Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

8 • 2007

МАТЕМАТИКА

УДК 517.54

А. К. Бахтин, В. Е. Вьюн, член-корреспондент НАН Украины
Ю. Ю. Трохимчук

Неравенства для внутренних радиусов неналегающих областей

This article is devoted to solving the new extremal problems on non-overlapping domains with free poles on rays and to the generalization of some results known before.

Работа посвящена решению новых экстремальных задач о неналегающих областях со свободными полюсами на лучах. Возникновение данного направления геометрической теории функций комплексного переменного связано с классической работой М. А. Лаврентьева [1], в которой была решена задача о произведении конформных радиусов двух взаимно непересекающихся областей. Эта задача вызвала интерес целой плеяды математиков и сейчас задачи о неналегающих областях составляют активно развивающееся направление (см., например, [1–9]).

Сформулируем основные результаты работы. Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ — множества, соответственно, натуральных и вещественных чисел, $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$, $\mathbb{C}$ — плоскость комплексных чисел, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \bigcup \{\infty\}$ — ее одноточечная компактификация. Обозначим через $r(B, a)$ внутренний радиус области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ относительно точки $a \in B$ (см., например, [2–4]), а через $\operatorname{cap} E$ — логарифмическую емкость множества E (см., например, [2–4]), $\chi(t) := (1/2)(t + t^{-1})$.

Пусть $n, m \in \mathbb{N}$. В плоскости $\mathbb{C}$ рассмотрим (n, m)-лучевую систему точек $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, m}$, такую, что $0 < |a_{k,1}| < |a_{k,2}| < \dots < |a_{k,m}| < \infty$; $\arg a_{k,1} = \arg a_{k,2} = \dots = \arg a_{k,m} := \theta_k$; $0 = \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n < \theta_{n+1} = 2\pi$. Для каждой (n, m)-лучевой системы точек определим набор величин $\alpha_k := (1/\pi)(\theta_{k+1} - \theta_k)$ при $k = \overline{1, n}$ ($\alpha_{n+1} := \alpha_1$, $\alpha_0 := \alpha_n$). (n, m)-Лучевую систему точек $A_{n,m}$ будем называть равнолучевой, если при каждом $k = \overline{1, n}$ $\alpha_k = 2/n$. Определим набор областей $\Lambda_k := \{w \in \mathbb{C} \backslash \{0\} \colon \theta_k < \arg w < \theta_{k+1}\}$ для всех $k = \overline{1, n}$. Ясно, что равнолучевой системе точек $A_{n,m}$ соответствует набор областей $\Lambda_k^0 := \{w \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \colon (2\pi/n)(k - 1) < \arg w < (2\pi/n)k\}$, $k = \overline{1, n}$.

Для произвольной (n, m)-лучевой системы точек $A_{n,m}$ такой, что $m = 2s - 1$ ($s \in \mathbb{N}$), рассмотрим "управляющие" функционалы

$$M^{(1)}(A_{n,m}) := \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{s} \left[\chi\left(|a_{k,2p-1}|^{1/\alpha_k}\right) \chi\left(|a_{k,2p-1}|^{1/\alpha_{k-1}}\right)\right]^{1/2} |a_{k,2p-1}|,$$

$$M^{(2)}(A_{n,m}) := \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{s-1}\bigl[\chi\bigl(|a_{k,2p}|^{1/\alpha_k}\bigr)\chi\bigl(|a_{k,2p}|^{1/\alpha_{k-1}}\bigr)\bigr]^{1/2}|a_{k,2p}|.$$

Пусть $\zeta_k(w)$ — однозначная ветвь функции $\zeta(w) = -i(e^{-i\theta_k}w)^{1/\alpha_k}$, которая реализует однолистное конформное отображение области Λ_k на полуплоскость $\operatorname{Re}\zeta > 0$. Тогда функция $\eta_k(w) := \dfrac{1-\zeta_k(w)}{1+\zeta_k(w)}$ однолистно и конформно отображает Λ_k на единичный круг, причем $\eta_k(a_{k,p}) =: \gamma_{k,p}^{(1)}$, $\eta_k(a_{k+1,p}) =: \gamma_{k,p}^{(2)}$, $\gamma_{0,p}^{(2)} := \gamma_{n,p}^{(2)}$, $\eta_k(0) =: 1$, $\eta_k(\infty) =: -1$ $(k = \overline{1,n},\ p = \overline{1,m})$.

