УДК 517.95

Г. П. Лопушанська, О. Ю. Чмир

Характер особливостей розв'язку узагальненої крайової задачі для квазілінійної параболічної системи

(Представлено членом-кореспондентом НАН України Б. Й. Пташником)

For some subspaces of the weight L^1-space, the existence of a solution of the normal boundary-value problem for a quasilinear parabolic system with generalized functions from the space $(C^\infty)'$ given on the boundary of a domain is proved. The character of singularities of the solution (point-like and on the whole boundary of the domain) is determined.

Крайові задачі для напівлінійних параболічних рівнянь є предметом посиленої уваги вчених в останні роки, оскільки їх приклади описують різні фізичні, біологічні та хімічні процеси. У працях Л. Бокардо (L. Boccardo), Т. Галеот (T. Gallouet), А. Поретта (A. Porretta), Дж. М. Ракотосон (J. M. Rakotoson) розпочато вивчення крайових задач з початковими даними — мірами. Тому новими й актуальними є дослідження таких нелінійних доданків у рівнянні, за яких розв'язки крайової задачі набувають крайових значень із просторів узагальнених функцій.

У роботі [1] досліджено нормальну крайову задачу для квазілінійної параболічної системи при заданих на межі області узагальнених функціях із $(C^\infty)'$. У даному повідомленні встановлюємо характер особливостей розв'язку (точкових та на всій межі області). Використовуємо методику робіт [2–4].

Об'єкт досліджень. Введемо позначення, які будуть необхідними для формулювання задачі:

$n \in \mathbb{N}$, Ω — обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з межею $S = \partial\Omega$ класу C^∞, $0 < T < +\infty$, $Q = \Omega \times (0,T]$, $\Sigma = S \times (0,T]$; $p, b \in \mathbb{N}$, $m \stackrel{\text{def}}{=} bp$; $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}_+$, $i = \overline{1,n}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $D^\alpha \equiv D_x^\alpha = (\partial^{|\alpha|})/(\partial x_1^{\alpha_1} \cdot \cdots \cdot \partial x_n^{\alpha_n})$; $A(x,t,D_x) = \sum\limits_{|\alpha| \leqslant 2b} a_\alpha(x,t) D^\alpha$, $a_\alpha(x,t)$ — квадратні порядку p матриці з нескінченно диференційовними на $\overline{Q}$ елементами; I_p — одинична матриця порядку p; $L(x,t,D_x,\partial/\partial t) \equiv (I_p \partial/\partial t - A(x,t,D_x))$ — параболічний диференціальний оператор; $b_{j\alpha}$ ($j = \overline{1,m}$, $|\alpha| \leqslant r_j$) — матриці-рядки довжини p з нескінченно диференційовними на $\overline{\Sigma}$ елементами, де $0 \leqslant r_m \leqslant \cdots \leqslant r_1 \leqslant 2b-1$, $j = \overline{1,m}$. Припускаємо, що система крайових диференціальних виразів $B_j(x,t,D_x) = \sum\limits_{|\alpha| \leqslant r_j} b_{j\alpha}(x,t) D^\alpha$, $j = \overline{1,m}$, є нормальною на Σ ([5, с. 178]) і задовольняє умову Лопатинського ([5, с. 15]).

Надалі вважатимемо, що довільна вектор-функція F належить до функціонального простору $[X]^p$, якщо кожна її компонента F_i, $i = \overline{1,p}$, належить до X.

Згідно з [5, с. 178; 6] існують крайові диференціальні вирази $\widehat{B_j}$, C_j, $\widehat{C_j}$ типу B_j, $j = \overline{1,m}$, порядків відповідно $\widehat{r_j}$, m_j, $\widehat{m_j}$, такі що $r_j + \widehat{m_j} = m_j + \widehat{r_j} = 2b-1$ і правильна формула Гріна

$$\int\limits_Q [v^\top (Lu) - (L^* v)^\top u] \, dx \, dt =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \int_{\Sigma} [(\widehat{B_j}v)(C_j u) - (\widehat{C_j}v)(B_j u)]\, dS\, dt + \int_{\Omega} v^{\top}(x,t)u(x,t)|_{t=0}^{t=T}\, dx$$

для довільних u, $v \in [C^{\infty}(\overline{Q})]^p$, де $L^* = -(I_p \partial/\partial t + A^*)$, A^* — формально спряжений диференціальний оператор до диференціального оператора A, символ "$\top$" означає транспонування.

