

Є. Я. Чапля, О. Ю. Чернуха, П. Р. Пелех

Нелокальне рівняння теплопровідності для багатозфазних стохастично неоднорідних тіл

(Представлено членом-кореспондентом НАН України Я. Й. Бураком)

A new approach to the physico-mathematical modelling of heat transfer processes is proposed. A nonstationary initial-boundary-value problem is formulated on the basis of the Fourier law. The technique of Feynman diagrams is applied to the investigation of averaged temperature fields. The Dyson equation is obtained as well as a nonlocal heat transfer equation for a temperature field averaged over the ensemble of phase configurations in multiphase randomly inhomogeneous bodies.

Дослідження температурних полів в елементах конструкцій з композиційних матеріалів, що знаходяться в умовах нерівномірного нагріву, пов'язано з побудовою розв'язків рівнянь теплопровідності, які описують теплові процеси у макрооб'ємах таких середовищ. Така потреба виникає, зокрема, при знаходженні розподілів температурних полів у магнітодіелектриках, які використовуються в електро- і радіотехнічних приладах [1], де різниця фізико-механічних властивостей складових елементів (фаз) зумовлює нерівність їх температур. При дослідженні температурних полів у випадково неоднорідних тілах, як правило, застосовується метод гомогенізації гетерогенного середовища [1–3]. При цьому накладається умова ергодичності (квазіергодичності) досліджуваних процесів [4, 5]. Якщо ж розміри випадкових неоднорідностей співвимірні з розмірами тіла, тоді виникає необхідність побудови нових моделей, підходів і методів, які дозволяють описувати експериментально спостережувані процеси та явища. У даній роботі з використанням діаграм Фейнмана [5] отримані нелокальні рівняння теплопровідності для усередненого температурного поля в багатозфазних випадково неоднорідних тілах.

Постановка задачі. Нехай в N -фазному тілі з випадково розташованими неоднорідностями протікають процеси теплопровідності. Матеріал тіла розглядаємо як середовище, фізичні характеристики якого є випадковими функціями, тобто коефіцієнт теплопровідності $\lambda(\mathbf{r})$, теплоємність $c(\mathbf{r})$ та густина $\rho(\mathbf{r})$ є випадковими функціями координат простору. Розподіл випадкового температурного поля $T(\mathbf{r}, t)$ в такому тілі описує рівняння теплопровідності [1]

$$L(\mathbf{r}, t)T(\mathbf{r}, t) \equiv c(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r})\frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \vec{\nabla}(\lambda(\mathbf{r})\vec{\nabla}T(\mathbf{r}, t)) = f(\mathbf{r}, t), \quad (1)$$

де $f(\mathbf{r}, t)$ — густина джерел тепла (детермінована функція); $\vec{\nabla}$ — оператор Гамільтона; \mathbf{r} — радіус-вектор біжучої точки; t — час.

Нехай на поле $T(\mathbf{r}, t)$ накладені необхідні детерміновані крайові умови. Наприклад, якщо задані умови 1-го роду, маємо

$$T(\mathbf{r}, t)|_{t=0} = b_1(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in (V), \quad T(\mathbf{r}, t) = b_2(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in (\partial V), \quad (2)$$

де $b_1(\mathbf{r})$, $b_2(\mathbf{r})$ — відомі функції; (∂V) — границя тіла (V) . Введемо у розгляд випадкову функцію $\eta_{ij}(\mathbf{r})$ типу одиничної сходиноквої функції Хевісайда, яка визначає конфігурацію (розташування) фаз в області тіла та означена таким чином:

$$\eta_{ij}(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{r} \in (V_i^{(j)}), \\ 0, & \mathbf{r} \notin (V_i^{(j)}), \end{cases} \quad \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{n_j} \eta_{ij}(\mathbf{r}) = 1, \quad (3)$$

де $(V_i^{(j)})$ — i -та однозв'язна область (i -те включення) j -ї фази; i — номер включення ($i = \overline{1, n_j}$), n_j — кількість однозв'язних областей сорту j ($j = \overline{1, N}$). Тоді

$$\lambda(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{n_j} \lambda_j \eta_{ij}(\mathbf{r}), \quad c(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{n_j} c_j \rho_j \eta_{ij}(\mathbf{r}). \quad (4)$$

