

Рис. 4

мый режим вібраційного навантаження $ИО_k$, $k = \overline{1, n}$. Реалізація запропонованих структурних схем здійснюється в мікросхемному виконанні і не являється громоздкою.

1. Божко А. Е. Воспроизведение вибраций. – Киев: Наук. думка, 1975. – 190 с.
2. Ступель Ф. А. Электромеханические реле. – Харьков: Изд-во Харьков. гос. ун-та, 1956. – 355 с.
3. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. – Москва: Высш. шк., 1978. – 528 с.

Институт проблем машиностроения
им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 06.11.2006

УДК 539.3:538.3:536.21:518.12

© 2007

Член-корреспондент НАН України Я. Й. Бурак, О. Р. Гачкевич,
Б. Д. Дробенко

Визначення параметрів термомеханічного стану термочутливих магнітотвердих феромагнітних тіл за умов дії квазіусталених електромагнітних полів

An approach to the computer simulation of a thermo-mechanical behavior of magnetically hard ferromagnetic solids subjected to quasisteady electromagnetic fields is considered on the basis of the proposed earlier mathematical model of thermo-mechanical processes in polarizable and magnetizable electrically conductive solids exposed to external electromagnetic fields. High temperature induction heating of a hard ferromagnetic cylinder is considered. The numerical results obtained clearly indicate the necessity to account for the heat release due to magnetization, especially for small frequencies and temperatures less than the Curie point.

Електромагнітні поля (ЕМП) широко використовують в сучасних технологіях обробки виробів з електропровідних матеріалів, зокрема, для підвищення їх міцності і надійності.

Відомо моделі опису термомеханічних процесів у твердих тілах за умов дії зовнішнього ЕМП, в яких характеристики матеріалу є постійними. У роботах [1, 2] розвинуто варіант теорії термопружності нетермочутливих феромагнітних тіл (магнітом'яких та магнітотвердих) за умов дії квазіусталених ЕМП. В роботах [3–5] вивчено термомеханічні процеси у термочутливих магнітом'яких феромагнітних тілах за індукційного нагрівання. Однак ефективна методика дослідження термомеханічних процесів у термочутливих магнітотвердих феромагнітних тілах за електромагнітних навантажень з урахуванням гістерезисної залежності між векторами індукції й напруженості магнітного поля в літературі відсутня.

Питанням математичного моделювання термомеханічних процесів у термочутливих тілах з різними здатностями до намагнічування й поляризації при дії зовнішнього ЕМП присвячені роботи [6–9]. Мета даної роботи — на основі запропонованої моделі [6, 7, 9] застосувати розроблену раніше методику [8] до моделювання термомеханічних процесів у термочутливих магнітотвердих феромагнітних тілах, запропонувавши новий аналітичний вираз для гістерезисної залежності між векторами індукції та напруженості магнітного поля, який би дозволяв врахувати специфіку намагнічення таких тіл з урахуванням термочутливості матеріалу.

Розглянемо магнітотверде феромагнітне тіло за умов дії зовнішнього квазіусталеного ЕМП. Прийmemo, що у початковий момент часу ЕМП відсутнє і заданий розподіл T_0 температури у тілі. Тіло перебуває за умов конвективного теплообміну (з коефіцієнтом β) із зовнішнім середовищем (з температурою T_S). Визначимо параметри, які характеризують ЕМП, температуру й напружений стан тіла.

Відповідно до запропонованої раніше математичної моделі [6, 7, 9] для опису електромагнітного, температурного й механічного полів у термочутливому тілі оберемо систему рівнянь Максвелла, теплопровідності та неізотермічної термопружнопластичності з ізотропно-кінематичним зміцненням. Електромеханічні, термоелектричні, магнітострикційні ефекти й вплив рухомості середовища на ЕМП вважаємо неістотними. Залежності індукцій магнітного й електричного полів від відповідних напруженостей приймаємо нелінійними, а самі вектори напруженостей та індукцій — паралельними. Вплив ЕМП на процеси теплопереносу і деформування враховуємо через тепловиділення і об'ємні (пондеромоторні) сили. Всі характеристики матеріалу вважаємо залежними від температури.