Використовуватимемо такі функціональні простори:

$$D(\overline{Q}) = C^{\infty}(\overline{Q}), \qquad D(\overline{\Sigma}) = C^{\infty}(\overline{\Sigma}), \qquad D(\overline{\Omega}) = C^{\infty}(\overline{\Omega});$$
$$D^0(\overline{Q}) = \left\{\varphi \in D(\overline{Q})\colon \frac{\partial^k}{\partial t^k}\varphi\bigg|_{t=T} = 0,\ k = 0, 1, \ldots\right\},$$
$$D^0(\overline{\Sigma}) = \left\{\varphi \in D(\overline{\Sigma})\colon \frac{\partial^k}{\partial t^k}\varphi\bigg|_{t=T} = 0,\ k = 0, 1, \ldots\right\},$$
$$D_0(\overline{\Omega}) = \{\varphi \in D(\overline{\Omega})\colon \widehat{B_j}\varphi|_S = 0,\ j = \overline{1, m}\}.$$

Позначатимемо через $(D^0(\overline{\Sigma}))'$, $(D_0(\overline{\Omega}))'$ простори лінійних неперервних функціоналів відповідно на просторах функцій $D^0(\overline{\Sigma})$, $D_0(\overline{\Omega})$, через $(\varphi, F)_1$ — значення узагальненої вектор-функції $F \in [(D^0(\overline{\Sigma}))']^p$ на основній вектор-функції $\varphi \in [D^0(\overline{\Sigma})]^p$, через $(\varphi, F)_2$ — значення $F \in [(D_0(\overline{\Omega}))']^p$ на $\varphi \in [D_0(\overline{\Omega})]^p$, а під $s(F)$ розумітимемо максимальний із порядків сингулярностей компонент узагальненої вектор-функції F (7, с. 123]).

Нехай $l \in \mathbb{N}$, $l \leqslant 2b-1$, а $M(l)$ — кількість мультиіндексів α таких, що $|\alpha| \leqslant l$. Позначимо через $\partial_l u = (u, u_{x_1}, \ldots, D^{\alpha}u, \ldots)$, $|\alpha| \leqslant l$, матрицю розмірності $p \times M(l)$, стовпцями якої є вектор-функція u та її похідні за просторовими змінними до порядку l. Під $\mathbb{M}_{p\times M(l)}$ розумітимемо простір матриць розмірності $p \times M(l)$.

Розглянемо нормальну крайову задачу для квазілінійної параболічної системи

$$L\left(x, t, D_x, \frac{\partial}{\partial t}\right)u(x,t) = F_0(x, t, \partial_l u(x,t)), \qquad (x,t) \in Q, \tag{1}$$

$$B_j(x, t, D_x)u(x,t)\,|_{\Sigma} = F_j(x,t), \qquad j = \overline{1, m}, \qquad (x,t) \in \Sigma, \tag{2}$$

$$u|_{t=0} = F_{m+1}(x), \qquad x \in \Omega, \tag{3}$$

де u — шукана вектор-функція (матриця-стовпець висоти p), F_0, F_{m+1} (матриці-стовпці висоти p), F_j $(j = \overline{1, m})$ — задані функції. Відповідні лінійні параболічні крайові задачі вивчалися у працях [3, с. 140; 5, с. 12; 6; 8].

Надалі скрізь у роботі припускатимемо, що:

1) $F_0(x, t, z)(z = (z_{(0,\ldots,0)}, z_{(1,0,\ldots,0)}, \ldots, z_{\alpha}, \ldots))$ — визначена в $Q \times \mathbb{M}_{p\times M(l)}$ вектор-функція зі значеннями в $\mathbb{R}^p$;

2) $F_j \in (D^0(\overline{\Sigma}))', 0 \leqslant s(F_j) \leqslant q_j, 1 \leqslant j \leqslant m$;

3) $F_{m+1} \in [(D_0(\overline{\Omega}))']^p, 0 \leqslant s(F_{m+1}) \leqslant q_{m+1}$.

