УДК 519.6



**О. М. Литвин**

# Апроксимація звичайних диференціальних операторів

*(Представлено академіком НАН України І. В. Сергієнком)*

*Basic statements of the theory of the approximation of ordinary differential operators by other ordinary differential operators are given. Approximating operators are not the equal on the given system of functions (functional knots).*

Теорія наближення функцій однієї та багатьох змінних на даний час має в своєму розпорядженні широкий набір методів наближення — інтерполювання, інтерлінацію, інтерфлетацію, апроксимацію, мішану апроксимацію тощо [1, 2]. У той же час теорія наближення операторів розвинута значно менше. Зокрема, теорія інтерполювання операторів, яка розвинута в працях [3–9], фактично дає наближення, яке можна вважати найбільш ефективним лише для інтегральних операторів вигляду

$$Au(x) = \int\limits_G K(x, \xi, u(\xi))d\xi.$$

Наприклад, у цій теорії не використовується класична постановка задачі в такому вигляді: для наближення оператора $Au(x) = f(x, D)u(x)$, $D = d/dx$ треба знайти інший звичайний диференціальний оператор $L_N(x, D)$ відомої конструкції (лінійний або нелінійний поліноміального типу тощо) за допомогою інформації, що $Au_\beta(x) = \gamma_\beta(x)$, $0 \leqslant \beta \leqslant N$. Функціональні вузли $u_\beta(x)$, $0 \leqslant \beta \leqslant N$, та функції $\gamma_\beta(x)$, $0 \leqslant \beta \leqslant N$, вважаються відомими. У роботах автора [10, 11] дано розв'язок цієї задачі для звичайних диференціальних операторів та диференціальних операторів з частинними похідними відповідно.

На практиці функції $\gamma_\beta(x)$, $0 \leqslant \beta \leqslant M$, можуть бути заданими з похибкою. Крім того, може виникнути ситуація, коли число вузлів $u_\beta(x)$, $0 \leqslant \beta \leqslant M$, та функцій $\gamma_\beta(x)$, $0 \leqslant \beta \leqslant M$, не дорівнює числу $N$ невідомих коефіцієнтів наближуючого диференціального оператора $L_N(x, D)$. Тобто актуальною є така задача. Треба знайти звичайний диференціальний оператор $L_N(x, D)$ апроксимативного типу відомої конструкції за допомогою інформації, що $Au_\beta(x) = \gamma_\beta(x)$, $0 \leqslant \beta \leqslant M$, $M \neq N$. Слова "оператор $L_N = L_N(x, D)$ є оператором апроксимативного типу" означають, що $L_N u_\beta(x) \neq \gamma_\beta(x)$, $0 \leqslant \beta \leqslant M$; $x \in [x_1, x_2]$.

**1. Постановка проблеми.** У даній роботі розв'язується така задача. Деякий звичайний диференціальний оператор $A\colon U \to \Gamma$ (взагалі кажучи, невідомий) задається інтерполяційними даними $Au_\beta(x) = \gamma_\beta(x)$, $0 \leqslant \beta \leqslant M$, де функціональні вузли $u_\beta(x) \in U$, $0 \leqslant \beta \leqslant n$, і функції $\gamma_\beta(x) \in \Gamma$, $0 \leqslant \beta \leqslant N$, вважаються заданими елементами деяких функціональних просторів $U$, $\Gamma$ відповідно. Треба побудувати за допомогою цієї інформації інший диференціальний оператор (лінійний або нелінійний), який давав би найкраще наближення до оператора $A$ в тому або іншому сенсі. Коефіцієнти наближуючого оператора знаходимо з умови мінімізації суми квадратів відхилень наближуваного і наближуючого операторів на вказаній системі функціональних вузлів. Простори $U$, $\Gamma$ вважаємо просторами $C^r[t_1, t_2]$ диференційовних скалярних функцій (з різними параметрами $r$), заданих на деякому інтервалі $[t_1, t_2]$.