Визначення електромагнітного й температурного полів, а також полів переміщень, деформацій та напружень у тілі проводимо за два етапи [6–9]. На першому розв'язуємо зв'язану нестационарну задачу електродинаміки та теплопровідності і визначаємо параметри, які описують електромагнітне й температурне поля, а також пондеромоторні сили як чинники силової дії ЕМП на тіло. Зв'язність рівнянь електродинаміки і теплопровідності зумовлена температурними залежностями характеристик матеріалу і тепловиділеннями, які є джерелами у рівнянні теплопровідності. На другому етапі за відомими температурою і пондеромоторними силами визначаємо напружено-деформований стан тіла.

Застосувавши стандартну процедуру скінченно-елементної дискретизації у варіанті методу зважених залишків [10] до рівнянь Максвелла і теплопровідності, задачу про визначення електромагнітного і температурного полів зводимо до системи звичайних диференціальних рівнянь відносно невідомих значень температури й параметрів, які характеризують ЕМП, у вузлах скінченно-елементного поділу тіла [6, 7, 9]. Методика розв'язування отриманої задачі Коші за допомогою сім'ї простих однокрокових алгоритмів з використанням різних кроків числового диференціювання рівнянь електродинаміки, теплопровідності

і термопружнопластичності за часом описана у роботі [8]. При цьому за джерела у рівнянні теплопровідності приймаємо усереднені за період T_ω електромагнітних коливань тепловиділення [11]

$$Q = T_\omega^{-1} \int_t^{t+T_\omega} \left(\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{H} \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \right) dt, \quad (1)$$

де \mathbf{E} , \mathbf{H} — відповідно вектори напруженості електричного й магнітного полів; \mathbf{B} — магнітна індукція; \mathbf{j} — густина струму; t — час. Відзначимо, що перший доданок в (1) характеризує джоулеві тепловиділення, а другий — тепловиділення, пов'язані з перемагнічуванням.

На основі обчислених на першому етапі розподілів температури і пондеромоторних сил, які приймаємо об'ємними силами у рівняннях рівноваги, проводимо аналіз напружено-деформованого стану тіла з сумісним використанням методів змінних параметрів жорсткості (метод Ньютона) та додаткових напружень [12].

Залежності характеристик матеріалу від температури апроксимуємо за допомогою інтерполяційних сплайнів, побудованих за точками реальних кривих, що описують поведінку матеріалу тіла в ЕМП. Для апроксимації залежностей компонент вектора магнітної індукції від компонент напруженості магнітного поля і температури у тілі використовуємо співвідношення

$$B_i(H_i, T) = \mu_0 H_i + b \Theta(T) \operatorname{arctg} \left(a \left(\sqrt{1 - \chi^2} H_i - \left(\frac{\chi}{\omega} \right) \left(\frac{\partial H_i}{\partial t} \right) \right) \right), \quad (2)$$

де $b = 2B_s/\pi$; $a = (\mu_p - \mu_0)/b$; $\omega = 2\pi\nu$;

$$\chi = \begin{cases} \frac{H_c}{H_{\max}}, & H_0 \leq H_{\max}, \\ \frac{H_0}{H_{\max}}, & H_0 > H_{\max}, \end{cases} \quad \Theta(T) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{T}{T_K} \right)^\vartheta, & T < T_K, \\ 0, & T \geq T_K. \end{cases}$$

Тут H_c (коерцитивна сила); H_{\max} (напруженість магнітного поля, що відповідає гістерезисному насиченню); B_s (індукція насичення); μ_p (початкова магнітна проникність) — параметри, які характеризують петлю гістерезису [13]; ν — частота; H_0 — амплітуда; μ_0 — магнітна проникність вакууму; T_K — температура Кюрі; ϑ — параметр термочутливості матеріалу. Формула (2) одержана на основі відомого аналітичного наближення [2] шляхом його узагальнення на випадок температурної залежності ($\Theta(T)$ характеризує термочутливість матеріалу) [6, 14].