Пусть $\{B_k\}_{k=1}^{n}$ — система взаимно непересекающихся областей. Область, полученную выбрасыванием из $\overline{\mathbb{C}}$ всех существенных компонент связности множества $\overline{\mathbb{C}}\setminus B_k$ будем обозначать $\widetilde{B}_k$. Ясно, что $B_k \subset \widetilde{B}_k$ при всех $k = 1, 2, \ldots, n$ и $\{\widetilde{B}_k\}_{k=1}^{n}$ — система конечно связных взаимно непересекающихся областей без изолированных граничных точек. Переход от $\{B_k\}_{k=1}^{n}$ к $\{\widetilde{B}_k\}_{k=1}^{n}$ называется операцией заполнения несущественных граничных компонент (см., например, [9, 10]).

Далее в работе будем рассматривать только равнолучевые системы точек. Пусть α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{R}^+$ и пусть точки 1, i, -1, $-i$ и области G_1^0, G_2^0, G_3^0, G_4^0 являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала

$$Q_1(w)dw^2 = \frac{(\alpha_2-\alpha_1)w^4 - 2(\alpha_2+\alpha_1)w^2 + (\alpha_2-\alpha_1)}{(w^4-1)^2}dw^2. \tag{1}$$

Во введенных выше обозначениях справедлива следующая

Теорема. *Пусть n, m, $s \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, $m = 2s-1$, α, $\beta \in \mathbb{R}^+$. Тогда для любой (n,m)-равнолучевой системы точек $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$ и для произвольного набора взаимно непересекающихся областей B_0, $B_{k,p}$, B_∞ таких, что $0 \in B_0$, $a_{k,p} \in B_{k,p}$, $\infty \in B_\infty$, справедливо неравенство*

$$[r(B_0,0)r(B_\infty,\infty)]^{n^2\alpha/4}\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{s-1} r^{\beta}(B_{k,2p-1},a_{k,2p-1})r^{\alpha}(B_{k,2p},a_{k,2p})r^{\beta}(B_{k,m},a_{k,m}) \leqslant$$
$$\leqslant \left(\frac{n}{4}\right)^{n\alpha}\left(\frac{2}{n(m+1)}\right)^{((m+1)/2)n(\alpha+\beta)}[M^{(1)}(A_{n,m})]^{\beta}[M^{(2)}(A_{n,m})]^{\alpha}\times$$
$$\times [r^{\alpha}(G_1^0,1)r^{\beta}(G_2^0,i)r^{\alpha}(G_3^0,-1)r^{\beta}(G_4^0,-i)]^{n(m+1)/4}, \tag{2}$$

знак равенства в котором достигается в том и только в том случае, когда точки 0, $a_{k,p}$, ∞ и области $\widetilde{B}_0$, $\widetilde{B}_{k,p}$, $\widetilde{B}_\infty$ являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = w^{n-2}(1+w^n)^{m-1}\times$$
$$\times\frac{(\beta-\alpha)((1-iw^{n/2})^{2m+2}+(1+iw^{n/2})^{2m+2}) - 2(\beta+\alpha)(1+w^n)^{m+1}}{[(1-iw^{n/2})^{2m+2}-(1+iw^{n/2})^{2m+2}]^2}dw^2 \tag{3}$$

и $\operatorname{cap}\widetilde{B}_0\setminus B_0 = 0$, $\operatorname{cap}\widetilde{B}_{k,p}\setminus B_{k,p} = 0$, $\operatorname{cap}\widetilde{B}_\infty\setminus B_\infty = 0$ *$(k = \overline{1,n},\ p = \overline{1,m})$.*

Эта задача является обобщением некоторых результатов работы [6].

