Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

8 • 2007

ІНФОРМАТИКА ТА КІБЕРНЕТИКА

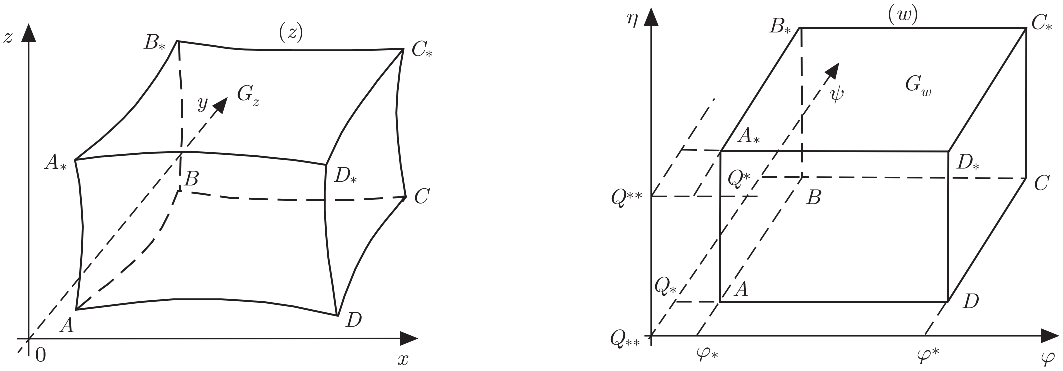
УДК 517.95.001.573

А. Я. Бомба, Ю. Є. Климюк, член-кореспондент НАН України
В. В. Скопецький

Просторові нелінійні сингулярно збурені крайові задачі типу конвекція — дифузія

On the basis of a constructed 3D analog of the 2D boundary-value problem on the conformal mapping of a curvilinear quadrangle on the rectangular, we get the algorithm of asymptotic approximation of a solution of the 3D nonlinear singularly perturbed boundary-value problem of "convection-diffusion" in the curvilinear parallelepiped bounded by two equipotential surfaces and four surfaces of a current, under conditions of the third kind on the input and the output of a filtration current and with regard for the general return influence of pollutions on the coefficient of diffusion. The results of numerical calculations are given.

В [1–4] та роботах інших авторів на основі [5] розроблено асимптотичний метод розв'язання типових крайових та змішаних задач для сингулярно збурених параболічних та еліптичних рівнянь у прямокутних областях (прямокутник, півсмуга тощо) з урахуванням різного рівня гладкості початкової і граничних умов та їх узгодженості у кутових точках. Подальше застосування та розвиток цей метод знайшов, зокрема, у роботах [6, 7] при розв'язанні сингулярно збурених задач конвективної дифузії при фільтрації в чотирикутних криволінійних областях, обмежених еквіпотенціальними лініями та лініями течії. Використання згаданої методики разом з аналітичними і чисельно-аналітичними методами дало можливість одержати точні або наближені аналітичні розв'язки найбільш типових задач типу конвекція — фільтрація в багатозв'язних областях [8, 9], задач гетеродифузії [10, 11], нелінійних задач із запізненням [12]. У роботі [13] побудовано просторовий аналог плоскої крайової задачі на конформне відображення внутрішньої області криволінійного чотирикутника на прямокутну і одержано асимптотичне розвинення розв'язку сингулярно збуреної крайової задачі для рівняння конвективної дифузії у криволінійному паралелепіпеді, тому нині актуальною є проблема одержання розв'язків для аналогічних просторових задач. Нами цей метод поширено на нелінійні просторові сингулярно збурені крайові задачі конвективної дифузії для однозв'язного криволінійного паралелепіпеда, обмеженого взаємоортогональними між собою еквіпотенціальними поверхнями та поверхнями течії, з урахуванням сумарного зворотного впливу забруднень на характеристики середовища (коефіцієнт дифузії), коли на вході і виході фільтраційної течії задаються умови третього роду.



а *б*

Рис. 1

Постановка задачі. Для області $G = G_{\mathrm{z}} \times (0, \infty)$, де $G_{\mathrm{z}} = ABCDA_*B_*C_*D_*$ ($\mathrm{z} = (x, y, z)$) — однозв'язний криволінійний паралелепіпед (пористий пласт), обмежений гладкими, ортогональними між собою в кутових точках та по ребрах, еквіпотенціальними поверхнями $ABB_*A_* = \{\mathrm{z}\colon f_1(x,y,z) = 0\}$, $CDD_*C_* = \{\mathrm{z}\colon f_2(x,y,z) = 0\}$ та поверхнями течії $ADD_*A_* = \{\mathrm{z}\colon f_3(x,y,z) = 0\}$, $BCC_*B_* = \{\mathrm{z}\colon f_4(x,y,z) = 0\}$, $ABCD = \{\mathrm{z}\colon f_5(x,y,z) = 0\}$, $A_*B_*C_*D_* = \{\mathrm{z}\colon f_6(x,y,z) = 0\}$ (рис. 1, *а*), розглянемо нелінійну модельну задачу:

