УДК 517.95+517.55

П. І. Каленюк, З. М. Нитребич

Про дію диференціального виразу нескінченного порядку в класах цілих функцій багатьох комплексних змінних

(Представлено членом-кореспондентом НАН України Б. Й. Пташником)

We investigate the action of the partial differential expression $L(\partial/\partial z)$ of infinite order generally with constant coefficients, whose symbol is an entire function $L(\lambda)$ of several complex variables, onto an entire function $f(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$. We specify the conditions on growth orders by the set of variables of the entire functions $L(\lambda)$ and $f(z)$ providing the expression's action to be correct. We clarify also the growth order of the result of the expression's action as an entire function by the set of variables.

Нехай задана ціла функція $F(z) = \sum\limits_{|s|\geqslant 0} c_s z^s$, де $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $|s| = s_1 + s_2 + \cdots + s_n$, $z^s = z_1^{s_1} z_2^{s_2} \ldots z_n^{s_n}$.

Порядок ρ за сукупністю змінних цілої функції $F(z)$ та її тип при порядку ρ обчислюють за формулами $\rho = \overline{\lim\limits_{r\to\infty}}(\ln\ln M(r)/\ln r)$, $\sigma = \overline{\lim\limits_{r\to\infty}}(\ln M(r)/r^\rho)$, де $M(r) = \max\limits_{z\in D_r} |F(z)|$, r — деякий параметр, пов'язаний з областю D_r, а за область D_r у працях [1–4] використовують поліциліндр, гіперкулю, гіперсферу та інші області. У праці [1] доведено, що порядок ρ цілої функції за сукупністю змінних не залежить від області D_r, якою вичерпують $\mathbb{C}^n$. Для визначення порядку та типу цілої функції за сукупністю змінних (надалі для простоти порядок та тип) візьмемо за область D_r основу поліциліндра [2, 4] — $D_r = \{z \in \mathbb{C}^n\colon |z_1| = r, |z_2| = r, \ldots, |z_n| = r\}$.

Нехай порядок цілої функції $F(z)$ дорівнює ρ, а тип σ скінченний. Тоді для довільного $k > \sigma$ виконується нерівність $M(r) < e^{kr^\rho}$, $r > R(k)$. За нерівністю Коші [5, с. 32] маємо

$$|c_s| < \frac{e^{kr^\rho}}{r^{|s|}}, \qquad r > R(k). \tag{1}$$

Оскільки функція $e^{kr^\rho}/r^{|s|}$ має мінімум $(e\rho k/|s|)^{|s|/\rho}$ при $r_0 = (|s|/k\rho)^{1/\rho}$, то існує номер $N = N(k)$ такий, що $\forall |s| > N\colon (|s|/k\rho)^{1/\rho} > R(k)$. Поклавши в (1) $r = r_0$, одержимо

$$|c_s| < \left(\frac{e\rho k}{|s|}\right)^{|s|/\rho}, \qquad |s| > N. \tag{2}$$

Зауважимо, що за коефіцієнтами c_s степеневого ряду порядок ρ за сукупністю змінних цілої функції обчислюється за формулою [2]

$$\rho = \overline{\lim_{|s|\to\infty}} \frac{\ln|s|}{\ln \dfrac{1}{\sqrt[|s|]{|c_s|}}}.$$

Формулювання проблеми. На основі узагальненої схеми відокремлення змінних авторами розроблено диференціально-символьний метод [6] розв'язування задач для диференціальних рівнянь із частинними похідними з крайовими умовами за однією виділеною змінною. Відповідно до цього методу розв'язки задач, зокрема задачі Коші, зображаються у вигляді дій диференціальних виразів нескінченного порядку на деякі цілі функції параметрів. Наприклад, розв'язок задачі Коші для рівняння теплопровідності

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\right) U(t,x) = 0, \qquad U(0,x) = \varphi(x)$$

за допомогою диференціально-символьного методу зображається у вигляді

$$U(t,x) = \varphi\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\{e^{a^2|\nu|^2 t + \nu \cdot x}\}\bigg|_{\nu=0},$$

де $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$, $|\nu|^2 = \nu_1^2 + \nu_2^2 + \cdots + \nu_n^2$, $\nu x = \sum\limits_{k=1}^{n} \nu_k x_k$. Як бачимо, у фігурних дужках є ціла стосовно ν_1, $\nu_2, \ldots, \nu_n$ функція. У цьому зв'язку актуальним є з'ясування порядків заданих цілих функцій за сукупністю змінних та встановлення умов на початкові функції, щоб дія диференціальних виразів на цілі функції була коректною.