Доказательство базируется на применении кусочно-разделяющего преобразования, предложенного В. Н. Дубининым [4], и следует схеме, предложенной в работах [4–9]. Семейство функций $\eta_k(w)$ является допустимым для кусочно-разделяющего преобразования областей $B_{k,p}$ относительно семейства углов Λ_k^0 ($k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$). Для произвольного множества $B\subset\overline{\mathbb{C}}$ обозначим $B^*:=\{w\in\overline{\mathbb{C}}\colon 1/\overline{w}\in B\}$. Аналогично работам [6, 8, 9], получаем асимптотические равенства

$$r(B_{k,p},a_{k,p})\leqslant\left\{\frac{r(\Gamma_{k,p}^{(1)},\gamma_{k,p}^{(1)})r(\Gamma_{k,p}^{(2)},\gamma_{k,p}^{(2)})}{\left[\dfrac{2}{n}\chi(|a_{k,p}|^{n/2})|a_{k,p}|\right]^{-2}}\right\}^{1/2},\qquad k=\overline{1,n},\qquad p=\overline{1,m}; \tag{4}$$

$$r(B_0,0)\leqslant\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}r(\Gamma_0^{(k)},1)\right)^{2/n^2},\qquad r(B_\infty,\infty)\leqslant\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}r(\Gamma_\infty^{(k)},-1)\right)^{2/n^2}, \tag{5}$$

где область $\Gamma_{k,p}^{(1)}$ обозначает связную компоненту множества $\eta_k(B_{k,p}\bigcap\overline{\Lambda}_k^0)\bigcup(\eta_k(B_{k,p}\bigcap\overline{\Lambda}_k^0))^*$, содержащую точку $\gamma_{k,p}^{(1)}$; а $\Gamma_{k,p}^{(2)}$ — связную компоненту множества $\eta_k(B_{k,p}\bigcap\overline{\Lambda}_{k-1}^0)\bigcup$ $\bigcup(\eta_k(B_{k,p}\bigcap\overline{\Lambda}_{k-1}^0))^*$, содержащую точку $\gamma_{k,p}^{(2)}$ ($k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$). Аналогично $\Gamma_0^{(k)}$ обозначает связную компоненту множества $\eta_k(B_0\bigcap\overline{\Lambda}_k^0)\bigcup(\eta_k(B_0\bigcap\overline{\Lambda}_k^0))^*$, содержащую точку $\gamma=1$; а $\Gamma_\infty^{(k)}$ — связную компоненту множества $\eta_k(B_\infty\bigcap\overline{\Lambda}_k^0)\bigcup(\eta_k(B_\infty\bigcap\overline{\Lambda}_k^0))^*$, содержащую точку $\gamma=-1$ ($k=\overline{1,n}$).

Из неравенств (4), (5) следует выражение

$$[r(B_0,0)r(B_\infty,\infty)]^{n^2\alpha/4}\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{s-1}r^\beta(B_{k,2p-1},a_{k,2p-1})r^\alpha(B_{k,2p},a_{k,2p})r^\beta(B_{k,m},a_{k,m})\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{n}{4}\right)^{n\alpha}\left(\frac{2}{n}\right)^{ns(\alpha+\beta)}[M^{(1)}(A_{n,m})]^\beta[M^{(2)}(A_{n,m})]^\alpha\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{n}\Bigg[r^\alpha(\Gamma_0^{(k)},1)r^\alpha(\Gamma_\infty^{(k)},-1)\prod_{p=1}^{s-1}r^\beta(\Gamma_{k,2p-1}^{(1)},\gamma_{k,2p-1}^{(1)})r^\alpha(\Gamma_{k,2p}^{(1)},\gamma_{k,2p}^{(1)})\times$$

$$\times r^\beta(\Gamma_{k,m}^{(1)},\gamma_{k,m}^{(1)})r^\beta(\Gamma_{k,2p-1}^{(2)},\gamma_{k,2p-1}^{(2)})r^\alpha(\Gamma_{k,2p}^{(2)},\gamma_{k,2p}^{(2)})r^\beta(\Gamma_{k,m}^{(2)},\gamma_{k,m}^{(2)})\Bigg]^{1/2}. \tag{6}$$