$$\vec{v} = \operatorname{grad}\varphi, \qquad \operatorname{div}\vec{v} = 0; \qquad \operatorname{grad}\varphi = \operatorname{grad}\psi \times \operatorname{grad}\eta, \qquad \operatorname{grad}\psi \cdot \operatorname{grad}\eta = 0; \tag{1}$$

$$\varphi|_{ABB_*A_*} = \varphi_*, \qquad \varphi|_{CDD_*C_*\cdot} = \varphi^*, \qquad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{ADD_*A_* \cup A_*B_*C_*D_* \cup BCC_*B_* \cup ABCD} = 0; \tag{2}$$

$$\begin{gathered}\varepsilon\Biggl(\Biggl(1 + \mu\int_0^t l(x,y,z,\widetilde{t})C(x,y,z,\widetilde{t})d\widetilde{t}\Biggr)(C_{xx}(x,y,z,t) + C_{yy} + C_{zz}) + \\ + \mu\Biggl(\int_0^t (l(x,y,z,\widetilde{t})C(x,y,z,\widetilde{t}))_x d\widetilde{t} \cdot C_x + \int_0^t (l(x,y,z,\widetilde{t})C(x,y,z,\widetilde{t}))_y d\widetilde{t} \cdot C_y + \\ + \int_0^t (l(x,y,z,\widetilde{t})C(x,y,z,\widetilde{t}))_z d\widetilde{t} \cdot C_z\Biggr)\Biggr) - v_x(x,y,z)C_x - v_y(x,y,z)C_y - \\ - v_z(x,y,z)C_z = C_t(x,y,z,t),\end{gathered} \tag{3}$$

$$\begin{gathered}\alpha_1(y,z,t)C(x,y,z,t) + \beta_1(y,z,t)C_x(x,y,z,t)|_{ABB_*A_*} = \gamma_1(y,z,t), \\ \alpha_2(y,z,t)C(x,y,z,t) + \beta_2(y,z,t)C_x(x,y,z,t)|_{CDD_*C_*} = \gamma_2(y,z,t), \\ C(x,y,z,t)|_{ADD_*A_*} = c_{**}(x,z,t), \qquad C(x,y,z,t)|_{BCC_*B_*} = c^{**}(x,z,t), \\ C(x,y,z,t)|_{ABCD} = c_{***}(x,y,t), \qquad C(x,y,z,t)|_{A_*B_*C_*D_*} = c^{***}(x,y,t), \\ C(x,y,z,0) = c_0^0(x,y,z),\end{gathered} \tag{4}$$

де φ — фільтраційний потенціал ($0 < \varphi_* \leqslant \varphi \leqslant \varphi^* < \infty$); $\vec{v}$ — вектор швидкості фільтрації ($|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2(x,y,z) + v_y^2(x,y,z) + v_z^2(x,y,z)} > v_* \gg \varepsilon$) в точці $\mathrm{z} = (x,y,z)$; $C(x,y,z,t)$ — концентрація розчинної речовини у фільтраційній течії у точці (x,y,z) в момент часу t;

$l(x,y,z,t)$ — деяка вагова обмежена функція, що характеризує зворотний вплив забруднення середовища на його дифузійну провідність; n — зовнішня нормаль до відповідної поверхні; $\varepsilon = \mu/k$, k — задане додатне дійсне число; ε — малий параметр ($\varepsilon > 0$), $\alpha_1(y,z,t)$, $\beta_1(y,z,t)$, $\gamma_1(y,z,t)$, $\alpha_2(y,z,t)$, $\beta_2(y,z,t)$, $\gamma_2(y,z,t)$, $c_{**}(x,z,t)$, $c^{**}(x,z,t)$, $c_{***}(x,y,t)$, $c^{***}(x,y,t)$, $c_0^0(x,y,z)$ — досить гладкі функції, узгоджені між собою вздовж ребер області G.

Нехай задача (1) шляхом просторово-конформного відображення [13] $G_{\mathrm{z}} \mapsto G_w$ (або $G_w \mapsto G_{\mathrm{z}}$), де $G_w = \{w = (\varphi,\psi,\eta)\colon \varphi_* < \varphi < \varphi^*, Q_* < \psi < Q^*, Q_{**} < \eta < Q^{**}\}$ — відповідна G_{z} область комплексного потенціалу (рис. 1, *б*), $\psi = \psi(x,y,z)$ і $\eta = \eta(x,y,z)$ — функції течії, комплексно спряжені до $\varphi = \varphi(x,y,z)$, є розв'язаною, зокрема, знайдено поле швидкості $\vec{v}$ і параметри $Q = Q_0 \cdot Q^0$, $Q_0 = Q^* - Q_*$, $Q^0 = Q^{**} - Q_{**}$ — відповідно потоки через довільний поперечний переріз течії G_{z}, її горизонтальний та вертикальний "одиничні прошарки". Здійснивши заміну змінних $x = x(\varphi,\psi,\eta)$, $y = y(\varphi,\psi,\eta)$, $z = z(\varphi,\psi,\eta)$ у рівнянні (3) та умовах (4), приходимо до відповідної "дифузійної задачі" для області G_w:

