УДК 539.375

А. А. Каминский, Г. В. Гаврилов

Докритический рост дискообразной трещины с немалой зоной предразрушения в стареющем трансверсально-изотропном теле

(Представлено академиком НАН Украины В. Д. Кубенко)

We consider the long-term cracking of an aging transversally isotropic material containing a mode I penny-shaped crack with a non-small process zone under remotely applied tensile stress. Only the symmetric case, where the crack lies in the plane of isotropy, is considered. The aging material properties are described by the Boltzmann–Volterra's linear theory for integral operators with non-difference kernels. The modified Leonov–Panasyuk–Dugdale's crack model is used with a constant process zone assuming that the critical opening displacement is the fracture criterion. Numerical calculations are made for subcritical crack growth for the specific example of a transversally isotropic material simulating the behavior of reinforced concrete.

Многие вязкоупругие материалы, такие как полимеры, бетон, древесина, горные породы стареют с течением времени, особенно под влиянием внешней среды (температура, влажность и т. п.), в связи с чем изменяются их механические и реологические характеристики. Этот фактор необходимо учитывать при исследовании процессов длительного разрушения элементов конструкций, выполненных из этих материалов, поскольку он может в ряде случаев оказать значительное влияние на конечные результаты [1].

Большой цикл исследований докритического развития трещин в стареющих вязкоупругих изотропных телах изложен в работе [1], где на основе линейной теории вязкоупругости с применением подхода Маслова–Арутюняна и критерия критического раскрытия трещины получены определяющие уравнения развития трещин на всех этапах их стабильного роста. Получены решения ряда новых плоских задач механики длительного разрушения стареющих вязкоупругих тел с малыми относительно размера трещины зонами предразрушения, когда можно применять концепцию коэффициентов интенсивности напряжений.

Особый интерес представляет разработка методов теоретического исследования деформирования и длительного разрушения стареющих вязкоупругих анизотропных тел с дефектами типа трещин с немалыми зонами предразрушения в связи с изучением проблем разрушения горных массивов, конструкций, выполненных из дерева, армированного бетона и полимерных композитных материалов. Большинство исследований по этой проблеме выполнено на основе линейной теории вязкоупругости без рассмотрения старения материалов [1], поскольку его учет для анизотропных тел приводит к существенным математическим трудностям. Применение к решению этой проблемы метода операторных цепных дробей [2, 3] снимает многие математические трудности и позволяет исследовать процессы длительного разрушения при любой анизотропии вязкоупругих свойств материала.

Ниже исследуем докритический рост дискообразной трещины нормального отрыва (mode I) с развитой зоной предразрушения и диаметром $2a$, которая находится в стареющем линейно-вязкоупругом трансверсально-изотропном теле.

Деформационные свойства данного материала будем описывать неразностными операторами Вольтерра второго рода

$$\overline{A}_{ij} f(t) = A_{ij}^0 \left(f(t) + \int\limits_{\tau_1}^{t} A_{ij}(t,\tau) f(\tau)\, d\tau \right),$$

где τ_1 — возраст материала, в котором к нему приложено внешнее воздействие.

Рассмотрим симметричный случай, когда трещина расположена в плоскости изотропии Oxy. На бесконечности к телу приложены растягивающие нагрузки интенсивности p, которые нормальны плоскости трещины. Величина этих нагрузок меньше критических значений, которые вызывают хрупкое разрушение тела.

В качестве модели трещины примем модифицированную модель трещины Леонова–Панасюка–Дагдейла [1]. В данной модели полагается, что размер зоны предразрушения d остается постоянным во время роста трещины. Данная концепция подтверждена для ряда полимерных материалов и композитов на их основе [2], а также некоторых видов бетона и армированного бетона [4].