Відзначимо, що індекс j при коефіцієнтах рівняння (1) позначає відповідні значення теплофізичних характеристик j -ї фази. Підставимо таке подання коефіцієнтів (4) в рівняння (1) та врахуємо, що

$$\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{n_j} \vec{\nabla}(\lambda_j \eta_{ij}(\mathbf{r})) = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{n_j} [\lambda(\mathbf{r})]_{\Gamma_{ij}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\Gamma_{ij}}), \quad (5)$$

де $[\lambda(\mathbf{r})]_{\Gamma_{ij}}$ — вектор-функція стрибка коефіцієнта теплопровідності на границі однозв'язної області $(V_j^{(j)})$; Γ_{ij} — границя цієї області; $\mathbf{r}_{\Gamma_{ij}}$ — радіус-вектор точок границі Γ_{ij} . Тоді отримаємо

$$L(\mathbf{r}, t)T(\mathbf{r}, t) \equiv \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{n_j} \left\{ \left(c_j \rho_j \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda_j \Delta T \right) \eta_{ij}(\mathbf{r}) - [\lambda(\mathbf{r})]_{\Gamma_{ij}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\Gamma_{ij}}) \vec{\nabla} T \right\} = f(\mathbf{r}, t). \quad (6)$$

До одержаного рівняння додаємо і віднімаємо невинуватковий оператор теплопровідності $\bar{L}(\mathbf{r}, t)$, коефіцієнти якого є усередненими величинами

$$\bar{L}(\mathbf{r}, t) = \bar{c}\bar{\rho} \frac{\partial}{\partial t} - \bar{\lambda} \Delta, \quad (7)$$

де $\bar{c}\bar{\rho} = \overline{c(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r})}$, $\bar{\lambda} = \overline{\lambda(\mathbf{r})}$ — усереднені за ансамблем реалізацій структури тіла характеристики (у випадку рівномірного розподілу фаз збігаються із середніми за об'ємом тіла).

Тоді з урахуванням умови суцільності тіла (3) рівняння (6) набуде вигляду

$$\bar{L}(\mathbf{r}, t)T(\mathbf{r}, t) - f(\mathbf{r}, t) = (\bar{L}(\mathbf{r}, t) - L(\mathbf{r}, t))T(\mathbf{r}, t). \quad (8)$$

Розв'язок крайової задачі (8), (2) шукатимемо у вигляді нескінченного інтегрального ряду Неймана [5]. Вважаємо праву частину рівняння (8) джерелом, тобто неоднорідність середовища розглядаємо як внутрішні джерела для процесу теплопровідності у випадково неоднорідному N -фазному тілі. Тоді розв'язок неоднорідної крайової задачі можна подати у вигляді

$$T(\mathbf{r}, t) = T_0(\mathbf{r}, t) + \int_0^t \int_{(V)} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') L_s(\mathbf{r}', t') T(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}' dt'. \quad (9)$$

Тут $T_0(\mathbf{r}, t)$ — розв'язок такої крайової задачі:

$$\bar{L}(\mathbf{r}, t)T_0(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{r}, t); \quad T_0(\mathbf{r}, t)|_{t=0} = b_1(\mathbf{r}), \quad T_0(\mathbf{r}, t)|_{r \in (\partial V)} = b_2(\mathbf{r}, t); \quad (10)$$

$$L_s(\mathbf{r}, t) = \tilde{c}\rho \frac{\partial}{\partial t} - \vec{\nabla}(\tilde{\lambda}(\mathbf{r})\vec{\nabla}) = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{n_j} (\bar{c}\rho - c_j\rho_j)\eta_{ij}(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial t} - \\ - \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{n_j} (\bar{\lambda} - \lambda_j)\eta_{ij}(\mathbf{r})\Delta + \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{n_j} [\lambda(\mathbf{r})]_{\Gamma_{ij}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\Gamma_{ij}})\vec{\nabla}, \quad (11)$$

де $\tilde{c}\rho(\mathbf{r}) = \bar{c}\rho - c(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r})$, $\tilde{\lambda}(\mathbf{r}) = \bar{\lambda} - \lambda(\mathbf{r})$ — флуктуації відповідних коефіцієнтів; $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t')$ — детермінована функція Гріна задачі (8), (2) [7].