У процесі обчислень магнітну проникність у точках числового інтегрування рівнянь електродинаміки визначаємо на основі аналітичного наближення

$$\mu(|\mathbf{H}|, T) = \mu_0 + \frac{ab\Theta(T)}{\sqrt{1 - \chi^2} \left(1 + a^2 \left(\sqrt{1 - \chi^2} \cdot |\mathbf{H}| - \frac{\chi}{\omega} \frac{\partial |\mathbf{H}|}{\partial t} \right) \right)}. \quad (3)$$

Обчислювальний експеримент показує, що наближення (3) в області малих значень напруженості магнітного поля дає кращі результати, ніж пряме числове диференціювання ($\mu = d|\mathbf{B}|/d|\mathbf{H}|$), а в інтенсивних магнітних полях (з великою амплітудою) — практично збіжні з отриманими через числове диференціювання.

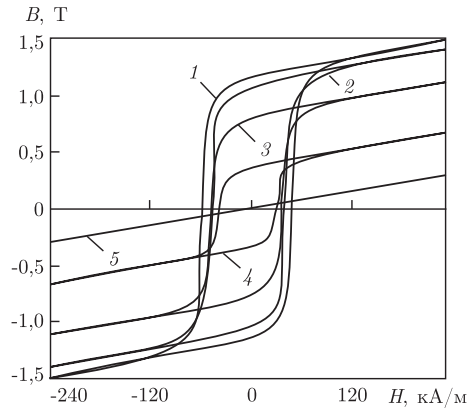


Рис. 1

Як приклад розглянемо процес високотемпературного індукційного нагрівання вільного від механічного навантаження циліндричного тіла радіусом R , виготовленого із сплаву ЮНДК24, поведінку якого у гармонійному ЕМП характеризує досить широка динамічна петля гістерезису [13]. На рис. 1 для даного сплаву наведені залежності магнітної індукції від напруженості магнітного поля для температур $T = 20$ °C (крива 1); 550 °C (крива 2); 700 °C (крива 3); 800 °C (крива 4); 850 °C (крива 5). Як бачимо, при температурі Кюрі (850 °C) сплав втрачає феромагнітні властивості, і залежність між індукцією й напруженістю стає лінійною з коефіцієнтом пропорційності μ_0 . Точність наближення (2) експериментальної кривої для розглядуваного сплаву в області температур, нижчих за точку Кюрі (при $\Theta(T) = 1$), досліджена в роботі [11].

Нехай на поверхні тіла задано вектор напруженості магнітного поля

$$\mathbf{H} = (0, 0, H_0 \sin(2\pi\nu t)). \quad (4)$$

Кількісні дослідження проводили за таких значень параметрів:

$$R = 0,01 \text{ м}; \quad H_0 = 240 \text{ кА/м}; \quad T_0 = T_S = 20 \text{ °C}; \\ \beta = 13 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}; \quad \nu = 0,05 \div 50 \text{ кГц}; \quad \vartheta = 6.$$

На рис. 2 для прикладу схематично показані криві залежності магнітної проникності від напруженості магнітного поля для точок з амплітудами напруженості поля H_{01} , H_{02} , H_{03} , H_{04} відповідно. Обчислення починали з основної кривої намагнічування. Стартуючи з точки C_0 , на початку першого періоду магнітна проникність у кожній точці інтегрування змінювалася в часі відповідно до основної кривої $C_0 \dots A_3 A_4$. При досягненні напруженістю магнітного поля в розглядуваній точці свого максимального значення (нехай це буде, наприклад, H_{03}) подальша зміна магнітної проникності в даній точці в часі відбувалася відповідно до кривої $A_3 B_3 C'_3 A'_3 B_3$. Із завершенням першого періоду коливань електромагнітної хвилі уточнювали амплітуду напруженості магнітного поля в кожній точці тіла (як піврізницю максимального і мінімального значень напруженості поля протягом періоду). Відповідно до наново отриманих значень амплітуди напруженості поля в кожній точці з використанням співвідношення (2) будували свою криву намагнічування, яка служила основою для розрахунків протягом наступного періоду.