Деякі важливі результати з побудови поліноміальних апроксимуючих операторів у вигляді операторних поліномів $P_n$ степеня $n$, визначених на множині функцій $u \in X$ із значеннями у просторі $Y$ ($X$ та $Y$ деякі лінійні простори, наприклад гільбертові) наведені в працях [3–9]. Найбільше уваги приділено випадку, коли

$$P_n u = k_0(t) + \int\limits_{\Omega_1} k_1(t, z_1) u(z_1) dz_1 + \int\limits_{\Omega_1}\int\limits_{\Omega_1} k_2(t, z_1, z_2) u(z_1) u(z_2) dz_1 dz_2 + \cdots$$
$$+ \int\limits_{\Omega_1} (n) \int\limits_{\Omega_1} k_n(t, z_1, \ldots, z_n) u(z_1) \cdots u(z_n) dz_1 \cdots dz_n,$$

де $k_0(t)$, $k_p(t, z_1, \ldots, z_p)$, $p = \overline{1, n}$, — неперервні та симетричні функції своїх змінних. Тобто у цитованих роботах [3–9] наближуючий оператор є операторним поліномом, а не диференціальним оператором, навіть якщо наближуваний оператор $A$ є диференціальним оператором. У той же час існують практичні задачі, у яких наближуваний диференціальний оператор доцільно замінити іншим диференціальним оператором більш простої конструкції без виконання інтерполяційних умов.

Метою даної роботи є побудова основ теорії апроксимації звичайних диференціальних операторів $A(x, D)$ звичайними лінійними диференціальними операторами, відмінної від теорії наближення операторів, дослідженої в [3–9]. Наближуваний і апроксимуючий оператори є звичайними диференціальними операторами. При цьому використовується інформація (1) про наближуваний оператор, але не вимагається, щоб наближуваний і апроксимуючий оператори збігалися на заданій системі функціональних вузлів,

**2. Апроксимація звичайних диференціальних операторів.** *Апроксимація лінійними диференціальними операторами.* Припустимо, що $M \in N$, $A(x, D)$ — деякий звичайний диференціальний оператор, інформація про нього задана таким чином:

$$A(x, D) u_\beta(x) = \gamma_\beta(x), \qquad 0 \leqslant \beta \leqslant M; \tag{1}$$

$$\sum_{\beta=0}^{n} \mid \gamma_\beta(x) \mid \neq 0, \qquad x \in [x_1, x_2] \subseteq R. \tag{2}$$

Треба побудувати звичайний лінійний диференціальний оператор $N$-го порядку

$$L_N(x, D) u(x) = \sum_{0 \leqslant \alpha \leqslant N} a_\alpha(x) D^\alpha u(x), \qquad D^0 u(x) = u(x), \tag{3}$$

невідомі коефіцієнти $a_\alpha(x)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant N$, якого знаходяться з умови

$$\sum_{\beta=0}^{M} (L_{M,N}(x, D) u_\beta(x) - \gamma_\beta(x))^2 \to \min_{a_0, \ldots, a_N}. \tag{4}$$

Нижче дамо явний аналітичний вираз для такого оператора $L_{M,N}(x, D) u(x)$. Наведено також аналітичний вираз для нелінійного оператора $\overline{L}_N(x, D) u(x) = \sum\limits_{\alpha=0}^{N} a_\alpha(x) (D_u(x))^\alpha$ наближуючого оператор $A(x, D)$ за вказаним критерієм (4).

**Теорема 1.** *Оператор $L_{M,N}(x,D)u(x)$, який дає розв'язок задачі* (4), *можна зобразити у формі*

$$L_{M,N}(x,D)u(x) = \Gamma(x)W^T(x)[W(x)W^T(x)]^{-1}[ID\cdots D^N]^T u(x), \tag{5}$$

*де $I$ — тотожний оператор, $\Gamma(x) = [\gamma_0(x) \ldots \gamma_M(x)]$ — матриця-рядок розмірності $1 \times (M+1)$, елементами якої є результати дії оператора $A$ на вузли $u_0(x),\ldots,u_M(x)$ на деякій множині $x \in [x_1,x_2]$, матриця $W(x)$ розмірності $(M+1)\times(N+1)$ визначається таким чином:*

$$W(x) = [D^\alpha u_\beta(x)]_{\beta=\overline{0,M}}^{\alpha=\overline{0,N}} = \begin{bmatrix} u_0(x) & \ldots & D^N u_0(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ u_M(x) & \ldots & D^N u_M(x)\end{bmatrix}^T .$$

Доведення теореми 1 використовує запис оператора $L_N(x,D)u(x)$ у вигляді

$$L_N(x,D)u(x) = a(x)[ID\cdots D^N]^T u(x), \tag{6}$$

де $a(x) = [a_0(x)\cdots a_N(x)]$, а також те, що умова (4) є формулюванням методу найменших квадратів для розв'язання системи

$$L_N(x,D)u_\beta(x) = \gamma_\beta(x), \qquad 0 \leqslant \beta \leqslant M, \tag{7}$$

яку можна записати у матричній формі $a(x)W(x) = \Gamma(x)$, звідки

$$a(x) = \Gamma(x)W^T(x)(W(x)W^T(x))^{-1},$$

що і доводить рівність (5).