Нехай задано дві цілі функції

$$L(\lambda) = \sum_{|s| \geqslant 0} a_s \lambda^s, \qquad f(z) = \sum_{|s| \geqslant 0} b_s z^s, \qquad z \in \mathbb{C}^n,$$

причому функція $f(z)$ має порядок не вище за p, де $1 < p < \infty$.

Припустимо, що ціла функція $L(\lambda)$ є символом виразу $L(\partial/\partial z)$ загалом нескінченного порядку, тобто вираз $L(\partial/\partial z)$ одержується з $L(\lambda)$ заміною λ на $\partial/\partial z$. Розглянемо дію диференціального виразу $L(\partial/\partial z)$ на функцію $f(z)$, а саме функцію

$$\sum_{|s| \geqslant 0} a_s \frac{\partial^{|s|} f(z)}{\partial z_1^{s_1} \partial z_2^{s_2} \cdots \partial z_n^{s_n}}. \tag{3}$$

Вивчаються такі питання: 1) яким повинен бути порядок цілої функції $L(\lambda)$, щоб функція (3) була цілою; 2) яким буде порядок цілої функції (3).

Для функції однієї комплексної змінної ($n = 1$) відповіді на ці питання відомі (див. теорему в [7, с. 73]). У даній роботі доведемо аналог цієї теореми для функцій багатьох змінних.

Основні результати.

Лема 1. *Для довільних r, $s \in \mathbb{N}^n$ виконується нерівність*

$$\frac{(r+s)!}{s!} \leqslant 2 \frac{(|s| + |r|)^{|s|+|r|+1/2}}{e^{|r|} |s|^{|s|+1/2}},$$

де $s! = s_1! s_2! \cdots s_n!$, $(s+r)! = (s_1 + r_1)!(s_2 + r_2)! \cdots (s_n + r_n)!$

Доведення.

$$\frac{(r+s)!}{s!} = \prod_{k=1}^{n} \left(\prod_{j=1}^{r_k} (s_k + j)\right) \leqslant \prod_{k=1}^{n} \left(\prod_{j=1}^{r_k} (|s| + j)\right) \leqslant \prod_{j=1}^{|r|} (|s| + j) = \frac{(|s| + |r|)!}{(|s|)!}.$$

Використовуючи формулу Стірлінга, отримуємо

$$\frac{(|s|+|r|)!}{(|s|)!} \leqslant \frac{\sqrt{2\pi(|s|+|r|)}}{\sqrt{2\pi|s|}} \frac{(|s|+|r|)^{|s|+|r|}e^{-|s|-|r|+1/(12(|s|+|r|))}}{|s|^{|s|}e^{-|s|}} \leqslant 2\frac{(|s|+|r|)^{|s|+|r|+1/2}}{e^{|r|}|s|^{|s|+1/2}}.$$

Лему доведено.

Лема 2. *Для довільних r, $s \in \mathbb{N}^n$ виконується нерівність*

$$\left(\frac{(|s|+|r|)^{|r|+|s|}}{|r|^{|r|}|s|^{|s|}}\right) \leqslant e^{|r|+|s|}.$$

Доведення. Запишемо ліву частину нерівності у вигляді

$$\left(\frac{(|s|+|r|)^{|r|+|s|}}{|r|^{|r|}|s|^{|s|}}\right) = \left(1+\frac{|s|}{|r|}\right)^{|r|}\left(1+\frac{|r|}{|s|}\right)^{|s|}.$$

Оскільки $1+|s|/|r| < e^{|s|/|r|}$, то маємо $(1+|s|/|r|)^{|r|} < e^{|s|}$. Аналогічно, $(1+|r|/|s|)^{|s|} < e^{|r|}$. Лему доведено.