Из способа построения областей $\Gamma_{k,p}^{(q)}$, $\Gamma_0^{(k)}$, $\Gamma_\infty^{(k)}$ и соответствующих точек $\gamma_{k,p}^{(q)}$, 1, -1 следует, что для каждого k_0, $k_0=1,2,\ldots,n$ указанные области взаимно не пересекаются при всех $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$ и $q=1,2$, а точки образуют систему $(2m+2)$ точек на единичной окружности. Отсюда, с учетом теоремы 2 из работы [6], получаем

$$r^\alpha(\Gamma_0^{(k)},1)r^\alpha(\Gamma_\infty^{(k)},-1)\prod_{p=1}^{s-1}r^\beta(\Gamma_{k,2p-1}^{(1)},\gamma_{k,2p-1}^{(1)})r^\alpha(\Gamma_{k,2p}^{(1)},\gamma_{k,2p}^{(1)})r^\beta(\Gamma_{k,m}^{(1)},\gamma_{k,m}^{(1)})\times$$

$$\times r^\beta(\Gamma_{k,2p-1}^{(2)},\gamma_{k,2p-1}^{(2)})r^\alpha(\Gamma_{k,2p}^{(2)},\gamma_{k,2p}^{(2)})r^\beta(\Gamma_{k,m}^{(2)},\gamma_{k,m}^{(2)})\leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{m+1}\right)^{(m+1)(\alpha+\beta)} [r^{\alpha}(G_1^0, 1) r^{\beta}(G_2^0, i) r^{\alpha}(G_3^0, -1) r^{\beta}(G_4^0, -i)]^{(m+1)/2},$$

которое, в свою очередь, с учетом неравенства (6), приводит к окончательному неравенству (2). Утверждение о знаке равенства проверяется непосредственно. Теорема доказана.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Государственной программы Украины № 0107U002027.

1. *Лаврентьев М. А.* К теории конформных отображений // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. – 1934. – **5**. – С. 159–245.
2. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – Москва: Наука, 1966. – 628 с.
3. *Дженкинс Дж. А.* Однолистные функции и конформные отображения. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 256 с.
4. *Дубинин В. Н.* Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. – 1994. – **49**, № 1. – (295). – С. 3–76.
5. *Кузьмина Г. В.* Метод экстремальной метрики в задачах о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей при наличии свободных параметров // Зап. науч. сем. ПОМИ. – 2003. – **302**. – С. 52–67.
6. *Бахтин А. К., Таргонский А. Л.* Некоторые экстремальные задачи на классе неналегающих областей // Комплексний аналіз і течії з вільними границями: Зб. праць Ін-ту мат. НАН України. – Київ: Ін-т мат. НАН України, 2004. – **1**, № 3. – С. 243–253.
7. *Бахтин А. К.* Экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами на окружности // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 7. – С. 867–886.
8. *Вьюн В. Е.* Экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами на лучах // Тези доповідей. Міжнар. конф. “Математичний аналіз і диференціальні рівняння та їх застосування”. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2006. – С. 19–20.
9. *Бахтин А. К.* Кусочно-разделяющее преобразование и экстремальные задачи со свободными полюсами на лучах // Доп. НАН України. – 2004. – № 12. – С. 7–13.
10. *Трохимчук Ю. Ю.* Устранимые особенности аналитических функций. – Киев: Наук. думка, 1992. – 224 с.

Институт математики НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 30.04.2007