Аналіз одержаних результатів показав, що при частотах $\nu \leq 1$ кГц магнітне поле вже при температурі $T = T_0$ практично повністю пронизує розглядуване циліндричне тіло, в той

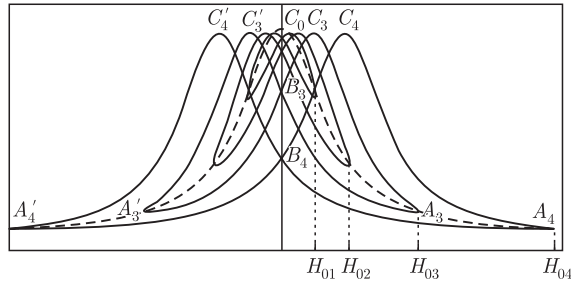


Рис. 2

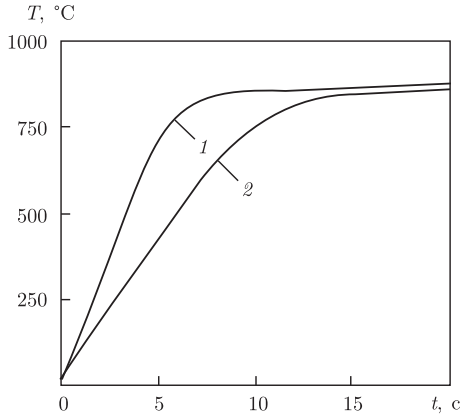


Рис. 3

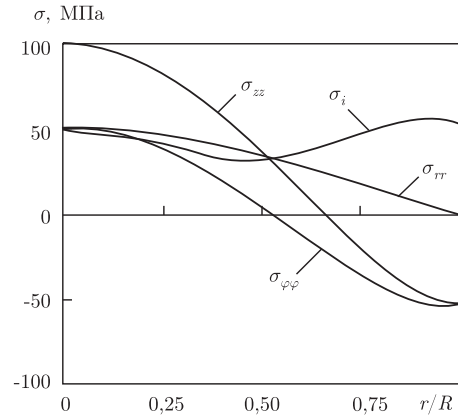


Рис. 4

час як для високих частот на початку нагріву характерним є скін-ефект, зокрема, для $\nu = 50$ кГц глибина проникнення поля складає величину порядку $0,1R$. З прогріванням тіла глибина проникнення електромагнітного поля в тіло зростає.

При використанні низьких частот основні тепловиділення пов'язані з перемагнічуванням. Наприклад, для $\nu = 50$ Гц максимальні значення джоулевих тепловиділень складають лише 83% від максимальних тепловиділень, пов'язаних з перемагнічуванням. Із збільшенням частоти ситуація змінюється. Вже при частоті 0,5 кГц сумарний вклад тепловиділень, пов'язаних з перемагнічуванням, співмірний з джоулевими. При вищих частотах вплив перемагнічування на тепловиділення зменшується ще більше і при частоті 50 кГц складає величину порядку 17% від джоулевих.

З наближенням температури до точки Кюрі сплав втрачає феромагнітні властивості і подальше нагрівання відбувається лише за рахунок джоулевих тепловиділень, величина яких зменшується. На рис. 3 наведені зміни температури поверхні циліндра в часі для частоти 0,5 кГц, одержані відповідно з урахуванням тепловиділень, пов'язаних з перемагнічуванням (крива 1), і без (крива 2). Отримані результати узгоджуються з відомими експериментальними даними про збільшення глибини проникнення магнітного поля з ростом температури і сповільнення швидкості нагріву з досягненням температури Кюрі [15].

Рис. 4 ілюструє розподіл кільцевих $\sigma_{\varphi\varphi}$, осевих σ_{zz} , радіальних σ_{rr} та інтенсивності σ_i напружень у циліндрі в момент виникнення максимальних напружень при нагріві ($t = 1,01$ с) за частоти 0,5 кГц. В подальшому (з прогріванням циліндра по товщині) максимальні напруження поступово зменшуються, складаючи всього 2 МПа у момент часу $t = 10$ с.