Теорема 1. *Нехай $f(z)$ є цілою функцією порядку нижче за p, де $1 < p < \infty$, або порядку p, причому скінченного типу, а порядок цілої функції $L(\lambda)$ менший за q або дорівнює q, але скінченного типу, тоді функція* (3) *є цілою функцією порядку нижче за p або порядку p, але скінченного типу, якщо виконується умова $1/p + 1/q > 1$.*

Доведення. У результаті дії диференціального виразу $L(\partial/\partial z)$ на функцію $f(z)$ одержимо ряд $\sum\limits_{|s|\geqslant 0} c_s z^s$, де $c_s = \sum\limits_{|r|\geqslant 0} a_r b_{r+s}\frac{(s+r)!}{s!}$, $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, a_s та b_s — коефіцієнти степеневих рядів функцій $L(\lambda)$, $f(z)$ відповідно.

Запишемо оцінки для коефіцієнтів степеневих рядів $L(\lambda)$, $f(z)$ у припущенні, що $L(\lambda)$, $f(z)$ — цілі функції скінченних порядків нижче за q та нижче за p або порядків q та p, але скінченних типів, менших за $\sigma_2 > 0$ та $\sigma_1 > 0$ відповідно:

(а) $\exists k_0 \in \mathbb{N}\ \forall |r| > k_0\ |a_r| < \left(\dfrac{\sigma_2 eq}{|r|}\right)^{|r|/q}$,

(б) $\exists s_0 \in \mathbb{N}\ \forall |r+s| > s_0\ |b_{r+s}| < \left(\dfrac{\sigma_1 ep}{|r|+|s|}\right)^{(|r|+|s|)/p}$.

Позначимо $N_0 = \max\{k_0, s_0, n-1\}$ і оцінимо $|c_s|$ для $|s| > N_0$.

Запишемо нерівність

$$|c_s| \leqslant S_1 + S_2, \tag{4}$$

де $S_1 = \sum\limits_{|r|\leqslant N_0} |a_r||b_{r+s}|\frac{(s+r)!}{s!}$, $S_2 = \sum\limits_{|r|>N_0} |a_r||b_{r+s}|\frac{(s+r)!}{s!}$.

За допомогою леми 1 та нерівності (б) зробимо оцінку суми S_1 в нерівності (4):

$$S_1 < 2\sum_{|r|\leqslant N_0} |a_r|\left(\frac{\sigma_1 ep}{|r|+|s|}\right)^{(|r|+|s|)/p} \sqrt{\frac{|s|+|r|}{|s|}}\frac{(|s|+|r|)^{|s|+|r|}}{e^{|r|}|s|^{|s|}} =$$

$$= 2\left(\frac{\sigma_1 ep}{|s|}\right)^{|s|/p} \sum_{|r|\leqslant N_0} |a_r|(\sigma_1 p)^{|r|/p}\sqrt{\frac{|s|+|r|}{|s|}}\frac{(|s|+|r|)^{(|s|+|r|)(1-1/p)}}{e^{|r|(1-1/p)}|s|^{|s|(1-1/p)}} \leqslant$$

$$\leqslant 2\biggl(\frac{\sigma_1 ep}{|s|}\biggr)^{|s|/p}\sum_{|r|\leqslant N_0}|a_r|(\sigma_1 p)^{|r|/p}\sqrt{\frac{|r|}{N_0}+1}\,\frac{|s|^{|r|(1-1/p)}\Bigl(1+\dfrac{|r|}{|s|}\Bigr)^{(|s|+|r|)(1-1/p)}}{e^{|r|(1-1/p)}}\leqslant$$

$$\leqslant 2\biggl(\frac{\sigma_1 ep}{|s|}\biggr)^{|s|/p}\sum_{|r|\leqslant N_0}|a_r|(\sigma_1 p)^{|r|/p}\sqrt{\frac{|r|}{N_0}+1}\,\frac{|s|^{N_0(1-1/p)}e^{|r|(|r|/N_0+1)(1-1/p)}}{e^{|r|(1-1/p)}}.$$