Нехай

$\varrho_1(x)$ $(x \in \overline{\Omega})$ — нескінченно диференційовна невід'ємна функція, яка додатна в Ω, має порядок відстані $d(x)$ від точки x до S біля S та $\varrho_1(x) \leqslant 1$, $x \in \overline{\Omega}$;

$\varrho_2(t)$ $(t \in (0, T])$ — нескінченно диференційовна невід'ємна функція, яка має порядок t при $t \to 0$ і, крім того, $0 < \varrho_2(t) \leqslant 1$, $t \in (0, T]$;

$\varrho(x,t) = \min\{\varrho_1(x); [\varrho_2(t)]^{1/2b}\}$, $(x,t) \in Q$.

Введемо функціональні простори:

$[X_k(\overline{Q})]^p = \{\psi \in [D^0(\overline{Q})]^p \colon \psi(\cdot, 0) \in [D_0(\overline{\Omega})]^p, \widehat{B_j}\psi\big|_{\overline{\Sigma}} = 0,\ j = \overline{1,m},\ L^*\psi(x,t) = O(\varrho^k(x,t)),$ $\varrho(x,t) \to 0\}$ (у [3, с. 136–137] доведено, що $[X_k(\overline{Q})]^p$ непорожній при $k \geqslant 0$);

$\mathcal{M}^p_{k,l}(Q) = \{\mathrm{v} \in [W^l_{1,\mathrm{loc}}(Q)]^p \colon \|\mathrm{v}\|_{k,l} = \sum\limits_{|\gamma|\leqslant l} \int\limits_Q \varrho^{k+|\gamma|}(x,t)|D^\gamma \mathrm{v}(x,t)|_p \, dx\, dt < +\infty\}$, $k \in \mathbb{R}$, де $|\mathrm{v}|_p = \sum\limits_{j=1}^p |\mathrm{v}_j|$.

Припустимо, що

$$k > k_0 \overset{\mathrm{def}}{=} \max_{1\leqslant j\leqslant m+1} \{q_j + 2b - r_j - (j)\} + n - 1,$$

де

$$(j) = \begin{cases} 0, & j = m+1, \\ 1, & 1 \leqslant j \leqslant m, \end{cases} \quad r_{m+1} = 2b.$$

Означення 1. Розв'язком задачі (1)–(3) називається вектор-функція $u \in \mathcal{M}^p_{k,l}(Q)$ така, що

$$\int\limits_Q (L^*\psi)^\top \cdot u \, dx\, dt = \int\limits_Q \psi^\top(x,t) F_0(x,t,\partial_l u(x,t))\, dx\, dt + \sum_{j=1}^m (\widehat{C_j}\psi, F_j(x,t))_1 +$$
$$+ (\psi(\cdot,0), F_{m+1}(\cdot))_2 \qquad \text{для довільної} \qquad \psi \in [X_k(\overline{Q})]^p.$$

У [5, с. 16, 120; 2; 8; 9] досліджено матрицю Гріна $G = (G_0, G_1, \ldots, G_m)$ задачі (1)–(3), де $G_0(x,t;y,\tau)$ — квадратна матриця порядку p, визначена в точках $(x,t;y,\tau) \in \overline{Q} \times \overline{Q}$ при $(x,t) \neq (y,\tau)$, вектор-функції $G_j(x,t;y,\tau)$, $j = \overline{1,m}$, довжини p визначені в точках $(x,t;y,\tau) \in \overline{Q} \times \Sigma$ при $(x,t) \neq (y,\tau)$ та $G_j(x,t;y,\tau) = [\widehat{C_j}(y,\tau,D_y)G_0(x,t;y,\tau)]^\top$, $j = \overline{1,m}$.