Отже, запропонована методика дозволяє обчислювати електромагнітні, температурні і механічні поля в термочутливих тілах з гістерезисною залежністю між векторами індукції та напруженості магнітного поля. Аналіз одержаних результатів вказує на необхідність врахування тепловиділень, пов'язаних з перемагнічуванням, особливо за малих частот і в діапазонах температур, істотно нижчих за точку Кюрі.

Запропоновану методику можна використати для побудови раціональних режимів індукційного нагрівання виробів з електропровідних матеріалів з різними здатностями до намагнічування і поляризації за різноманітними критеріями, зокрема, рівномірності нагрівання, мінімізації часу нагрівання за обмежень на напружений стан, або відхилення напружень у виробі від заданих.

1. Бурак Я. И., Гачкевич А. Р., Солодяк М. Т. Термоупругость электропроводных магнитомягких тел во внешних установившихся электромагнитных полях // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1987. – № 2. – С. 44–48.
2. Бурак Я. И., Гачкевич А. Р., Солодяк М. Т. Термоупругость электропроводных магнитотвердых тел во внешних установившихся электромагнитных полях // Там же. – 1988. – № 5. – С. 26–29.
3. Bay F., Labbe V., Favennec Y., Chenot J. L. A numerical model for induction heating processes coupling electromagnetism and thermomechanics // Internat. J. for Numeric. Methods in Engineering. – 2003. – 58, No 6. – P. 839–867.
4. Pantelyat I. G. Numerical analysis of impulse electromagnetic fields in soft ferromagnetic materials // Internat. J. of Appl. Electromagnetics and Mechanics. – 1999. – 10. – P. 185–192.
5. Pantelyat I. G., Zgraja J. Inductive heating of large steel disks: coupled electromagnetic, thermal and mechanical simulation // Ibid. – P. 303–313.
6. Гачкевич О. Р., Дробенко Б. Д., Казарян К. Б. Математичне моделювання термомеханічних процесів в осесиметричних електропровідних тілах за електромагнітних навантажень // Машинознавство. – 2003. – № 4. – С. 3–7.
7. Drobenco B., Nachkevych O., Kournyts'kyi T. A mathematical simulation of high temperature induction heating of electroconductive solids // Internat. J. of Heat and Mass Transfer. – 2007. – 50. – P. 616–624.
8. Гачкевич О. Р., Дробенко Б. Д. Методика числового дослідження електромагнітних, температурних і механічних полів при високотемпературній індукційній обробці електропровідних тіл // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2006. – 49, № 4. – С. 146–156.
9. Гачкевич О. Р., Дробенко Б. Д. Математичне моделювання індукційного нагріву електропровідних тіл // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. – 2004. – Вип. 8. – С. 97–111.
10. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. – Москва: Мир, 1986. – 319 с.
11. Гачкевич А. Р. Термомеханика электропроводных тел при воздействии квазиустановившихся электромагнитных полей. – Киев: Наук. думка, 1992. – 192 с.
12. Будз С. Ф., Дробенко Б. Д., Михайлишин В. С. Компьютерное моделирование термоупругопластического поведения механических систем // Львов, 1992. – 60 с. – (Препринт / АН УССР, Ин-т прикл. пробл. мех. и мат.; 34–89).
13. Богородский Н. П., Пасынков В. В., Тареев Б. М. Электротехнические материалы. – Ленинград: Энергия, 1977. – 352 с.
14. Skoczkowski T., Kalus M. The mathematical model of induction heating of ferromagnetic pipes // IEEE Trans. on magnetics. – 1989. – 25, No 3. – P. 2745–2750.
15. Головин Г. Ф., Замятнин М. М. Высокочастотная термическая обработка. – Ленинград: Машиностроение, 1990. – 239 с.

*Інститут прикладних проблем механіки
і математики ім. Я. С. Підстригача
НАН України, Львів*

Надійшло до редакції 17.01.2007