Отже,

$$S_1<\biggl(\frac{\sigma_1 ep}{|s|}\biggr)^{|s|/p}|s|^{N_0(1-1/p)}D_1,\qquad |s|>N_0, \tag{5}$$

де $D_1 = 2\sqrt{2}\sum\limits_{|r|\leqslant N_0}|a_r|(\sigma_1 p)^{|r|/p}\cdot e^{(|r|^2/N_0)(1-1/p)}$.

Оцінимо тепер другу суму S_2 в нерівності (4), використовуючи нерівності (а), (б), а також лему 1:

$$S_2<2\sum_{|r|>N_0}\biggl(\frac{\sigma_2 eq}{|r|}\biggr)^{|r|/q}\biggl(\frac{\sigma_1 ep}{|r|+|s|}\biggr)^{(|r|+|s|)/p}\frac{(|s|+|r|)^{|s|+|r|}}{e^{|r|}|s|^{|s|}}\sqrt{\frac{|s|+|r|}{|s|}}=$$

$$=2\sum_{|r|>N_0}\frac{[(\sigma_2 q)^{1/q}(\sigma_1 p)^{1/p}]^{|r|}(\sigma_1 ep)^{|s|/p}e^{|r|/q}e^{|r|/p}}{|r|^{|r|/q}(|r|+|s|)^{(|r|+|s|)/p}}\,\frac{(|s|+|r|)^{|s|+|r|}}{e^{|r|}|s|^{|s|}}\sqrt{\frac{|s|+|r|}{|s|}}=$$

$$=2\sum_{|r|>N_0}\frac{[(\sigma_2 q)^{1/q}(\sigma_1 p)^{1/p}]^{|r|}(\sigma_1 ep)^{|s|/p}e^{|r|(1/p+1/q-1)}(|s|+|r|)^{(|r|+|s|)(1-1/p)}}{|r|^{|r|/q}|s|^{|s|}}\sqrt{\frac{|s|+|r|}{|s|}}=$$

$$=2\biggl(\frac{\sigma_1 ep}{|s|}\biggr)^{|s|/p}\sum_{|r|>N_0}\biggl(\frac{(\sigma_2 q)^{1/q}(\sigma_1 p)^{1/p}}{e^{1-1/p-1/q}}\biggr)^{|r|}\frac{|s|^{|s|/p}(|s|+|r|)^{(|r|+|s|)(1-1/p)}}{|r|^{|r|/q}|s|^{|s|}}\sqrt{\frac{|s|+|r|}{|s|}}=$$

$$=2\biggl(\frac{\sigma_1 ep}{|s|}\biggr)^{|s|/p}\sum_{|r|>N_0}\biggl(\frac{(\sigma_2 q)^{1/q}(\sigma_1 p)^{1/p}}{(e/|r|)^{1-1/p-1/q}}\biggr)^{|r|}\frac{(|s|+|r|)^{(|r|+|s|)(1-1/p)}}{|r|^{|r|(1-1/p)}|s|^{|s|(1-1/p)}}\sqrt{\frac{|s|+|r|}{|s|}}=$$

$$=2\biggl(\frac{\sigma_1 ep}{|s|}\biggr)^{|s|/p}\sum_{|r|>N_0}\biggl(\frac{(\sigma_2 q)^{1/q}(\sigma_1 p)^{1/p}}{(e/|r|)^{1-1/p-1/q}}\biggr)^{|r|}\biggl(\frac{(|s|+|r|)^{(|r|+|s|)}}{|r|^{|r|}|s|^{|s|}}\biggr)^{1-1/p}\sqrt{\frac{|s|+|r|}{|s|}}.$$

