c_k^{(i)}(s)$ — співвідношенням [5]

$$\mathrm{col}(c_k^{(i)}(s), k = \overline{1, k_*}) = D_i^+ Y(s),$$

в якому

$$D_i = Z(U_i)(u_{(p)}^{1\otimes} \vdots \ldots \vdots u_{(p)}^{k_*\otimes}),$$

$$Z(U_i) = Z(U) + \frac{q_i q_i^T}{\|q_i\|^2},$$

де q_i — i-стовпець матриці U^+.

При визначенні ж векторної функції $\overline{G}(s)$ зупинимося на $i = i_0$, при якому $i_0 = \arg \min\limits_{i=\overline{1,M}} \Phi(i)$, де

$$\Phi(i) = \int\limits_{S_0^T} Y(s)(Z(U_i) - D_i D_i^T) Y^T(s)\, ds.$$

При цьому

$$\overline{G}(s) = Y(s)[\widetilde{U}_i^T(s)]^+ - V(s) P_i^+ P_i + V(s),$$

де $V(s)$ — довільна інтегровна в S_0^T рядок-функція розмірності N,

$$P_i = \int\limits_{S_0^T} \widetilde{U}_i(s) \widetilde{U}_i^T(s)\, ds,$$

а

$$\varepsilon^2(i_0) = \int\limits_{S_0^T} Y(s)(I - \widetilde{U}_i^T(s)[\widetilde{U}_i^T(s)]^+) Y^T(s)\, ds.$$

При $\varepsilon^2(i_0) > 0$ процес перетворень (11) слід продовжити, зупинившись на

$$i_{\mathrm{opt}} = \arg \min_{i_0} \varepsilon^2(i_0).$$

Останнє означає, що точно або із середньоквадратичним наближенням модель розглядуваного просторово-часового процесу буде побудована у вигляді

$$\overline{G}(s) L(\overline{u}) = y(s), \tag{12}$$

де $y(s)$ — функція стану процесу; $\overline{G}(s)$ — визначена вище вектор-функція — переріз функції Гріна,

$$L(\overline{u}) = \mathrm{col}\left(u_1, \ldots, u_{i_{\mathrm{opt}}-1}, \left(\sum_{k=2}^{k_*} c_k(s) u_{i_{\mathrm{opt}}}^k\right), u_{i_{\mathrm{opt}}+1}, \ldots, u_M\right), \tag{13}$$

а $\overline{u} = (u_i,\ i = \overline{1, M})^T$ — вектор зосереджених в точках s_i $(i = \overline{1, M})$ керуючих зовнішньо-динамічних факторів.

3. Виходячи з моделі (12), розглянемо задачу керування досліджуваним тут просторово-часовим процесом з переводу його стану $y(s)$ в окіл, визначений функцією $Y(s)$ так, щоб

$$\int\limits_{S_0^T} (y(s) - Y(s))^2 ds \to \min_{\overline{u}}. \tag{14}$$

З урахуванням (12) робимо висновок, що розв'язком задачі (14) (при $L(\overline{u}) \equiv \overline{u}$) може бути

$$\overline{u} \in \Omega_u = \{u \in R^M : u = P_u^+(G_y - P_u v) + v,\ \forall v \in R^M\}, \tag{15}$$

де

$$P_u = \int\limits_{S_o^T} \overline{G}^T(s)\overline{G}(s)\, ds, \tag{16}$$

$$G_y = \int\limits_{S_0^T} \overline{G}^T(s) Y(s)\, ds. \tag{17}$$

Розв'язок (15) може бути однозначним ($v \equiv 0$) при $\det P_u > 0$.

Точність одержаного розв'язку визначатиметься величиною

$$\varepsilon_u^2 = \min_{\overline{u} \in \Omega_u} \int\limits_{S_0^T} (y(s) - Y(s))^2 ds = \int\limits_{S_0^T} Y^2(s)\, ds - G_y^T P_u^+ G_y. \tag{18}$$

Слід зауважити, що величину ε_u^2 можна зменшити, обравши $L(\overline{u})$ згідно з (13).