Введемо позначення:

$$g_j(x,t) = (G_j(x,t;*,\cdot), F_j(*,\cdot))_1, \quad j = \overline{1,m}, \qquad g_{m+1}(x,t) = (G_0(x,t;*,0), F_{m+1}(*))_2,$$

$$h(x,t) = \sum_{j=1}^{m+1} g_j(x,t), \qquad (H\mathrm{v})(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_\Omega G_0(x,t;y,\tau) F_0(y,\tau,\partial_l \mathrm{v}(y,\tau))\, dy.$$

У просторі $\mathcal{M}^p_{k,l}(Q)$ розглянемо систему інтегро-диференціальних рівнянь

$$\mathrm{v} = H\mathrm{v} + h. \tag{4}$$

Нехай $h \in \mathcal{M}^p_{k,l}(Q)$. Розв'язком системи інтегро-диференціальних рівнянь (4) у просторі $\mathcal{M}^p_{k,l}(Q)$ називається вектор-функція $u \in \mathcal{M}^p_{k,l}(Q)$, яка задовольняє (4) майже скрізь у Q.

Як у роботах [10; 3, с. 28] для еліптичного випадку, з використанням спеціальних властивостей матриці Гріна [2; 3, с. 168] та теореми Фубіні [11, с. 24], доводиться, що вектор-функція u є розв'язком задачі (1)–(3) тоді і лише тоді, коли вона є розв'язком системи інтегро-диференціальних рівнянь (4) у просторі $\mathcal{M}^p_{k,l}(Q)$.

Поведінка розв'язку задачі біля межі області. Знайдемо характер поведінки розв'язку задачі (1)–(3) біля межі області залежно від порядків сингулярностей узагальнених функцій F_j, $j=\overline{1,m+1}$, з правою частиною F_0, що задовольняє умови

$$|F_0(x,t,z)|_p \leqslant \sum_{s=0}^{l} A_s \sum_{|\gamma|=s} |z_\gamma|_p^{\eta_s} + A, \quad (x,t)\in Q, \qquad z\in \mathbb{M}_{p\times M(l)},$$

$$|F_0(x,t,z^1)-F_0(x,t,z^2)|_p \leqslant B\sum_{s=0}^{l}\sum_{|\gamma|=s} |z_\gamma^1 - z_\gamma^2|_p^{\eta_s}, \quad (x,t)\in Q, \quad z^1,z^2\in \mathbb{M}_{p\times M(l)}, \qquad (5)$$

$$\eta_s\in(0,1), \quad s=\overline{0,l}, \quad A_s, A, B - \text{сталі}\ , \quad A_s\geqslant 0, \quad s=\overline{0,l}, \quad A\geqslant 0, \quad B\geqslant 0.$$

У роботі [1] при F_0 вигляду (5) з $\eta_s\in(0,1/(s+n))$, $s=\overline{0,l}$, $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant m+1}\{q_j+2b-r_j-(j)\} - 1+n<k<\min\limits_{\substack{s:\ A_s\neq 0\\ 0\leqslant s\leqslant l}}\{-s-1+1/\eta_s\}$ отримано існування розв'язку $u\in \mathcal{M}_{k,l}^p(Q)$ задачі (1)–(3).

При $\mu\in\mathbb{R}_-\bigcup\{0\}$ введемо функціональний простір

$$\mathcal{M}_{\mu,l}^p(Q,\partial Q)=\Bigg\{\mathrm{v}\in[C^l(Q)]^p\colon [\varrho(y,\tau)]^{-(\mu-|\varsigma|)}\cdot D^\varsigma \mathrm{v}(y,\tau)\in[C(\overline{Q})]^p,\ |\varsigma|\leqslant l$$

$$\left(\|\mathrm{v};\partial Q\|_\mu=\sum_{|\varsigma|\leqslant l}\sup_{(y,\tau)\in\overline{Q}}[\varrho(y,\tau)]^{-(\mu-|\varsigma|)}\cdot|D^\varsigma \mathrm{v}(y,\tau)|_p<+\infty\right)\Bigg\}$$

та $\mathcal{M}_{\mu,l,C}^p(Q,\partial Q)=\{\mathrm{v}\in\mathcal{M}_{\mu,l}^p(Q,\partial Q)\colon \|\mathrm{v};\partial Q\|_\mu\leqslant C\}$ — замкнену кулю радіуса C у просторі $\mathcal{M}_{\mu,l}^p(Q,\partial Q)$.