Використавши тепер лему 2, одержимо

$$S_2<2\biggl(\frac{\sigma_1 ep}{|s|}\biggr)^{|s|/p}\sum_{|r|>N_0}\biggl(\frac{(\sigma_2 q)^{1/q}(\sigma_1 p)^{1/p}}{e^{1-1/p-1/q}}\biggr)^{|r|}|r|^{|r|(1-1/p-1/q)}e^{(|r|+|s|)(1-1/p)}\sqrt{\frac{|s|+|r|}{|s|}}\leqslant$$

$$\leqslant 2e^{|s|(1-1/p)}\biggl(\frac{\sigma_1 ep}{|s|}\biggr)^{|s|/p}\sum_{|r|>N_0}\biggl(\frac{(\sigma_2 q)^{1/q}(\sigma_1 p)^{1/p}}{e^{1-1/p-1/q}}\biggr)^{|r|}|r|^{|r|(1-1/p-1/q)}e^{|r|(1-1/p)}\sqrt{\frac{N_0+|r|}{N_0}}.$$

Отже,

$$S_2 < e^{|s|(1-1/p)} \left(\frac{\sigma_1 ep}{|s|}\right)^{|s|/p} D_2, \tag{6}$$

де

$$D_2 = 2 \sum_{|r|>N_0} \left(\frac{(\sigma_2 q)^{1/q} (\sigma_1 p)^{1/p}}{e^{1-1/p-1/q}}\right)^{|r|} |r|^{|r|(1-1/p-1/q)} e^{|r|(1-1/p)} \sqrt{\frac{N_0 + |r|}{N_0}}.$$

Перейдемо від n-кратного ряду до однократного, позначивши $|r| = k$. Оскільки число мультиіндексів $r \in \mathbb{Z}_+^n$, для яких $|r| = k$, де $k \in \mathbb{N}$, дорівнює $C_{n-1+k}^{n-1} = (n-1+k)!/((n-1)!k!)$, маємо

$$D_2 = 2 \sum_{k>N_0} [(\sigma_2 q)^{1/q} (\sigma_1 p)^{1/p}]^k \left(\frac{k}{e}\right)^{k(1-1/p-1/q)} e^{k(1-1/p)} C_{n-1+k}^{n-1} \sqrt{\frac{k}{N_0} + 1}.$$

Оскільки $k > N_0$, то $k > n-1$ і тому

$$C_{n-1+k}^{n-1} = \frac{1}{(n-1)!} k^{n-1} \prod_{j=1}^{n-1} \left(1 + \frac{j}{k}\right) \leqslant \frac{2^{n-1}}{(n-1)!} k^{n-1}.$$

Отже,

$$D_2 \leqslant \frac{2^n}{(n-1)!} \sum_{k>N_0} [(\sigma_2 q)^{1/q} (\sigma_1 p)^{1/p}]^k \left(\frac{k}{e}\right)^{k(1-1/p-1/q)} e^{k(1-1/p)} k^{n-1} \sqrt{\frac{k}{N_0} + 1}.$$

Розглянемо числовий ряд

$$\sum_{k>N_0} [(\sigma_2 q)^{1/q} (\sigma_1 p)^{1/p}]^k \left(\frac{k}{e}\right)^{k(1-1/p-1/q)} e^{k(1-1/p)} k^{n-1} \sqrt{\frac{k}{N_0} + 1}. \tag{7}$$

За ознакою Коші числовий ряд (7) є збіжним, якщо $1/p + 1/q > 1$.

Нерівність (4) з урахуванням (5) та (6) набуває вигляду

$$|c_s| \leqslant S_1 + S_2 < \left(\frac{\sigma_1 ep}{|s|}\right)^{|s|/p} \Big(D_1 |s|^{N_0(1-1/p)} + e^{|s|(1-1/p)} D_2\Big), \qquad |s| > N_0. \tag{8}$$

Нерівність (8) відповідно до формули для ρ за коефіцієнтами c_s означає, що функція (3) є цілою функцією порядку нижче за p або порядку p, але скінченного типу, причому не вище за σ_1. Теорему доведено.