Согласно этой модели, зона предразрушения у фронта движущейся дискообразной трещины представляется кольцевым разрезом постоянной ширины ($d = \mathrm{const}$), к берегам которого приложены самоуравновешенные напряжения $\sigma(t)$. Величина этих напряжений удовлетворяет условию конечности напряжений или, что то же самое — плавности смыкания берегов трещины, и в нашем случае определяется выражением [5]

$$\sigma(t) = p\frac{a(t) + d}{\sqrt{d(2a(t) + d)}}, \tag{1}$$

где $a(t)$ — радиус трещины в момент времени t; p — приложенные на удалении к телу напряжения; d — длина зоны предразрушения.

В качестве критерия разрушения примем критерий критического раскрытия в вершине трещины, который будет выполняться в каждый момент времени t растущей трещины [1]

$$2w(r,t)|_{r=a(t)} = \delta_C^*. \tag{2}$$

Для стареющего материала предположим, что величины δ_C^* и d незначительно изменяются с возрастом материала и их можно считать постоянными величинами. Данный критерий разрушения для некоторых стареющих материалов рассматривался в работах [1, 4].

Таким образом, модель зоны предразрушения основывается на следующих предположениях:

d и δ_C^* — некоторые константы материала, определяемые экспериментально, согласно методикам, приведенным в работе [6];

на берегах трещины в зоне предразрушения действуют напряжения $\sigma(t)$, определяемые из выражения (1).

В силу симметрии задачи будем полагать, что трещина распространяется в плоскости Oxy и остается круговой в плане.

Для вывода уравнений докритического роста трещины необходимо иметь выражение для вязкоупругого раскрытия трещины в момент времени t. Данную проблему можно решить с помощью принципа Вольтерра, справедливость которого для задач с растущими трещинами приведена в работе [1]. Согласно этому принципу, решение вязкоупругой задачи получается из решения аналогичной упругой задачи путем замены упругих постоянных на соответствующие временные интегральные операторы.

В результате выражение для вязкоупругого раскрытия трещины радиусом $a(t)$ в зоне предразрушения $a(t) \leqslant r \leqslant a(t) + d$ будет иметь вид [2]

$$\delta(r, a(t)) = 2w(r, a(t)) = \overline{T} g(r, a(t)), \tag{3}$$

где

$$g(r, a(t)) = \frac{4}{\pi}\sigma(a(t)) \int\limits_{\arcsin(a(t)/(a(t)+d))}^{\arcsin(a(t)/r)} \sqrt{a^2(t) - r^2 \sin^2\theta}\, d\theta, \tag{4}$$

$$\overline{T} = L(\overline{A}_{ij}) = \sqrt{(1 - \overline{\nu}_{31}\overline{\nu}_{13})\frac{1}{\overline{E}_{11}\overline{E}_{33}}} \times$$

$$\times \sqrt{2\left(\sqrt{(1 - (\overline{\nu}_{12})^2)(1 - \overline{\nu}_{31}\overline{\nu}_{13})\frac{\overline{E}_{11}}{\overline{E}_{33}}} - (1 + \overline{\nu}_{12})\overline{\nu}_{31}\right) + \frac{\overline{E}_{11}}{\overline{G}_{13}}}, \quad \overline{\nu}_{31} = \frac{\overline{E}_{11}}{\overline{E}_{33}}\overline{\nu}_{13}. \tag{5}$$

В равенстве (4) напряжение $\sigma(a(t))$ определяется выражением (1).

Оператор $\overline{T}$, как видно из (5), представляет собой сложную иррациональную функцию от стареющих вязкоупругих операторов трансверсально-изотропного материала $\overline{A}_{ij}$. Нахождение ядра $T(t, \tau)$ оператора $\overline{T}$ представляет собой сложную задачу, которую можно эффективно решить с помощью метода операторных цепных дробей [1, 2].

В общем случае, докритический рост трещины в вязкоупругом теле проходит три последовательных периода [1]: инкубационный, переходный и основной.