**Теорема 2.** *Якщо матриця $W(x)$ є квадратною, тобто $M = N$, і виконується умова $\det W(x) \neq 0$, $x \in [x_1,x_2]$, то оператор $L_{N,N}(x,D)u(x)$ може бути записаний у вигляді*

$$L_{N,N}(x,D)u(x) = \Gamma(x)[W(x)]^{-1}[ID\cdots D^N]^T u(x).$$

*У цьому випадку оператори $L_{N,N}(x,D)u(x)$ є операторами інтерполювання, які досліджувалися у роботі [10]: $L_{N,N}(x,D)u_\beta(x) = \gamma_\beta(x)$, $0 \leqslant \beta \leqslant N$.*

*Апроксимація нелінійними диференціальними операторами спеціального виду.* Теорема 1 повністю розв'язує задачу побудови шуканого звичайного лінійного диференціального оператора, що є оператором найкращого наближення у сенсі (4). Але задача операторної апроксимації, як і задача функціональної апроксимації, має неєдиний розв'язок. У теоремі 3 дано аналітичний вираз оператора

$$\overline{L}_N u(x) = \sum_{\alpha=0}^{N} w_\alpha(x)(Du(x))^\alpha,$$

що є оператором найкращого наближення оператора $A$ у сенсі (4). Ці оператори $\overline{L}_n u(x) = \overline{L}_n(x, Du(x))$ є нелінійними диференціальними операторами першого порядку.

**Теорема 3.** *Оператор* $\overline{L}_{M,N}(x, Du(x))$, *що є розв'язком задачі*

$$\sum_{\beta=0}^{M}(\overline{L}_{M,N}(x, D)u_\beta(x) - \gamma_\beta(x))^2 \to \min_{a_0,\ldots,a_N}, \tag{8}$$

*може бути зображений у вигляді*

$$\overline{L}_{M,N}(x, Du(x)) = [1 Du(x) \cdots (Du(x))^N]((Z_{M,N})^T Z_{M,N})^{-1}(Z_{M,N})^T\Gamma(x), \tag{9}$$

*де*

$$Z_{M,N} = Z_{M,N}(x) = \begin{bmatrix} 1 & Du_0(x) & \ldots & (Du_0(x))^N \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & Du_{M-1}(x) & \ldots & (Du_{M-1}(x))^N \\ 1 & Du_M(x) & \ldots & (Du_M(x))^N \end{bmatrix},$$

$$\Gamma(x) = [\gamma_0(x) \ldots \gamma_M(x)]^T,$$

*якщо вузли* $u_0(x), \ldots, u_M(x)$ *задовольняють умову*

$$\det((Z_{M,N}(x))^T Z_{M,N}(x)) \neq 0, \qquad x \in [x_1, x_2].$$

Доведення теореми 3 використовує запис оператора $\overline{L}_{M,N}u(x)$ у вигляді

$$\overline{L}_{M,N}u(x) = [1 Du(x) \cdots (Du(x))^N]w(x),$$

де $w(x) = [a_0(x)a_1(x) \cdots a_N(x)]^T$, а також те, що умова (8) є формулюванням методу найменших квадратів для розв'язання системи

$$\overline{L}_{M,N}(x, D)u_\beta(x) = \gamma_\beta(x), \qquad 0 \leqslant \beta \leqslant M,$$

яку можна записати у матричній формі $Z_{M,N}w(x) = \Gamma(x)$, звідки

$$w(x) = (Z_{M,N}^T Z_{M,N})^{-1} Z_{M,N}^T \Gamma(x),$$

що і доводить рівність (9).

