Лемма 3. *Жесткий стабилизатор группы G любого уровня является подгруппой конечного индекса*

$$|G/\operatorname*{Rist}_G(n)| < \infty.$$

Из последнего утверждения следует, что мощность множества $F(n)$ можно оценить снизу: $|F(n)| \geqslant R^{4^n}$, где $R \geqslant 2$ — некоторая константа. По определению, количество элементов длины $\leqslant r(n)$ не меньше, чем $|F(n)|$. Отсюда имеем неравенство $\gamma_G(r(n)) \geqslant R^{4^n}$. Принимая во внимание неравенство (1), легко получить утверждение теоремы.

Заметим, что данный метод оценки снизу роста самоподобных групп может быть применен ко многим известным самоподобным группам. Для большинства таких групп верны аналоги лемм 1 и 3. Однако наибольшая сложность состоит в комбинаторном утверждении леммы 2.

1. *Gromov M.* Groups of polynomial growth and expanding maps // Publ. Math. IHES. – 1981. – **53**. – P. 53–73.
2. *Григорчук Р. И.* Степени роста конечно-порожденных групп и теория инвариантных средних // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1984. – № 5. – С. 939–985.
3. *Григорчук Р. И.* О ряде Гильберта–Пуанкаре градуированных алгебр, ассоциированных с группами // Мат. сб. – 1989. – **180**, № 2. – С. 207–225.
4. *Григорчук Р. И.* К проблеме Бернсайда о периодических группах // Функц. анализ и его приложения. – 1980. – **14**, вып. 1. – С. 53–54.
5. *Леонов Ю. Г.* Об оценке снизу роста 3-порожденной 2-группы // Мат. сб. – 2001. – **192**, вып. 11. – С. 77–92.
6. *Гупта Н., Сидки С.* Some infinite p-groups // Алгебра и логика. – 1983. – **22**, № 5. – С. 584–589.
7. *Леонов Ю. Г.* Нижняя оценка функции роста p-групп Гупты–Сидки // Укр. мат. вестн. – 2005. – **2**, № 1. – С. 71–78.

Одесская национальная академия связи им. А. С. Попова

Поступило в редакцию 25.10.2006

УДК 519.6

О. М. Литвин

Інтерполювання звичайних диференціальних операторів

(Представлено академіком НАН України І. В. Сергієнком)

Basic statements of the theory of the approximation of ordinary differential operators by other ordinary differential operators are given. Approximated and approximating operators are equal on a given system of functions (functional knots).

1. Постановка проблеми. Теорія наближення функцій однієї та багатьох змінних включає в себе, як важливий частинний випадок, теорію інтерполювання. Оператори $L_n u(x)$ інтерполювання функцій $u(x)$ відновлюють (взагалі кажучи, наближено) $u(x)$ між заданими точками $x_0, x_1, \ldots, x_n$, використовуючи значення функції $u(x)$ або (у більш загальному випадку) деякої системи операторів (найчастіше використовуються диференціальні та інтегро-диференціальні оператори) від $u(x)$ у вказаних точках $B_{k,s}u(x_k) = \gamma_{k,s}$, $0 \leqslant k \leqslant n$; $0 \leqslant s \leqslant \rho_k - 1$; $\sum\limits_{k=0}^{n} \rho_k = M$. При цьому вимагається, щоб наближуючий (інтерполяційний) оператор $L_n u(x)$ мав ті ж самі властивості у вказаних точках, що і наближувана функція $B_{k,s}L_n u(x_k) = \gamma_{k,s}$, $0 \leqslant k \leqslant n$; $0 \leqslant s \leqslant \rho_k - 1$. Для функцій двох і більше змінних поняття інтерполювання знайшло своє узагальнення у вигляді операторів інтерлінації та інтерфлетації, у яких інформація про наближувану функцію задається на системі ліній або поверхонь (якщо змінних більше двох) [1, 2].

У даній роботі розв'язується така задача. Деякий звичайний диференціальний оператор $A\colon U \to \Gamma$ (взагалі кажучи, невідомий) задається інтерполяційними даними $Au_\beta(x) = \gamma_\beta(x)$, $0 \leqslant \beta \leqslant n$, де функціональні вузли $u_\beta(x) \in U$, $0 \leqslant \beta \leqslant n$ і функції $\gamma_\beta(x) \in \Gamma$, $0 \leqslant \beta \leqslant n$, вважаються заданими елементами деяких функціональних просторів U, Γ відповідно. Треба побудувати за допомогою цієї інформації інший диференціальний оператор (лінійний або нелінійний), який мав би ті ж інтерполяційні властивості.