4. Для ілюстрації отриманих результатів розглянемо процес, функція $y(s)$ стану якого в просторово-часовій області

$$S_0^T = \{s = (x, t) \colon x \in [0; 1], t \in [0; 1]\} \tag{19}$$

описується рівнянням [11]

$$\frac{\partial y}{\partial t} - a\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - b\frac{\partial y}{\partial x} + cy = u. \tag{20}$$

Для ілюстрації було покладено $a = b = c = 1$.

При спостережуваних

$$y^{(1)}(s) = x^2 t - \frac{\sin(t)}{5}, \qquad y^{(2)}(s) = x^2 t - \frac{\cos(10x)}{10},$$

$$y^{(3)}(s) = x^2 t + \frac{2\sin(tx)}{11}, \qquad y^{(4)}(s) = x^2 t + \frac{\sin(8t)}{10},$$

$$y^{(5)}(s) = x^2 t - 0{,}1t, \qquad y^{(6)}(s) = x^2 t - \exp(0{,}1t),$$

$$y^{(7)}(s) = x^2 t + \frac{\cos(5x)}{10}, \qquad y^{(8)}(s) = x^2 t + \frac{\sin(15t)}{10},$$

$$y^{(9)}(s) = x^2(\mathrm{t} - 1), \qquad y^{(10)}(s) = x^2 t + \frac{\sin(3t)}{10}$$

була побудована вектор-функція $\overline{G}(s)$, а за нею — і стан $y_M(s)$ системи (1), який відповідає

$$u(s) = x^2 - 2t - 2tx + x^2 t,$$

"спостережуваному" з кроком $\Delta x = \Delta t = 0{,}1$ функціями

$$u^{(1)}(s) = x^2 - \frac{1}{5}\cos(t) - 2t - 2tx + x^2 t - \frac{1}{5}\sin(t),$$

$$u^{(2)}(s) = x^2 - 2t - \frac{101}{10}\cos(10x) - 2tx - \sin(10x) + x^2 t,$$

$$u^{(3)}(s) = x^2 + \frac{2}{11}x\cos(tx) - 2t + \frac{2}{11}t^2\sin(tx) - 2tx - \frac{2}{11}t\cos(tx) + x^2 t + \frac{2}{11}\sin(tx),$$

$$u^{(4)}(s) = x^2 + \frac{4}{5}\cos(8t) - 2t - 2tx + x^2 t + \frac{1}{10}\sin(8t),$$

$$u^{(5)}(s) = x^2 - 0{,}1 - 2,1t - 2tx + x^2 t,$$

$$u^{(6)}(s) = x^2 - 1{,}1e^{0{,}1t} - 2t - 2tx + x^2 t,$$

$$u^{(7)}(s) = x^2 - 2t + \frac{13}{5}\cos(5x) - 2tx + \frac{1}{2}\sin(5x) + x^2 t,$$

$$u^{(8)}(s) = x^2 + \frac{3}{2}\cos(15t) - 2t - 2tx + x^2 t + \frac{1}{10}\sin(15t),$$

$$u^{(9)}(s) = x^2 - 2t + 2 - 2x(t-1) + x^2(t-1),$$

$$u^{(10)}(s) = x^2 + \frac{3}{10}\cos(3t) - 2t - 2tx + x^2 t + \frac{1}{10}\sin(3t).$$

Середньоквадратичне відхилення отриманого розв'язку від точного значення не перевищувало 3%. Якісна картина розподілу відхилення $\varepsilon(s) = |y(s) - y_M(s)|$ наведена на рис. 1.

Також було розв'язано задачу з переводу системи (15) в окіл

$$Y(s) = x^2 - 2t - 2tx + x^2 t.$$

Не наводячи одержаний вектор керування, зауважимо, що отриманий згідно з (12) з його використанням стан досліджуваної системи матиме вигляд

$$y(s) = 1{,}70641356x^2 t - 0{,}003079079823\cos(10x) - 2{,}9699541\sin(t) + 0{,}183548886\sin(3t) -$$
$$- 0{,}00554277643\sin(15t) + 0{,}48887311t - 0{,}0132359259\sin(8t) - 1{,}819147536\sin(tx) +$$
$$+ 0{,}0060645071\cos(5x) - 0{,}0115479e^{0{,}1t} - 1{,}06333637x^2(t-1).$$