Лема 1. *Якщо вектор-функція F_0 задовольняє умови* (5) *при* $\eta_s\in(0,1/(s+n))$, $s=\overline{0,l}$, $\max\limits_{\substack{s:\ A_s\neq 0\\ 0\leqslant s\leqslant l}}\{s-1/\eta_s\}<\mu\leqslant\min\limits_{\substack{s:\ A_s\neq 0\\ 0\leqslant s\leqslant l}}\{(1-n-s\eta_s)/(1-\eta_s)\}$, *то існує стала $C_0>0$ така, що при всіх $C>C_0$ оператор H відображає $\mathcal{M}_{\mu,l,C}^p(Q,\partial Q)$ в себе.*

Лема 2. *Нехай $F_j\in(D^0(\overline{\Sigma}))'$, $F_{m+1}\in[(D_0(\overline{\Omega}))']^p$, $0\leqslant s(F_j)\leqslant q_j$, $j=\overline{1,m+1}$, та $\mu\leqslant -k_0-1$. Тоді $h\in\mathcal{M}_{\mu,l}^p(Q,\partial Q)$, а саме існує додатна стала C_1 така, що $\|h;\partial Q\|_\mu\leqslant C_1<+\infty$.*

Теорема 1. *Нехай вектор-функція F_0 задовольняє умови* (5) *при* $\eta_s\in(0,\min\{1/(s+2b);1/(s+n)\})$, $s=\overline{0,l}$, $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant m+1}\{q_j-r_j-(j)\}<\min\limits_{\substack{s:\ A_s\neq 0\\ 0\leqslant s\leqslant l}}\{1/\eta_s-s\}-n-2b$, $\max\limits_{\substack{s:\ A_s\neq 0\\ 0\leqslant s\leqslant l}}\{s-1/\eta_s\}<\mu\leqslant\min\{-k_0-1;\min\limits_{\substack{s:\ A_s\neq 0\\ 0\leqslant s\leqslant l}}\{-2bs\eta_s/(1-2b\eta_s)\}\}$. *Тоді існує розв'язок $u\in\mathcal{M}_{\mu,l}^p(Q,\partial Q)$ задачі* (1)–(3), *який при $-\mu-1<k<\min\limits_{\substack{s:\ A_s\neq 0\\ 0\leqslant s\leqslant l}}\{-s-1+1/\eta_s\}$ належить до $\mathcal{M}_{k,l}^p(Q)$.*

Використовуючи принцип Шаудера та леми 1, 2, доводимо існування розв'язку системи (4) у просторі $\mathcal{M}_{\mu,l}^p(Q,\partial Q)\subset\mathcal{M}_{k,l}^p(Q)$, який є також розв'язком задачі (1)–(3) у просторі $\mathcal{M}_{\mu,l}^p(Q,\partial Q)$.

Крайова задача на просторі функцій з точковими особливостями. У випадку, коли задані на межі області узагальнені функції мають точкові носії, результати [1] та наведені вище покращуються. Наведемо приклад.

Нехай $\widehat{P} = (\widehat{x}, \widehat{t}) \in \Sigma$, $P = (x,t) \in \overline{Q}$, $\varrho_0(P, \widehat{P}) = \varrho_0(x,t,\widehat{x},\widehat{t})$ — нескінченно диференційовна невід'ємна функція, яка додатна в Q та має порядок відстані $|P\widehat{P}| = (||x-\widehat{x}||^2 + |t-\widehat{t}|)^{1/2}$ при $P \to \widehat{P}$,

$$\mathcal{M}_k(Q,\widehat{P}) = \left\{ \mathrm{v}\colon \|\mathrm{v};\widehat{P}\|_k = \int\limits_Q \varrho_0^k(x,t,\widehat{x},\widehat{t})|\mathrm{v}(x,t)|\,dx\,dt < +\infty \right\},$$

$$X_k(\overline{Q},\widehat{P}) = \{\psi \in D^0(\overline{Q})\colon \psi(\cdot,0) \in D_0(\overline{\Omega}), \psi|_{\overline{\Sigma}} = 0,\ L^*\psi(P) = O(\varrho_0^k(P,\widehat{P})),\ |P\widehat{P}| \to 0\};$$

$$\mathcal{M}_{k,C}(Q,\widehat{P}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\mathrm{v} \in \mathcal{M}_k(Q,\widehat{P})\colon \|\mathrm{v};\widehat{P}\|_k \leqslant C\}.$$