Ми будемо пов'язувати з терміном "теорія інтерполювання операторів" теорію наближення операторів шляхом розв'язання такої основної задачі. Для заданого оператора $Au(x)$ побудувати наближуючий оператор $A_n u(x)$ з властивостями $A_n u_\beta(x) = \gamma_\beta(x) := Au_\beta(x)$, $0 \leqslant \beta \leqslant n$. Деякі важливі результати з побудови поліноміальних наближуючих операторів у вигляді операторних поліномів P_n степеня n, визначених на множині функцій $u \in X$ із значеннями у просторі Y (X та Y — деякі лінійні простори, наприклад, гільбертові), наведені в працях [3–8].

Під P_n розуміється оператор

$$P_n u = \sum_{k=0}^{n} L_k u^k,$$

де $L_0 u^0 = L_0 \in Y$, $L_k u^k = L_k(\underbrace{u, u, \ldots, u}_{k})$, $k = \overline{1,n}$ — k-й операторний степінь, отриманий з полілінійного симетричного оператора $L_k(v_1, v_2, \ldots, v_k)\colon X^k \to Y$, при $v_1 = \cdots = v_k = u$, $v_i \in X$, $i = \overline{1,n}$. Для деякого оператора A треба знайти такий операторний поліном P_n, який задовольняє інтерполяційні умови $P_n(u_\beta(x)) = F(u_\beta(x))$, $1 \leqslant \beta \leqslant m$, де $\{u_\beta(x)\}_{\beta=1}^{m}$ — задана система вузлів $u_\beta(x) \in X$. У цитованих роботах [3–8] найбільше уваги приділено випадку, коли

$$P_n u = k_0 + \int\limits_{\Omega_1} k_1(z_1)u(z_1)\,dz_1 + \int\limits_{\Omega_1}\int\limits_{\Omega_1} k_2(z_1, z_2)u(z_1)u(z_2)\,dz_1 dz_2 + \cdots$$
$$+ \int\limits_{\Omega_1}(n)\int\limits_{\Omega_1} k_n(z_1, \ldots, z_n)u(z_1)\cdots u(z_n)\,dz_1\cdots dz_n,$$

де $k_0 \in R$, $k_p(z_1, \ldots, z_p)$, $p = \overline{1,n}$ — неперервні та симетричні функції своїх змінних. Відмітимо також роботу [5], у якій класичні поліноми Лагранжа і Ерміта узагальнюються на випадок операторного інтерполювання. Але у цитованих роботах наближуючий оператор є операторним поліномом, а не диференціальним оператором, навіть якщо наближуваний оператор A є диференціальним оператором.

У жодній з відомих авторові робіт не розглядався важливий з практичної точки зору випадок, коли наближуваний і наближуючий оператори є диференціальними операторами (звичайними або з частинними похідними). У той же час уся теорія наближення функцій свідчить про те, що врахування класу наближуваних функцій дозволяє отримати більш точне наближення до них. Зокрема, теорія наближення, в якій на множині наближуваних елементів знайдеться такий, що точно може бути наближений, повинна розглядатись як більш якісна теорія наближення порівняно з теорією, що не має цієї властивості. Сказане повністю стосується наближення диференціальних операторів. Наприклад, у теорії розділених різниць не існує такої розділеної різниці, яка б точно представляла похідну хоча б одного порядку. У той же час існують практичні задачі, в яких наближуваний нелінійний диференціальний оператор доцільно замінити іншим диференціальним оператором більш простої конструкції (наприклад, лінійним чи поліноміальним).

Зазначимо, що у виразі $A(x,D)u(x)$ для наближення оператора $A(x,D)$ можна використовувати або не використовувати функцію $u(x)$. Перший випадок полягає у наближеному відновленні оператора $A(x,D)$ з умов (1). Другий випадок пов'язаний з наближенням формули $A(x,D)$ якою-небудь іншою формулою, яку можна розглядати як функцію змінної x, що залежить від параметра D. Метою даної роботи є побудова основ теорії інтерполювання звичайних диференціальних операторів $A(x,D)$ на основі умов (1), відмінної від теорії наближення операторів, дослідженої в [3–8]. Запропонована теорія істотно використовує те, що наближуваний і наближуючий оператори є звичайними диференціальними операторами.

2. Основи теорії інтерполювання звичайних диференціальних операторів з використанням функціональних вузлів. *Інтерполювання лінійними диференціальними операторами.* Припустимо, що $n \in N$, $D = d/dx$, $A(x,D)$ — деякий звичайний диференціальний оператор, інформація про нього задана таким чином:

$$A(x,D)u_\beta(x) = \gamma_\beta(x), \qquad 0 \leqslant \beta \leqslant n;$$
$$\sum_{\beta=0}^{n} |\gamma_\beta(x)| \neq 0, \qquad x \in [x_1, x_2] \subseteq R. \tag{1}$$