Таким чином, вихідна крайова задача зведена до еквівалентного їй інтегродиференційного рівняння (9). Його розв'язок будемо методом послідовних наближень, вибираючи за нульове наближення розв'язок задачі (10). Тоді маємо

$$T(\mathbf{r}, t) = T_0(\mathbf{r}, t) + \int_0^t \int_{(V)} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') L_s(\mathbf{r}', t') T_0(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}' dt' + \int_0^t \int_{(V)} \int_0^{t'} \int_{(V)} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') \times \\ \times L_s(\mathbf{r}', t') G(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', t', t'') L_s(\mathbf{r}'', t'') T_0(\mathbf{r}'', t'') d\mathbf{r}'' dt'' dt' d\mathbf{r}' + \dots \quad (12)$$

Зазначимо, що ряд Неймана (12) є розвиненням випадкового температурного поля за збуреннями, які виникають у системі через наявність включень з іншими, ніж у матриці, теплофізичними характеристиками.

Щоб дослідити структуру цього ряду, використаємо діаграми Фейнмана [8]. Співставимо функціям, що входять у рівняння (12), такі діаграми (використовуються типові позначення [5]):

$$T(\mathbf{r}, t) \sim \text{---}; \quad T_0(\mathbf{r}, t) \sim \text{---}; \quad G(\mathbf{r}_i, t_i, \mathbf{r}_j, t_j) \sim \overline{(\mathbf{r}_i, t_i) (\mathbf{r}_j, t_j)}; \quad L(\mathbf{r}, t) \sim \uparrow.$$

Тоді ряд (12) у графічному вигляді буде таким:

$$\text{---} = \text{---} + \frac{\uparrow}{(\mathbf{r}_1, t_1)} \text{---} + \frac{\uparrow \uparrow}{(\mathbf{r}_1, t_1)(\mathbf{r}_2, t_2)} \text{---} + \frac{\uparrow \uparrow \uparrow}{(\mathbf{r}_1, t_1) (\mathbf{r}_2, t_2) (\mathbf{r}_3, t_3)} \text{---} + \dots \quad (13)$$

Усереднимо випадкове температурне поле (12) за ансамблем конфігурації фаз із заданою функцією розподілу. Тоді отримаємо в аналітичному

$$\langle T(\mathbf{r}, t) \rangle = T_0(\mathbf{r}, t) + \int_0^t \int_{(V)} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') \langle L_s(\mathbf{r}', t') \rangle T_0(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}' dt' + \int_0^t \int_{(V)} \int_0^{t'} \int_{(V)} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') \times \\ \times \langle L_s(\mathbf{r}', t') G(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', t', t'') L_s(\mathbf{r}'', t'') \rangle T_0(\mathbf{r}'', t'') d\mathbf{r}'' dt'' dt' d\mathbf{r}' + \dots, \quad (14)$$

або в графічному вигляді

$$\blacksquare = \text{---} + \frac{\uparrow}{\bullet} \text{---} + \frac{\uparrow \uparrow}{\bullet \bullet} \text{---} + \frac{\uparrow \uparrow \uparrow}{\bullet \bullet \bullet} \text{---} + \frac{\uparrow \uparrow \uparrow \uparrow}{\bullet \bullet \bullet \bullet} \text{---} + \frac{\uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow}{\bullet \bullet \bullet \bullet \bullet} \text{---} + \frac{\uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow}{\bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet} \text{---} + \\ + \frac{\uparrow \uparrow \uparrow}{\bullet \bullet \bullet} \text{---} + \frac{\uparrow \uparrow \uparrow \uparrow}{\bullet \bullet \bullet \bullet} \text{---} + \frac{\uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow}{\bullet \bullet \bullet \bullet \bullet} \text{---} + \dots \quad (15)$$