**Теорема 4.** *Якщо матриця* $Z_{M,N}(x)$ *є квадратною, тобто* $M = N$, *і система вузлів вибрана так, що виконується умова*

$$\det Z_{M,N}(x) \neq 0, \qquad x \in [x_1, x_2],$$

*то оператор* $\overline{L}_{N,N}(x, D)u(x)$ *може бути записаний у вигляді*

$$\overline{L}_{N,N}(x, D)u(x) = [1 Du(x) \cdots (Du(x))^N][Z_{M,N}(x)]^{-1}\Gamma(x). \tag{10}$$

*У цьому випадку оператор* $\overline{L}_{N,N}(x, Du(x))$ *є оператором інтерполювання, який досліджувався у роботі [10], тобто він має властивості*

$$\overline{L}_{N,N}(x, Du_\beta(x)) = \gamma_\beta(x), \qquad 0 \leqslant \beta \leqslant N.$$

**3. Приклад.** Хай $A(x,D)=(D^2)^3=(d^2/dx^2)^3$; $N=2$; $M=3$; $L_{3,2}(x,D)u(x)=(a_0(x)+ a_1(x)D+a_2(x)D^2)u(x)$. У випадку $u_0(x)=1$; $u_1(x)=x$, $u_2(x)=x^2/2$, $u_3(x)=x^3/6$; $\gamma_0(x)=0$; $\gamma_1(x)=0$, $\gamma_2(x)=1$, $\gamma_3(x)=x^3$ розвязок системи (7) дає

$$L_{3,2}(x,D)u(x)=\frac{(6x^4(x^2-1)-6x^3(-3+2x^2+x^4)D+(36+27x^4+16x^6+3x^8)D^2)}{36+27x^4+16x^6+3x^8}u(x).$$

При цьому детермінант матриці $Z^T_{M,N}Z_{M,N}$ дорівнює нулю при $x=0$:

$$\det(Z^T_{M,N}(x)Z_{M,N}(x))=\frac{1}{8}x^2(x^2-2x+2)(8-12x-2x^2+10x^3-x^4-3x^5+x^6).$$

Тобто при побудові запропонованих операторів $\overline{L}_{3,2}(x,Du(x))$ відкритим є питання вибору вузлів $u_0(x),\ldots,u_M(x)$.

Таким чином, задача заміни диференціального оператора іншим є однією з найбільш широко використовуваних на практиці. Достатньо відмітити різницеві, інтегральні оператори тощо, які широко використовуються при розв'язанні задачі Коші та крайових задач. Автор сподівається, що роботи [10, 11] і дана публікація знайдуть практичні застосування.


1. *Литвин О. М.* Інтерлінація функцій та деякі її узагальнення. – Харків: Основа, 2002. – 544 с.
2. *Литвин О. М.* Методи обчислень. Додаткові розділи. – Київ: Наук. думка, 2005. – 331 с.
3. *Porter W. A.* An overview of polynomic system theory // IEEE Proc. Special issue on system theory. – 1976. – Jan. – P. 18–23.
4. *Porter W. A.* Synthesis of polynomic system // SIAM J. Math. Anal. – 1980. – **11**, No 2. – P. 308–315.
5. *Prenter P. M.* Lagrange and Hermite interpolation in Banach spaces // Appr. Theory. – 1971. – **4**, No 4. – P. 419–432.
6. *Howlett P. G., Torokhti A. P.* Weak interpolation and approximation of nonlinear operators on the space // Numer. Func. Anal. and Optimiz. – 1998. – **19** (9, 10). – P. 1025–1043.
7. *Макаров В. Л., Хлобыстов В. В.* Основы теории полиномиального операторного интерполирования. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1998. – 278 с.
8. *Макаров В. Л., Хлобыстов В. В., Янович Л. А.* Интерполирование операторов. – Киев: Наук. думка, 2002. – 406 с.
9. *Хлобыстов В. В., Поповичева Т. Н.* Интерполирование и задачи идентификации // Кибернетика и систем. анализ. – 2006. – № 3. – С. 100–107.
10. *Литвин О. М.* Інтерполювання звичайних диференціальних операторів // Доп. НАН України. – 2007. – № 6. – С. 19–23.
11. *Литвин О. М.* Інтерполювання диференціальних операторів з частинними похідними // Доп. НАН України. – 2007. – № 7. – С. 7–11.



*Українська інженерно-педагогічна академія, Харків*



*Надійшло до редакції 03.01.2007*