Розглянемо першу узагальнену крайову задачу

$$\begin{gathered} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \triangle u(x,t) = f_0(x,t,u(x,t)), \qquad (x,t) \in Q, \\ u|_\Sigma = F_1(x,t), \qquad (x,t) \in \Sigma, \qquad u|_{t=0} = F_2(x), \qquad x \in \Omega, \end{gathered} \tag{6}$$

де:

$$\begin{gathered} 1)\ f_0(x,t,\mathrm{v}) \text{ — визначена у } Q \times (-\infty,+\infty) \text{ функція}, \\ 2)\ F_1(x,t) = \sum_{|l| \leqslant p_0} C_{lm} \sum_{m=0}^{p_1} D_x^l \delta(x-\widehat{x})\delta^{(m)}(t-\widehat{t}), \\ C_{lm} = \mathrm{const}, \qquad l = \overline{0,p_0}, \qquad m = \overline{0,p_1}, \qquad p_0, p_1 \in \mathbb{N}, \\ 3)\ F_2(x) = \sum_{|r| \leqslant p_2} C_r D_x^r \delta(x-\widehat{x}), \qquad C_r = \mathrm{const}, \qquad r = \overline{0,p_2}, \qquad p_2 \in \mathbb{N}. \end{gathered} \tag{7}$$

Означення 2. Розв'язком задачі (6) називається функція $u \in \mathcal{M}_k(Q,\widehat{P})$ така, що $\int\limits_Q L^*\psi \cdot u\,dx\,dt = \int\limits_Q f_0(x,t,u(x,t)) \cdot \psi(x,t)\,dx\,dt + (\partial\psi(x,t)/\partial\nu, F_1(x,t))_1 + (\psi(x,0), F_2(x))_2$ для довільної $\psi \in X_k(\overline{Q},\widehat{P})$.

Як у роботі [10] доводимо, що розв'язок задачі (6) є розв'язком у просторі $\mathcal{M}_k(Q,\widehat{P})$ інтегрального рівняння

$$u(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_\Omega G(x,t;y,\tau) f_0(y,\tau,u(y,\tau))\,dy + \left(\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\nu_y}, F_1(y,\tau)\right)_1 + \\ + (G(x,t;y,0), F_2(y))_2.$$

Теорема 2. *Нехай* $k > \max\{p_0 + 2p_1, p_2 - 1\} - 1$, *функція* f_0 *задовольняє умови: існує стала* $C_2 > 0$ *така, що для довільної сталої* $C > C_2$ *та для довільних* $\mathrm{v}, \mathrm{w} \in \mathcal{M}_{k,C}(Q,\widehat{P})$

$$\int\limits_Q [\varrho_0(y,\tau,\widehat{x},\widehat{t})]^{k+2} |f_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau))|\,dy\,d\tau \leqslant \varphi(C),$$

$$\int\limits_Q [\varrho_0(y,\tau,\widehat{x},\widehat{t})]^{k+2} |f_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau)) - f_0(y,\tau,\mathrm{w}(y,\tau))|\,dy\,d\tau \leqslant \psi_C(||\mathrm{v}-\mathrm{w};\widehat{P}||_k),$$

де функції $\varphi(z)$ *та* $\psi_C(z)$, $z \in [0,+\infty)$ *неперервні, монотонно неспадні, додатні на* $(0,+\infty)$, $\varphi(z)/z \to 0$ *при* $z \to +\infty$, $\psi_C(0) = 0$. *Тоді існує розв'язок* $u \in \mathcal{M}_k(Q,\widehat{P})$ *задачі (6).*

Наслідок 1. *За припущень* (7), *при* $k > \max\{p_0 + 2p_1, p_2 - 1\} - 1$,

$$f_0(x,t,z) = \varkappa(x,t)|z|^\beta, \qquad \varkappa \in L^\infty(Q), \qquad \beta \in (0,1), \tag{8}$$

існує розв'язок задачі (6) *у просторі* $\mathcal{M}_k(Q,\widehat{P})$.