Тут

$$\langle T(\mathbf{r}, t) \rangle \sim \blacksquare, \quad \langle L(\mathbf{r}, t) \rangle \sim \downarrow, \quad \psi_k(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_k) \sim \begin{array}{c} \bullet \\ \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\ (\mathbf{r}_1, t_1) \quad \dots \quad (\mathbf{r}_k, t_k) \end{array},$$

де ψ_k — кумулянтні (або кореляційні) функції порядку k . Зазначимо, що

$$\begin{aligned} \langle L_s(\mathbf{r}_1, t_1) \dots L_s(\mathbf{r}_k, t_k) \rangle &= \psi_k(\mathbf{r}_1, t_1, \dots, \mathbf{r}_k, t_k) + \\ &+ \sum_{l=1}^k \langle L_s(\mathbf{r}_l, t_l) \rangle \langle L_s(\mathbf{r}_1, t_1) \dots L_s(\mathbf{r}_{l-1}, t_{l-1}) L_s(\mathbf{r}_{l+1}, t_{l+1}) \dots L_s(\mathbf{r}_k, t_k) \rangle + \dots \end{aligned}$$

Оскільки за координатами (\mathbf{r}', t') , (\mathbf{r}'', t'') , ... внутрішніх вершин діаграм відбувається інтегрування, то аналітичний вираз, який зображується діаграмою, не залежить від координат внутрішніх вершин. У зв'язку з цим тут і надалі ці координати на діаграмах не позначаються.

У ряді (15) відберемо всі сильно зв'язані діаграми [5, 9], тобто такі, які неможливо розділити на дві окремі діаграми, розірвавши одну лінію G . Оскільки кожна з діаграм починається лінією G і закінчується хвилястою лінією T_0 , то суму всіх сильно зв'язаних діаграм можна подати у вигляді

$$\text{---} \circ \text{---}, \quad (16)$$

де введено позначення

$$\overline{G}^{(c.zv.)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') \sim \begin{array}{c} \bullet \\ \circ \end{array} = \downarrow + \begin{array}{c} \bullet \\ \triangle \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \\ \triangle \\ \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \\ \triangle \\ \bullet \\ \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \\ \triangle \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} + \dots \quad (17)$$

В аналітичній формі (17) має вигляд

$$\overline{G}^{(c.zv.)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') = \int_0^t \int_{(V)} \int_0^{t_1} \int_{(V)} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, t, t_1) \Sigma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) G(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}', t_2, t') d\mathbf{r}_2 dt_2 d\mathbf{r}_1 dt_1, \quad (18)$$

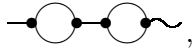
де

$$\begin{aligned} \Sigma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) &= \langle L_s(\mathbf{r}_1, t_1) \rangle + G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) \psi_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + \\ &+ \int_0^{t_1} \int_{(V)} G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1, t_1, t'_1) \langle L_s(\mathbf{r}'_1, t'_1) \rangle G(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}_2, t'_1, t_2) \psi_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d\mathbf{r}'_1 dt'_1 + \\ &+ \int_0^{t_1} \int_{(V)} G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1, t_1, t'_1) G(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}_2, t'_1, t_2) \psi_3(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}_2) d\mathbf{r}'_1 dt'_1 + \dots \quad (19) \end{aligned}$$

ядро масового оператора. Розглянемо суму всіх діаграм з показником зв'язаності 2. Кожна з них має вигляд

$$\text{---} \circ \Sigma_1 \text{---} \circ \Sigma_2 \text{---}, \quad (20)$$

де $\bullet \Sigma_1$ і $\bullet \Sigma_2$ — будь-які діаграми, що належать правій частині (19). Оскільки при побудові ряду (15) перебираються всі можливі способи попарного з'єднання вершин, то сума всіх можливих складових на зразок (20) дорівнює



де $\bullet \bigcirc$ — повна сума (19).

Аналогічно будуюмо суму всіх діаграм із показниками зв'язності 3, 4 і т. д. Тоді усереднене температурне поле можна подати у вигляді діаграмного ряду

$$\blacksquare = \text{wavy} + \text{circle} + \text{two circles} + \text{three circles} + \dots \quad (21)$$

Таке подання відрізняється від вихідного діаграмного ряду (15) тільки перегрупуванням його членів.