При цьому середньоквадратичне відхилення одержаного значення від бажаного становить

$$\int\limits_{S_0^T} (y(s) - Y(s))^2 ds \approx 0{,}3596387873 \cdot 10^{-5}.$$

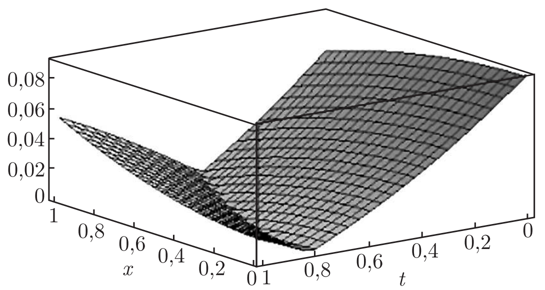

Рис. 1

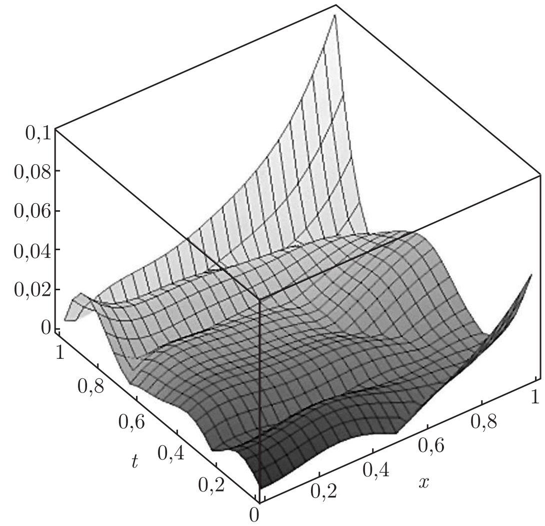

Рис. 2

Розподіл абсолютних відхилень $\varepsilon_2(s) = |y(s) - Y(s)|$ наведений на рис. 2.

1. *Кириченко Н. Ф., Стоян В. А.* Аналитическое представление матричных и интегральных линейных преобразований // Кибернетика и системн. анализ. – 1998. – № 3. – С. 90–104.
2. *Гантмахер Ф.* Теория матриц. – Москва: Наука, 1967. – 287 с.
3. *Альберт А.* Регрессия, псевдоинверсия, рекуррентное оценивание. – Москва: Наука, 1977. – 305 с.
4. *Скопецький В. В., Стоян В. А., Кривонос Ю. Г.* Математичне моделювання прямих та обернених задач динаміки систем з розподіленими параметрами. – Київ: Наук. думка, 2001. – 361 с.
5. *Стоян В. А.* Моделювання та ідентифікація динаміки систем із розподіленими параметрами. – Київ: ВПЦ "Київ. ун-т", 2004. – 184 с.
6. *Скопецький В. В., Стоян В. А., Зваридчук В. Б.* Идентификационно-псевдоинверсный поход к решению прямых и обратных задач динамики систем с распределенными параметрами // Кибернетика и системн. анализ. – 2004. – № 4. – С. 32–51.
7. *Кириченко Н. Ф., Лепеха Н. П.* Возмущения псевдообратных и проекционных матриц и их применение к идентификации линейных и нелинейных зависимостей // Пробл. управления и информатики. – 2001. – № 1. – С. 6–22.
8. *Стоян В. А.* О задаче идентификации матричноинтегрирующих систем // Кибернетика и системн. анализ. – 2003. – № 5. – С. 152–164.
9. *Скопецкий В. В., Стоян В. А.* О задаче идентификации матричнофункциональных систем // Там же. – 2005. – № 5. – С. 99–110.
10. *Скопецький В. В., Стоян В. А.* Про задачу ідентифікації та керування дискретно спостережуваним просторово-часовим процесом // Доп. НАН України. – 2006. – № 8. – С. 102–108.
11. *Гладкий А. В., Скопецький В. В.* Методи числового моделювання екологічних процесів. – Київ: ІВЦ "Політехніка" НУТУ "КПІ", 2005. – 148 с.

Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова
НАН України, Київ
Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 21.09.2006