При f_0 вигляду (8), де $\beta > 1$, F_1, F_2 — вигляду (7), вивчаємо задачу (6) у підпросторі

$$\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q},\widehat{P}) = \{\mathrm{v} \in C(\overline{Q} \setminus \{\widehat{P}\})\colon \varrho_0^{-\alpha}(y,\tau,\widehat{x},\widehat{t})\mathrm{v}(y,\tau) \in C(\overline{Q}); \|\mathrm{v};\widehat{P}\|'_\alpha =$$
$$= \sup_{(y,\tau)\in\overline{Q}} \varrho_0^{-\alpha}(y,\tau,\widehat{x},\widehat{t})|\mathrm{v}(y,\tau)| < +\infty\}, \qquad -k-n-2 < \alpha \leqslant 0,$$

простору $\mathcal{M}_k(Q,\widehat{P})$.

Наслідок 2. *Існує стала* $\varkappa_0$ *така, що при* $\|\varkappa\|_{L^\infty(Q)} < \varkappa_0$ *крайова задача* (6) *при* $\beta \in (1, 1+2/n]$, $F_1(x,t) = \delta(x-\widehat{x})\delta(t-\widehat{t})$, $F_2(x) = C_0\delta(x-\widehat{x}) + \sum\limits_{j=1}^n C_j \dfrac{\partial}{\partial x_j}\delta(x-\widehat{x})$, $-(n+2)\beta < \alpha \leqslant -n - p_2$, *де* $p_2 = 0$, *якщо* $C_j = 0$, $j = \overline{1,n}$, $p_2 = 1$, *якщо хоч одна із сталих* $C_j \neq 0$, $j = \overline{1,n}$, *має розв'язок у просторі* $\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q},\widehat{P})$ *і при* $k > -\alpha - n - 2$ *цей розв'язок належить* $\mathcal{M}_k(Q,\widehat{P})$.

1. *Лопушанська Г. П., Чмир О. Ю.* Існування та регулярність розв'язків узагальненої нормальної крайової задачі для квазілінійних параболічних систем // Мат. вісн. НТШ. – 2005. – **2**. – С. 123–134.
2. *Лопушанская Г. П.* О решении с помощью матрицы Грина параболической граничной задачи в пространстве обобщенных функций // Укр. мат. журн. – 1986. – **38**, № 6. – С. 795–798.
3. *Лопушанська Г. П.* Крайові задачі у просторі узагальнених функцій D'. – Львів: Вид-во Львів. нац. ун-ту ім. Івана Франка, 2002. – 285 с.
4. *Гупало А. С., Лопушанская Г. П.* Об обобщенных граничных значениях решения однородного параболического уравнения второго порядка // Методы исследования дифференциальных и интегральных операторов. – Киев: Наук. думка, 1989. – С. 54–59.
5. *Ивасишен С. Д.* Матрицы Грина параболических граничных задач. – Киев: Вища шк., 1990. – 200 с.
6. *Ивасишен С. Д.* Сопряженные операторы Грина. Обобщенные решения параболических граничных задач с нормальными граничными условиями // Докл. АН СССР. – 1971. – **197**, № 2. – С. 261–264.
7. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. – Москва: Наука, 1965. – 328 с.
8. *Эйдельман С. Д., Ивасишен С. Д.* Исследование матрицы Грина однородной параболической граничной задачи // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1970. – **23**. – С. 179–234.
9. *Лопушанська Г. П., Чмир О. Ю.* Про деякі властивості спряжених операторів Гріна параболічної крайової задачі // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Мат. – 2004. – Вип. 191–192. – С. 82–88.
10. *Чмир О. Ю.* Про формулювання узагальненої крайової задачі для півлінійного параболічного рівняння // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2003. – Вип. 62. – С. 134–143.
11. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. – Москва: Наука, 1988. – 512 с.

Львівський національний університет
ім. Івана Франка

Надійшло до редакції 20.11.2006