$$\varepsilon\Biggl((v^2(\varphi,\psi,\eta)C_{\varphi\varphi} + a_1(\varphi,\psi,\eta)C_{\psi\psi} + a_2(\varphi,\psi,\eta)C_{\eta\eta} + b_1(\varphi,\psi,\eta)C_\psi +$$
$$+ b_2(\varphi,\psi,\eta)C_\eta)\left(1 + \varepsilon k\int_0^t(\widetilde{l}\cdot\widetilde{C})d\widetilde{t}\right) + \varepsilon k\Biggl(v^2(\varphi,\psi,\eta)(C_\varphi\int_0^t(\widetilde{l}\cdot\widetilde{C}_\varphi)d\widetilde{t} +$$
$$+ C_\varphi\int_0^t(\widetilde{l}_\varphi\cdot\widetilde{C})d\widetilde{t}) + a_1(\varphi,\psi,\eta)\left(C_\psi\int_0^t(\widetilde{l}\cdot\widetilde{C}_\psi)d\widetilde{t} + C_\psi\int_0^t(\widetilde{l}_\psi\cdot\widetilde{C})d\widetilde{t}\right) +$$
$$+ a_2(\varphi,\psi,\eta)\left(C_\eta\int_0^t(\widetilde{l}\cdot\widetilde{C}_\eta)d\widetilde{t} + C_\eta\int_0^t(\widetilde{l}_\eta\cdot\widetilde{C})d\widetilde{t}\right)\Biggr)\Biggr) - v^2(\varphi,\psi,\eta)C_\varphi = C_t, \qquad (5)$$

$$\begin{aligned}
&\alpha_1(\psi,\eta,t)C(\varphi_*,\psi,\eta,t) + \beta_1(\psi,\eta,t)C_\varphi(\varphi_*,\psi,\eta,t) = \gamma_1(\psi,\eta,t),\\
&\alpha_2(\psi,\eta,t)C(\varphi^*,\psi,\eta,t) + \beta_2(\psi,\eta,t)C_\varphi(\varphi^*,\psi,\eta,t) = \gamma_2(\psi,\eta,t),\\
&C(\varphi,Q_*,\eta,t) = c_{**}(\varphi,\eta,t), \qquad C(\varphi,Q^*,\eta,t) = c^{**}(\varphi,\eta,t),\\
&C(\varphi,\psi,Q_{**},t) = c_{***}(\varphi,\psi,t), \qquad C(\varphi,\psi,Q^{**},t) = c^{***}(\varphi,\psi,t),\\
&C(\varphi,\psi,\eta,0) = c_0^0(\varphi,\psi,\eta),
\end{aligned} \qquad (6)$$

де $a_1(\varphi,\psi,\eta) = \psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi_z^2$, $a_2(\varphi,\psi,\eta) = \eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2$, $b_1(\varphi,\psi,\eta) = \psi_{xx} + \psi_{yy} + \psi_{zz}$, $b_2(\varphi,\psi,\eta) = \eta_{xx} + \eta_{yy} + \eta_{zz}$.

Асимптотика розв'язку. Розв'язок задачі (5), (6) з точністю $O(\varepsilon^{n+1})$ шукаємо у вигляді асимптотичного ряду

$$C(\varphi,\psi,\eta,t) = C_0(\varphi,\psi,\eta,t) + \sum_{i=1}^{n}\varepsilon^i C_i(\varphi,\psi,\eta,t) + \sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^i P_i(\xi,\psi,\eta,t) +$$
$$+ \sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^{i/2}H_i(\varphi,\zeta,\eta,t) + \sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^{i/2}\widetilde{H}_i(\varphi,\widetilde{\zeta},\eta,t) + \sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^{i/2}T_i(\varphi,\psi,\varsigma,t) +$$

$$+\sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^{i/2}\widetilde{T}_i(\varphi,\psi,\widetilde{\varsigma},t)+R_n(\varphi,\psi,\eta,t,\varepsilon), \tag{7}$$

де $R_n(\varphi,\psi,\eta,t,\varepsilon)$ — залишковий член (його оцінка встановлюється аналогічно [3–5, 13] на основі принципу максимуму); $C_0(\varphi,\psi,\eta,t)$ — розв'язок відповідної виродженої задачі (конвективного переносу), $C_i(\varphi,\psi,\eta,t)$ $(i=\overline{1,n})$ — поправки, які враховують "вплив" дифузії всюди в даній області (за винятком деякої її пригараничної ділянки); $P_i(\xi,\psi,\eta,t)$ $(i=\overline{0,n+1})$ — функції типу примежового шару в околі $\varphi=\varphi^*$ (поправки на виході конвективної течії); $H_i(\varphi,\zeta,\eta,t), \widehat{H}_i(\varphi,\widehat{\zeta},\eta,t)$, $T_i(\varphi,\psi,\varsigma,t), \widehat{T}_i(\varphi,\psi,\widehat{\varsigma},t)$ $(i=\overline{0,n+1})$ — функції типу пограншару відповідно в околах $\psi=Q^*$, $\psi=Q_*$, $\eta=Q^{**}$, $\eta=Q_{**}$, що враховують вплив "бічних джерел забруднень"; $\xi=(\varphi^*-\varphi)/\varepsilon$, $\zeta=(Q^*-\psi)/\sqrt{\varepsilon}$, $\widehat{\zeta}=(\psi-Q_*)/\sqrt{\varepsilon}$, $\varsigma=(Q^{**}-\eta)/\sqrt{\varepsilon}$, $\widehat{\varsigma}=(\eta-Q_{**})/\sqrt{\varepsilon}$ — відповідні їм регуляризуючі перетворення.