Задача полягає в побудові звичайного лінійного диференціального оператора n-го порядку

$$L_n(x,D)u(x) = \sum_{0\leqslant\alpha\leqslant n} a_\alpha(x) D^\alpha u(x), \qquad D^0 u(x) = u(x), \tag{2}$$

невідомі коефіцієнти $a_\alpha(x)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant n$, якого знаходяться з умов

$$L_n(x,D)u_\beta(x) = \gamma_\beta(x), \qquad 0 \leqslant \beta \leqslant n. \tag{3}$$

Нижче сформулюємо умови, які повинна задовольняти система функцій $u_\beta(x)$, $0 \leqslant \beta \leqslant n$, для того щоб задача (3)–(2) мала єдиний розв'язок, і дамо два явних аналітичних вирази для такого оператора $L_n(x,D)u(x)$. Наведемо аналітичний вираз для нелінійних інтерполяційних операторів $\overline{L}_n(x,D)u(x) = \sum\limits_{\alpha=0} a_\alpha(x)(Du(x))^\alpha$, а також інтегральне зображення залишку наближення операторів $A(x,D)$, що задовольняють умову $A(x,D)u(x) = A(x,Du(x))$ за допомогою нелінійних диференціальних операторів першого порядку $\overline{L}_n(x,D)u(x)$.

Теорема 1. *Для того щоб на інтервалі* $x \in [x_1, x_2]$ *задача* (3)–(2) *мала єдиний розв'язок* $a_0(x), \ldots, a_n(x)$, *необхідно і достатньо, щоб система функцій* $u_\beta(x)$, $0 \leqslant \beta \leqslant n$, *задовольняла умову*

$$\Delta = det W(x) \neq 0, \qquad x_1 \leqslant x \leqslant x_2; \qquad W(x) = [D^\alpha u_\beta(x)]_{\alpha,\beta=0}^{n}. \tag{4}$$

При цьому шуканий оператор $L_n(x,D)u(x)$ *можна зобразити у вигляді*

$$L_n(x,D)u(x) = \Gamma(x)W(x)^{-1}[ID \cdots D^n]^T u(x), \tag{5}$$

де I *— тотожний оператор,* $\Gamma(x) = [\gamma_0(x) \cdots \gamma_n(x)]$.

Нижче дамо іншу формулу для операторів $L_n(x,D)u(x)$, еквівалентну формулі (5).

Теорема 2. *Оператор* $L_n(x,D)u(x)$ *можна зобразити також у вигляді*

$$L_n(x,D)u(x) = \frac{\begin{vmatrix} u_0(x) & \dots & D^n u_0(x) & \gamma_0(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_n(x) & \dots & D^n u_n(x) & \gamma_n(x) \\ u(x) & \dots & D^n u(x) & 0 \end{vmatrix}}{\Delta}. \tag{6}$$

Інтерполювання диференціальних операторів спеціального виду. Теореми 1 і 2 повністю розв'язують задачу побудови шуканого звичайного лінійного диференціального оператора з властивостями (3). Але задача операторного інтерполювання має неєдиний розв'язок. У теоремі 3 для диференціальних операторів $A(x,D)$, які задовольняють умову

$$A(x,D)u = A(x,Du), \tag{7}$$

дано аналітичний вираз оператора $\overline{L}_n u(x) = \sum\limits_{\alpha=0}^{n} w_\alpha(x)(Du(x))^\alpha$, що задовольняє умови (3). Ці оператори $\overline{L}_n u(x) = \overline{L}_n(x, Du(x))$ є нелінійними диференціальними операторами першого порядку.

Теорема 3. *Оператор* $\overline{L}_n(x, Du(x))$, *який визначається формулою*

$$\overline{L}_n(x, Du(x)) = \sum_{\beta=0}^{n} \gamma_\beta(x) \prod_{\mu=0,\, \mu\neq\beta}^{n} \frac{Du_\mu(x) - Du(x)}{Du_\mu(x) - Du_\beta(x),} \tag{8}$$

задовольняє інтерполяційні умови (3), *якщо система функцій* $u_\beta(x)$, $0 \leqslant \beta \leqslant n$, *задовольняє такі умови:*

$$Du_\mu(x) - Du_\beta(x) \neq 0 \qquad \forall x \in [x_1, x_2], \qquad \mu \neq \beta, \qquad 0 \leqslant \mu, \qquad \beta \leqslant n. \tag{9}$$