Виділимо в рівнянні (21) елемент circle . Тоді

$$\blacksquare = \text{wavy} + \text{circle} \times \left(\text{wavy} + \text{circle} + \text{two circles} + \dots \right). \quad (22)$$

Підсумовуючи в (22) вираз в дужках, з використанням (21) отримаємо рівняння Дайсона для усередненого температурного поля у графічній

$$\blacksquare = \text{wavy} + \text{circle} \blacksquare \quad (23a)$$

і відповідно аналітичній формах

$$\langle T(\mathbf{r}, t) \rangle = T_0(\mathbf{r}, t) + \int_0^t \int_{(V)} \int_0^{t_1} \int_{(V)} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, t, t_1) \Sigma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) \langle T(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle d\mathbf{r}_2 dt_2 d\mathbf{r}_1 dt_1. \quad (23b)$$

Якщо застосувати до рівняння Дайсона (23) оператор $\bar{L}(\mathbf{r}, t)$ (7), то з урахуванням рівняння (10) одержимо

$$\frac{\partial \langle T(\mathbf{r}, t) \rangle}{\partial t} - \bar{\lambda} \Delta \langle T(\mathbf{r}, t) \rangle = f(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{(V)} \Sigma(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, t, t_1) \langle T(\mathbf{r}_1, t_1) \rangle d\mathbf{r}_1 dt_1. \quad (24)$$

Із порівняння (10) і (24) випливає, що на відміну від $T_0(\mathbf{r}, t)$, функція $\langle T(\mathbf{r}, t) \rangle$ задовольняє не диференціальне, а інтегродиференціальне рівняння. З фізичної точки зору це означає, що усереднене температурне поле в деякій точці (\mathbf{r}, t) залежить і від неоднорідностей, які оточують цю точку.

Таким чином, для усередненого температурного поля одержано рівняння Дайсона, з якого отримано нелокальне інтегродиференціальне рівняння теплопровідності. При цьому для дослідження усереднених температурних полів використано техніку діаграм Фейнмана. Зображення розв'язку задачі у вигляді сукупності діаграм дозволило перетворювати ряд теорії збурень, використовуючи топологічні ознаки діаграм, які входять у розв'язок. Застосування такої техніки дає можливість виразити ряд Неймана через суму деякої нескінченної підпоследовності цього ж ряду.

Зазначимо, що в подальшому за даним підходом доцільно дослідити кореляції випадкових температурних полів, отримати нелокальне рівняння для функції когерентності, а також вивчити процеси теплопровідності у випадково неоднорідних тілах у рамках теорії бінарних систем.

1. *Хорошун Л. П., Солтанов Н. С.* Термоупругость двухкомпонентных смесей. – Киев: Наук. думка, 1984. – 112 с.
2. *Lidzba D.* Homogenisation theories applied to porous media mechanics // *J. Theor. and Appl. Mechanics.* – 1998. – **36**, No 3. – P. 657–679.
3. *Matysiak S. J., Mieszkowski R.* On homogenization of diffusion processes in microperiodic stratified bodies // *Int. J. Heat and Mass Transfer.* – 1999. – **26**. – P. 539–547.
4. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. – Москва: Наука, 1977. – 568 с.
5. *Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И.* Введение в статистическую радиофизику. Ч. II. Случайные поля. – Москва: Наука, 1978. – 436 с.
6. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. – Москва: Высш. шк., 1978. – 463 с.
7. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. – Москва: Наука, 1972. – 735 с.
8. *Фейнман Р., Хиббс А.* Квантовая механика и интегралы по траекториям. – Москва: Мир, 1968. – 454 с.
9. *Charlia Y., Chernukha O.* Physical-mathematical modelling diffusion processes in bodies of random structure using generalized functions and Feynman diagrams // *Int. J. Engineering Science.* – 2005. – **43**. – P. 1337–1348.

*Центр математичного моделювання Інституту
прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів
Університет Казимира Великого, Бидгоща, Польща*

Надійшло до редакції 27.11.2006