В результаті підстановки (7) в (5) і виконання стандартної процедури прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях ε одержимо задачі для знаходження головної частини C_0 розв'язку і поправок C_i:

$$\begin{cases} v^2(\varphi,\psi,\eta)C_{0\varphi}(\varphi,\psi,\eta,t)+C_{0t}(\varphi,\psi,\eta,t)=0, \qquad C_0(\varphi,\psi,\eta,0)=c_0^0(\varphi,\psi,\eta),\\ \alpha_1(\psi,\eta,t)C_0(\varphi_*,\psi,\eta,t)+\beta_1(\psi,\eta,t)C_{0\varphi}(\varphi_*,\psi,\eta,t)=\gamma_1(\psi,\eta,t)\end{cases}$$

$$\begin{cases} v^2(\varphi,\psi,\eta)C_{i\varphi}(\varphi,\psi,\eta,t)+C_{it}(\varphi,\psi,\eta,t)=g_i(\varphi,\psi,\eta,t),\\ C_i(\varphi,\psi,\eta,0)=0, \qquad C_i(\varphi_*,\psi,\eta,t)=0, \qquad i=\overline{1,n},\end{cases}$$

$$g_i(\varphi,\psi,t)=v^2(\varphi,\psi,\eta)C_{(i-1)\varphi\varphi}+a_1(\varphi,\psi,\eta)C_{(i-1)\psi\psi}+a_2(\varphi,\psi,\eta)C_{(i-1)\eta\eta}+$$

$$+b_1(\varphi,\psi,\eta)C_{(i-1)\psi}+b_2(\varphi,\psi,\eta)C_{(i-1)\eta}+k\left(\sum_{j=0}^{i-2}\left(\int_0^t(\widetilde{l}\widetilde{C}_j)d\widetilde{t}(v^2(\varphi,\psi,\eta)C_{(i-2-j)\varphi\varphi}+\right.\right.$$

$$+a_1(\varphi,\psi,\eta)C_{(i-2-j)\psi\psi}+a_2(\varphi,\psi,\eta)C_{(i-2-j)\eta\eta}+b_1(\varphi,\psi,\eta)C_{(i-2-j)\psi}+$$

$$+b_2(\varphi,\psi,\eta)C_{(i-2-j)\eta}+v^2(\varphi,\psi,\eta)\left(C_{j\varphi}\int_0^t(\widetilde{l}\widetilde{C}_{(i-2-j)\varphi})d\widetilde{t}+C_{j\varphi}\int_0^t(\widetilde{l}_\varphi\widetilde{C}_{(i-2-j)})d\widetilde{t}\right)+$$

$$+a_1(\varphi,\psi,\eta)\left(C_{j\psi}\int_0^t(\widetilde{l}\widetilde{C}_{(i-2-j)\psi})d\widetilde{t}+\ +C_{j\psi}\int_0^t(\widetilde{l}_\psi\widetilde{C}_{i-2-j})d\widetilde{t}\right)+$$

$$\left.\left.+a_2(\varphi,\psi,\eta)\left(C_{j\eta}\int_0^t(\widetilde{l}\widetilde{C}_{(i-2-j)\eta})d\widetilde{t}+C_{j\eta}\int_0^t(\widetilde{l}_\eta\widetilde{C}_{i-2-j})d\widetilde{t}\right)\right)\right).$$

Після їх розв'язання отримаємо:

$$C_0(\varphi,\psi,\eta,t)=\left[\begin{array}{l} h(\varphi,\psi,\eta,t), \qquad t\geqslant f(\varphi,\psi,\eta),\\ c_0^0(f^{-1}(f(\varphi,\psi,\eta)-t),\psi,\eta), \qquad t<f(\varphi,\psi,\eta),\end{array}\right.$$

$$h(\varphi,\psi,\eta,t)=e^{v^2(\varphi_*,\psi,\eta)\int\limits_{\varphi_*}^{\varphi}\frac{\alpha(\psi,\eta,f(\tilde{\varphi},\psi,\eta)+t-f(\varphi,\psi,\eta))}{\beta(\psi,\eta,f(\tilde{\varphi},\psi,\eta)+t-f(\varphi,\psi,\eta))}d\tilde{\varphi}}\Bigl(c_0^0(\varphi_*,\psi,\eta)-v^2(\varphi_*,\psi,\eta)\times$$

$$\times \int\limits_{\varphi_*}^{\varphi} e^{-v^2(\varphi_*,\psi,\eta)\int\limits_{\varphi_*}^{\widetilde{\varphi}} \frac{\alpha(\psi,\eta,f(\widetilde{\widetilde{\varphi}},\psi,\eta)+t-f(\varphi,\psi,\eta))}{\beta(\psi,\eta,f(\widetilde{\widetilde{\varphi}},\psi,\eta)+t-f(\varphi,\psi,\eta))} d\widetilde{\widetilde{\varphi}}} \frac{\gamma(\psi,\eta,f(\widetilde{\varphi},\psi,\eta)+t-f(\varphi,\psi,\eta))}{\beta(\psi,\eta,f(\widetilde{\varphi},\psi,\eta)+t-f(\varphi,\psi,\eta))} d\widetilde{\varphi}\Bigg),$$