У теоремі 4 наведено інтегральне зображення для залишку

$$\overline{R}_n A u(x) = (A(x,D) - \overline{L}_n(x,D))u(x). \tag{10}$$

Теорема 4. *Хай* $1 \leqslant r \leqslant n+1$ *і функція* $A(x,t)$ *змінної* $t \in R$ *належить до класу* $A(x,t) \in C^r(R)$ *і для оператора* $A(x,D)$ *виконується умова* (7). *Тоді для залишку наближення* $\overline{R}_n A u(x)$ *виконується інтегральне зображення*

$$\overline{R}_n A u(x) = \sum_{\beta=0}^{n} \prod_{\mu=0,\, \mu\neq\beta}^{n} \frac{Du_\mu(x) - Du(x)}{Du_\mu(x) - Du_\beta(x)} \int\limits_{Du_\beta(x)}^{Du(x)} \frac{d^r A(x,t)}{dt^r} \frac{(Du_\beta(x) - t)^{r-1}}{(r-1)!} dt. \tag{11}$$

Теорема 5. *Якщо диференціальний оператор $A(x, Du)$ як функція двох змінних, має неперервну похідну порядку $n+1$ по другій змінній, то для залишку $\overline{R}_{n,n+1}Au(x)$ одержуємо*

$$\overline{R}_{n,n+1}Au(x) = \sum_{\beta=0}^{n} \prod_{\mu=0,\,\mu\neq\beta}^{n} \frac{Du_\mu(x) - Du(x)}{Du_\mu(x) - Du_\beta(x)} \int\limits_{Du_\beta(x)}^{Du(x)} \frac{d^{n+1}A(x,t)}{dt^{n+1}} \frac{(Du_\beta(x) - t)^n}{n!} dt \qquad (12)$$

або

$$\overline{R}_{n,n+1}Au(x) = \prod_{\mu=0}^{n} (Du_\mu(x) - Du(x)) \frac{\partial^{n+1}A(x,t)}{\partial t^{n+1}}\bigg|_{t=\theta(Du)} \frac{1}{(n+1)!}, \qquad (13)$$

$$\theta(Du(x)) = \theta(Du_0(x), \ldots, Du_n(x), Du(x)).$$

П р и к л а д. Хай $A(x, D) = D^2 = d^2/dx^2$; $n = 1$; $A_1(x, u(x)) = a_0 u(x) + a_1(x) Du(x)$. У випадку $u_0(x) = 1$; $u_1(x) = x^2/2$, $\gamma_0(x) = 0$; $\gamma_1(x) = 1$ система (3) має розв'язок $a_0(x) = 0$; $a_1(x) = x^{-1}$. Тому $A_1 u(x) = x^{-1} Du(x)$. У цьому випадку оператор $\overline{L_1}u(x) = \overline{L_1}(x, D)u(x)$ теж має вигляд $\overline{L_1}u(x) = x^{-1} Du(x)$. У випадку $u_0(x) = x$; $u_1(x) = x^2/2$, $\gamma_0(x) = 0$; $\gamma_1(x) = 1$ система (3) має розв'язок $a_0(x) = -2x^{-2}$; $a_1(x) = 2x^{-1}$ і $A_1 u(x) = -2x^{-2} u(x) + 2x^{-1} Du(x)$. У цьому випадку оператор $\overline{L_1}u(x)$ має вигляд $\overline{L_1}u(x) = (1 - Du(x))/(1 - x)$.

Таким чином, у роботі викладено основи теорії наближення звичайних диференціальних операторів за допомогою звичайних лінійних або нелінійних диференціальних операторів поліноміального типу. При цьому використані результати дії наближуваного оператора на деяку систему функцій — функціональних вузлів. Наведені явні аналітичні вирази для запропонованих операторів, досліджено залишки наближення з їх допомогою деяких нелінійних операторів. Розглянуто приклад.

1. *Литвин О. М.* Інтерлінація функцій та деякі її узагальнення. – Харків: Основа, 2002. – 544 с.
2. *Литвин О. М.* Методи обчислень. Додаткові розділи. – Київ: Наук. думка, 2005. – 331 с.
3. *Даугавет И. К.* О полиномиальном приближении операторов // Вестн. Санкт-Петербург. ун-та. Сер. 1. – 1994. – Вып. 3. – С. 23–26.
4. *Porter W. A.* Synthesis of polynomic system // SIAM J. Math. Anal. – 1980. – **11**, No 2. – P. 308–315.
5. *Prenter P. M.* Lagrange and Hermite interpolation in Banach spaces // Appr. Theory. – 1971. – **4**, No 4. – P. 419–432.
6. *Howlett P. G., Torokhti A. P.* Weak interpolation and approximation of nonlinear operators on the space $C([0, 1])$ // Numer. Func. Anal. and Optimiz. – 1998. – **19**(9, 10). – P. 1025–1043.
7. *Макаров В. Л., Хлобыстов В. В.* Основы теории полиномиального операторного интерполирования. – Киев: Изд. Ин-та математики НАН Украины, 1998. – 278 с.
8. *Макаров В. Л., Хлобыстов В. В., Янович Л. А.* Интерполирование операторов. – Киев: Наук. думка, 2002. – 406 с.

Українська інженерно-педагогічна академія, Харків

Надійшло до редакції 16.11.2006