Сформулюємо та доведемо аналогічний результат, але з урахуванням лише порядків цілих функцій без умови скінченності типів.

Теорема 2. *Нехай $f(z)$ — ціла функція порядку не вище за $p > 1$, а $L(\lambda)$ — ціла функція порядку не вище за q, де $1/p + 1/q > 1$. Тоді функція (3) є цілою функцією порядку не вище за p.*

Доведення. Якщо $f(z)$ та $L(\lambda)$ — цілі функції не вище вказаних порядків і скінченних типів, то, очевидно, теорема 2 випливає з теореми 1. Якщо ж хоча б одна з цілих функцій

$f(z)$ чи $L(\lambda)$ має при порядках p та q нескінченний тип, то за умови виконання нерівності $1/p+1/q>1$ знайдуться $\varepsilon_1>0$ та $\varepsilon_2>0$ такі, що виконуватиметься нерівність $1/(p+$ $+\varepsilon_1)+1/(q+\varepsilon_2)>1$. Тоді існують $R>0$, $k_1>0$ та $k_2>0$ такі, що $M_1(r)<e^{k_1 r^{p+\varepsilon_1}}$, $M_2(r)<e^{k_2 r^{q+\varepsilon_2}}$, $r>R$, де $M_1(r)=\max\limits_{z\in D_r}|f(z)|$, $M_2(r)=\max\limits_{z\in D_r}|L(z)|$. Тому коефіцієнти a_r та b_{r+s} степеневих рядів для функцій $f(z)$ та $L(\lambda)$ мають аналогічні до (а) та (б) оцінки. Далі доведення проводиться подібно до доведення теореми 1. Теорему доведено.

1. *Гольдберг А. А.* О формулах для определения порядка и типа целых функций многих переменных // Докл. и сообщ. Ужгород. ун-та. Сер. физ.-мат. наук. – 1961. – № 4. – С. 101–103.
2. *Еремин С. А.* О целых функциях двух переменных // Укр. мат. журн. – 1957. – **9**, № 1. – С. 30–43.
3. *Маергойз Л. С.* К вопросу о связях между различными определениями порядка и типа целых функций многих комплексных переменных // Сиб. мат. журн. – 1966. – **7**, № 6. – С. 1268–1292.
4. *Темляков А. А.* Целые функции комплексных переменных // Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та. – 1954. – **20**. – С. 7–16.
5. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. Ч. 2. Функции нескольких переменных. – Москва: Наука, 1985. – 464 с.
6. *Каленюк П. І., Нитребич З. М.* Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод. – Львів: Вид-во нац. ун-ту “Львів. політехніка”, 2002. – 292 с.
7. *Леонтьев А. Ф.* Обобщения рядов экспонент. – Москва: Наука, 1981. – 320 с.

Національний університет
“Львівська політехніка”

Надійшло до редакції 16.11.2006

УДК 512

Ю. Г. Леонов

Об оценке снизу роста одной смешанной группы автоморфизмов деревьев

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Н. А. Перестюком)

The lower bound of the growth for one infinite group of automorphisms of a regular tree is given.

Рост конечно порожденных бесконечных групп является одной из важнейших характеристик, изучаемой в аналитической теории групп.

Напомним, что функция роста конечно порожденной группы G с системой порождающих S определяется соотношением

$$\gamma(n)=\#\{g\in G;\ l_S(g)\leqslant n\},$$

где $l_S(g)$ — длина элемента g относительно S.

Будем говорить, что функция $f_1(n)$ растет не быстрее, чем $f_2(n)$: $f_1(n)\preceq f_2(n)$, если найдется $c>0$ такое, что $f_1(n)\leqslant f_2(cn)$, для любых $n\in\mathbb{N}$. Если $f_1(n)\preceq f_2(n)$ и $f_2(n)\preceq f_1(n)$, то функции эквивалентны: $f_1(n)\sim f_2(n)$. Функции роста одной и той же конечно порожденной группы при различных конечных системах порождающих эквивалентны.