$$C_i(\varphi,\psi,\eta,t) = \left[\begin{array}{l} \int\limits_{\varphi^*}^{\varphi} v^{-2}(\widetilde{\varphi},\psi,\eta) g_i(\widetilde{\varphi},\psi,\eta f(\widetilde{\varphi},\psi,\eta)+t-f(\varphi,\psi,\eta))d\tilde{\varphi}, \quad t \geqslant f(\varphi,\psi,\eta), \\ \int\limits_{0}^{t} g_i(f^{-1}(\widetilde{t}+f(\varphi,\psi,\eta)-t),\psi,\eta,\widetilde{t})d\widetilde{t}, \qquad t < f(\varphi,\psi,\eta), \quad i=\overline{1,n}, \end{array}\right.$$

де $f(\varphi,\widetilde{\psi},\widetilde{\eta}) = \int\limits_{\varphi_*}^{\varphi} v^{-2}(s,\widetilde{\psi},\widetilde{\eta})ds$ — час проходження виділеної частинки від точки $(\varphi_*,\widetilde{\psi},\widetilde{\eta})$ до точки $(\varphi,\widetilde{\psi},\widetilde{\eta})$.

Функція $P = \sum\limits_{i=0}^{n+1} P_i\varepsilon^i$ призначена для усунення нев'язки, внесеної регулярною частиною $C = \sum\limits_{i=0}^{n} C_i\varepsilon^i$, в околі ділянки $\varphi = \varphi^*$. Для знаходження цієї функції маємо задачі:

$$\begin{cases} P_{0\xi\xi} + P_{0\xi} = 0, \qquad P_0 \underset{\xi\to\infty}{\to} 0, \\ \alpha_2(\psi,\eta,t)(P_0(\varphi,\psi,\eta,t) + C_0(\varphi,\psi,\eta,t)) + \beta_2(\psi,\eta,t)(P_{0\varphi}(\varphi,\psi,\eta,t) + \\ \qquad + C_{0\varphi}(\varphi,\psi,\eta,t))\big|_{\varphi=\varphi^*} = \gamma_2(\psi,\eta,t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_{i\xi\xi} + P_{i\xi} = v^{-2}(\varphi^*,\psi,\eta)d_i(\xi,\psi,\eta,t), \qquad P_i \underset{\xi\to\infty}{\to} 0, \\ P_i(\varphi^*,\psi,\eta,t) = -C_i(\varphi^*,\psi,\eta,t), \qquad i=\overline{1,n+1}, \end{cases}$$

$$d_i(\xi,\psi,\eta,t) = \Bigg(P_{(i-1)t} - \sum_{j=1}^{i} V_j P_{(i-j)\xi\xi} - \sum_{j=1}^{i} V_j P_{(i-j)\xi} - \sum_{j=0}^{i-2}\Big(A_{1j}P_{(i-2-j)\psi\psi} + B_{1j}P_{(i-2-j)\psi} +$$

$$+ A_{2j}P_{(i-2-j)\eta\eta} + B_{2j}P_{(i-2-j)\eta}\Big) - k\sum_{u=0}^{i-1} V_j\Bigg(\int\limits_0^t \tilde{L}_l\tilde{P}_{m\psi\psi}d\tilde{t}P_{(i-1-u)\xi\xi} + \int\limits_0^t \tilde{L}_l\tilde{P}_{m\xi}d\tilde{t}P_{(i-1-u)\xi}\Bigg) -$$

$$- k\sum_{u=0}^{i-3}\Bigg(A_{1j}\Bigg(\int\limits_0^t \tilde{L}_l\tilde{P}_m d\tilde{t}P_{(i-3-u)\psi\psi} + \int\limits_0^t \tilde{L}_l\tilde{P}_{m\psi}d\tilde{t}P_{(i-3-u)\psi} + \int\limits_0^t \tilde{L}_{l\psi}\tilde{P}_m d\tilde{t}P_{(i-3-u)\psi}\Bigg) +$$

$$+ A_{2j}\Bigg(\int\limits_0^t \tilde{L}_l\tilde{P}_m d\tilde{t}P_{(i-3-u)\eta\eta} + \int\limits_0^t \tilde{L}_l\tilde{P}_{m\eta}d\tilde{t}P_{(i-3-u)\eta} + \int\limits_0^t \tilde{L}_{l\eta}\tilde{P}_m d\tilde{t}P_{(i-3-u)\eta}\Bigg)\Bigg)\Bigg),$$

де $u = l + j + m$, V_j, A_{1j}, A_{2j}, B_{1j}, B_{2j}, L_l, L_{*l} — коефіцієнти при j-х (l-х) степенях ε в розкладі відповідно функцій $v^2(\varphi^* - \varepsilon\xi,\psi,\eta)$, $a_1(\varphi^* - \varepsilon\xi,\psi,\eta)$, $a_2(\varphi^* - \varepsilon\xi,\psi,\eta)$, $b_1(\varphi^* - \varepsilon\xi,\psi,\eta)$, $b_2(\varphi^* - \varepsilon\xi,\psi,\eta)$, $l(\varphi^* - \varepsilon\xi,\psi,\eta,t)$ та $l_\varphi(\varphi^* - \varepsilon\xi,\psi,\eta,t)$ в ряд Тейлора в околі $\varphi = \varphi^*$.

Функція типу пограншару $H(\varphi,\zeta,\eta,t)=\sum\limits_{i=0}^{n+1}H_i\varepsilon^{i/2}$ призначена для усунення нев'язки в околі $\psi=Q^*$. Для знаходження H_i маємо задачі:

$$\begin{cases} a_1(\varphi,Q^*,\eta)H_{0\zeta\zeta}+\nu^2(\varphi,Q^*,\eta)H_{0\varphi}=H_{0t}, \\ H_0(\varphi,Q^*,\eta,t)=c^{**}(\varphi,\eta,t)-W(\varphi,Q^*,\eta,t), \qquad H_0(\varphi,\zeta,\eta,t)\underset{\zeta\to\infty}{\to}0, \end{cases}$$

$$W(\varphi,\psi,\eta,t)=\left(C_0(\varphi,\psi,\eta,t)+\sum_{i=1}^{n}\varepsilon^iC_i(\varphi,\psi,\eta,t)\right)+\sum_{i=0}^{n+1}P_i(\xi,\psi,\eta,t)\varepsilon^i,$$

$$\begin{cases} a_1(\varphi,Q^*,\eta)H_{i\zeta\zeta}+\nu^2(\varphi,Q^*,\eta)H_{i\varphi}=H_{it}-M_i(\varphi,\zeta,\eta,t), \\ H_i(\varphi,Q^*,\eta,t)=0, \qquad H_i(\varphi,\zeta,\eta,t)\underset{\zeta\to\infty}{\to}0, \qquad i=\overline{1,n+1}, \end{cases}$$

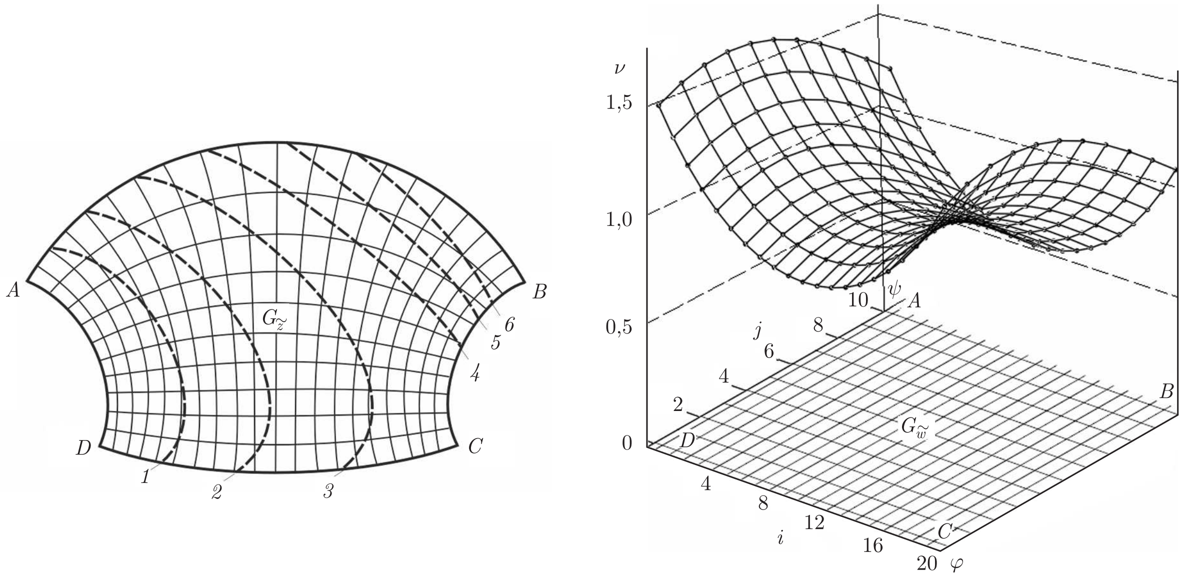
$$\begin{aligned} M_i(\varphi,\zeta,\eta,t)&=I(1)\sum_{j=1}^{i}(A_{1j}H_{(i-j)_{\zeta\zeta}}+B_{1j}H_{(i-j)_{\zeta}}+V_jH_{(i-j)_{\varphi}})+ \\ &+I(2)\sum_{j=0}^{i-2}(V_jH_{(i-2-j)_{\varphi\varphi}}+A_{2j}H_{(i-2-j)_{\eta\eta}}+B_{2j}H_{(i-2-j)_{\eta}})+ \\ &+I(4)k\sum_{h=0}^{i-4}V_j\left(\int_0^t\widetilde{L}_l\widetilde{H}_m d\widetilde{t}H_{(i-4-h)\varphi\varphi}+\int_0^t\widetilde{L}_{l\varphi}\widetilde{H}_m d\widetilde{t}H_{(i-4-h)\varphi}+\int_0^t\widetilde{L}_l\widetilde{H}_{m\varphi}d\widetilde{t}H_{(i-4-h)\varphi}\right)+ \\ &+I(2)k\sum_{h=0}^{i-2}\left(A_{1j}\int_0^t\widetilde{L}_l\widetilde{H}_m d\widetilde{t}H_{(i-2-h)\zeta\zeta}+B_{1j}\int_0^t\widetilde{L}_l\widetilde{H}_{m\zeta}d\widetilde{t}H_{(i-2-h)\zeta}\right)+ \\ &+I(3)k\sum_{h=0}^{i-3}B_{1j}\int_0^t L_l^*\widetilde{H}_{m\zeta}d\widetilde{t}H_{(i-3-h)\zeta}+I(4)k\sum_{h=0}^{i-4}\left(A_{2j}\int_0^t\widetilde{L}_l\widetilde{H}_m d\widetilde{t}H_{(i-4-h)\eta\eta}+\right. \\ &\left.+B_{2j}\int_0^t\widetilde{L}_{l\eta}\widetilde{H}_m d\widetilde{t}H_{(i-4-h)\eta}+B_{2j}\int_0^t\widetilde{L}_l\widetilde{H}_{m\eta}d\widetilde{t}H_{(i-4-h)\eta}\right), \end{aligned}$$

де $h=l+j+m$, V_j, A_{1j}, A_{2j}, B_{1j}, B_{2j}, L_l, L_l^* — відповідно коефіцієнти при $j/2$-х ($l/2$-х) степенях ε в розкладі функцій $v^2(\varphi,Q^*-\sqrt{\varepsilon}\zeta,\eta)$, $a_1(\varphi,Q^*-\sqrt{\varepsilon}\zeta,\eta)$, $a_2(\varphi,Q^*-\sqrt{\varepsilon}\zeta,\eta)$, $b_1(\varphi,Q^*-\sqrt{\varepsilon}\zeta,\eta)$, $b_2(\varphi,Q^*-\sqrt{\varepsilon}\zeta,\eta)$, $l(\varphi,Q^*-\sqrt{\varepsilon}\zeta,\eta,t)$ та $l_\zeta(\varphi,Q^*-\sqrt{\varepsilon}\zeta,\eta,t)$ в ряд Тейлора в околі $\psi=Q^*$. Для $a\in Z$

$$I(a)=\begin{cases} 1, & \text{якщо } i\geqslant a, \\ 0, & \text{якщо } i<a. \end{cases}$$

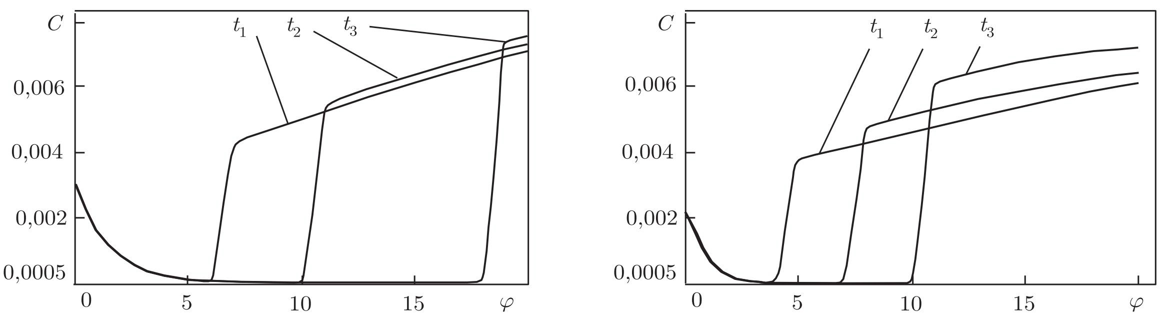
Функції $\widehat{H}_i(\varphi,\widehat{\zeta},\eta,t)$, $T_i(\varphi,\psi,\varsigma,t)$, $\widehat{T}_i(\varphi,\psi,\widehat{\varsigma},t)$ $(i=\overline{0,n+1})$ знаходимо аналогічно $H_i(\varphi,\zeta,\eta,t)$.

Чисельні розрахунки. Наведемо результати розрахунку просторового нелінійного процесу конвекція — дифузія на плоскому ідеальному фільтраційному фоні, породженому двома особливими точками $z_1=0$ та $z_2=4$ із заданими умовами третього роду на



а *б*

Рис. 2



а *б*

Рис. 3

вході і виході фільтраційної течії (витік та втік однакових інтенсивностей $Q_0 = 2\pi$), комплексний потенціал якого — $w = (Q_0/2\pi)\ln((z - z_1)/(z - z_2))$, при $\varphi_* = -1{,}4$, $\varphi^* = 1{,}4$, $AD = \{z\colon \psi(x, y) = 5\pi/6\}$, $BC = \{z\colon \psi(x, y) = 3\pi/2\}$. На рис. 2, *а*, *б* зображено рівномірну сітку області комплексного потенціалу $G_{\widetilde{w}}$ та відповідну їй динамічну сітку в $G_{\widetilde{z}}$: $\varphi(x, y) = \overline{\varphi}_i = \varphi_* + ((\varphi^* - \varphi_*)i)/20$, $\psi(x, y) = \overline{\psi}_j = Q_* + (Q_0 j)/10$, $i = \overline{0, 20}$, $j = \overline{0, 10}$, величину швидкості фільтрації $v = ((dz/dw)(\overline{dz/dw}))^{-1/2}$ у вузлах (φ_i, ψ_j) та лінії фронту конвективного переносу $f(\varphi, \psi) = t_k$, $k = \overline{1, 6}$ при $t_1 = 0{,}3492$, $t_2 = 0{,}8882$, $t_3 = 1{,}6592$, $t_4 = 2{,}6492$, $t_5 = 3{,}7584$, $t_6 = 4{,}8258$ (криві *1–6* відповідно).

Розподіл концентрації $C(\varphi, \psi, \eta, t)$ розчинної речовини при $\varepsilon = 0{,}01$, $Q^0 = \pi$, $k = 1$, $l(\varphi, \psi, \eta) = (|\varphi| + \psi)^t$, $c_0^0(\varphi, \psi, \eta) = 0,1((\varphi - \psi - \eta + 1{,}4)^2 + 5)^{-1}$, $\alpha_1(\psi, \eta, t) = 1$, $\beta_1(\psi, \eta, t) = -0{,}5(\psi + \eta)^{-1}$, $\gamma_1(\psi, \eta, t) = 0$, $\alpha_2(\psi, \eta, t) = 1$, $\beta_1(\psi, \eta, t) = -0{,}5(\psi + \eta + 2,8)^{-1}$, $\gamma_1(\psi, \eta, t) = 0$, $c_{**}(\varphi, \eta, t) = 0{,}1((\varphi - \eta + 4{,}2)^2 + t + 5)^{-1}$, $c^{**}(\varphi, \eta, t) = 0{,}1((\varphi - \eta + 6{,}11)^2 + t + 5)^{-1}$ вздовж ліній $\{(\varphi, \psi_i, \widehat{\eta}) = \widetilde{\psi}\colon \widehat{\eta} = 0{,}2, \varphi_* \leqslant \varphi \leqslant \varphi^*\}$, $i = \overline{1, 2}$, $\psi_1 = 3{,}456$ (рис. 3, *а*), $\psi_2 = 4{,}294$ (рис. 3, *б*) в моменти часу $t_1 = 0{,}592$, $t_2 = 1{,}244$, $t_3 = 2{,}131$.

В перспективі — поширення запропонованої методики на відповідні нелінійні задачі із запізненням [12], задачі з використанням просторових аналогів квазіконформних відображень.

1. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. – Москва: Высш. шк., 1980. – 208 с.
2. *Теория* сингулярных возмущений в прикладных задачах. – Рига: Hitelser, 1990. – 187 с.
3. *Бомба А. Я.* Про асимптотичний метод розв'язання однієї задачі масопереносу при фільтрації в пористому середовищі // Укр. мат. журн. – 1982. – **4**, № 4. – С. 493–496.
4. *Bobisud L. E.* Parabolic equations with a small paramer and discontinuous data // J. of Math. Analysis and Applications. – 1969. – **26**, No 1. – P. 208–220.
5. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Усп. мат. наук. – 1957. – **12**, вып. 5. – С. 3–122.
6. *Лаврик В. И., Бомба А. Я., Власюк А. П.* Об асимптотическом приближении решений некоторых задач массопереноса при фильтрации в неоднородной анизотропной среде. – Киев, 1985. – 17 с. (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 85.72).
7. *Присяжнюк І. М.* Асимптотичний метод розв'язування сингулярно збурених крайових задач типу конвекція – дифузія у многозв'язних областях // Волин. мат. вісн. – 2003. – Вип. 10. – С. 118–128.
8. *Бомба А. Я., Пригорницкий Д. А., Присяжнюк И. М.* Решение задач типа конвекция – фильтрация в многосвязных областях // Компьют. математика. – 2004. – № 1. – С. 152–159.
9. *Бомба А. Я., Скопецкий В. В., Присяжнюк И. М.* Решение задач типа конвекция – фильтрация в многосвязных областях // Там же. – 2004. – № 2. – С. 99–104.
10. *Чапля Є. Я., Чернуха О. Ю.* Фізико-математичне моделювання гетеродифузного масопереносу. – Львів: СПОЛОМ, 2003. – 128 с.
11. *Burak Ya., Chaplia Ye., Chernukha O.* Problems of mechanothermodiffusive processes modelling and optimization in many-phase continuum systems // II Szkola Geomechaniki (Miedz. Konf.). – Gliwice: Polit. Slaska, 1995. – P. 343–351.
12. *Бомба А. Я., Присяжнюк І. М.* Асимптотичне розвинення розв'язків нелінійних сингулярно збурених крайових задач типу конвекція – дифузія із запізненням // Доп. НАН України. – 2005. – № 3. – С. 60–66.
13. *Бомба А. Я.* Просторові сингулярно збурені крайові задачі типу конвекція – дифузія // Волин. мат. вісн. Сер. прикл. мат. – 2003. – Вип. 1. – С. 27–35.

Рівненський державний гуманітарний університет
Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, Київ

Надійшло до редакції 25.12.2006