Согласно теории докритического роста трещин [1], уравнения этих периодов на основе критерия (2) и выражения для вязкоупругого раскрытия трещины в зоне предразрушения (3) представляются следующими интегральными уравнениями:

$$\int\limits_{\tau_1}^{t_I} T(t_I, \tau)\, d\tau = \frac{\delta_C^*}{\delta[a]} - 1, \tag{6}$$

$$\delta_C^* = \delta[a(t)] + g(a(t), a) \int\limits_{\tau_1}^{t_I} T(t, \tau)\, d\tau + \int\limits_{t_I}^{t} T(t, \tau) g(a(t), a(\tau))\, d\tau, \tag{7}$$

$t_I \leqslant t \leqslant t_{II}$, $a(t_{II}) = a + d$,

$$\delta_C^* = \delta[a(t)] + \int\limits_{t'}^{t} T(t, \tau) g(a(t), a(\tau))\, d\tau, \tag{8}$$

$a(t) - a(t') = d$, $t_{II} \leqslant t \leqslant t_{III}$, $a(t_{III}) = a^*$.

Здесь обозначено

$$\delta[x] = T^0 g(x, x).$$

Из уравнения (6) определяется время окончания инкубационного периода, в течение которого происходило раскрытие трещины без ее роста.

Уравнение (7) описывает переходный период роста трещины, во время которого она проходит область предразрушения. В конце этого периода в материале будет сформирована новая область предразрушения.

Заключительный период докритического роста трещины описывается уравнением (8). В этом периоде трещина стабильно распространяется в материале до достижения критической величины радиуса a^*, после чего трещина спонтанно переходит в режим динамического развития. Критическое значение радиуса трещины a^* и критическое значение раскрытия δ_C^* связаны следующим соотношением:

$$\delta_C^* = T^0 \frac{4}{\pi} \frac{a^* \sqrt{d}}{\sqrt{2a^* + d}}.$$

Ввиду сложной структуры уравнений (6), (7), (8), их решение получим численными методами, аналогично работам [1, 5].

Для примера рассмотрим волокнистый композит с пространственно-армированным каркасом по системе четырех прямых нитей с гексагональной симметрией [8]. Концентрация волокон, уложенных параллельно сторонам равностороннего треугольника, — c_1, а в нормальном к плоскости его расположения направлении — c_{14}. Полагаем, что связующее композита является стареющим вязкоупругим изотропным материалом, а волокна — материалом с упругими свойствами.

Деформационные свойства связующего описываются одним интегральным оператором Вольтерра

$$\frac{1}{\overline{\overline{E}}} = \frac{1}{E^0}(1 + \lambda K^*) \tag{9}$$

с ядром типа Маслова–Арутюняна [7]

$$\lambda K(t,\tau) = -E^0 \frac{\partial}{\partial \tau}(\varphi(\tau)(1 - \exp[-\gamma(t-\tau)])),$$

где $\varphi(\tau) = C_0 + A_1/\tau$ — функция старения; C_0, A_1, γ — экспериментально определяемые параметры материала; E^0 — модуль Юнга и $\lambda = \gamma E^0$. Полагаем при этом, что коэффициент Пуассона мало изменяется со временем и $\overline{\nu} = \nu^0 = \text{const}$.

Данный композит будем моделировать однородной трансверсально-изотропной стареющей вязкоупругой средой с приведенными характеристиками, которые для упругого случая приведены в работе [8]. Вязкоупругие характеристики определим на основе принципа Больцмана подстановкой в выражения для приведенных упругих характеристик вместо упругой характеристики связующего $1/E^0$ оператора в виде (9). Получаемые при этом рациональные выражения от одного оператора можно эффективно преобразовать к линейной комбинации резольвентных операторов на основе подхода, который предложен в работе [3].

На рис. 1 показаны кинетические кривые роста трещины ($d/a = 0{,}5$, $a^*/a = 3$), полученные численным решением уравнений (6)–(8) для композита ($c_1 = 0{,}2$, $c_{14} = 0{,}1$) со следующими характеристиками компонентов: связующее (бетон) [7] — $E^0 = 2 \cdot 10^{10}$ Па, $\nu^0 = 0{,}167$, $C_0 = 0{,}918 \cdot 10^{-10}$ Па$^{-1}$, $A_1 = 4{,}918 \cdot 10^{-10}$ сут/Па, $\gamma = 0{,}026$ сут$^{-1}$; волокна

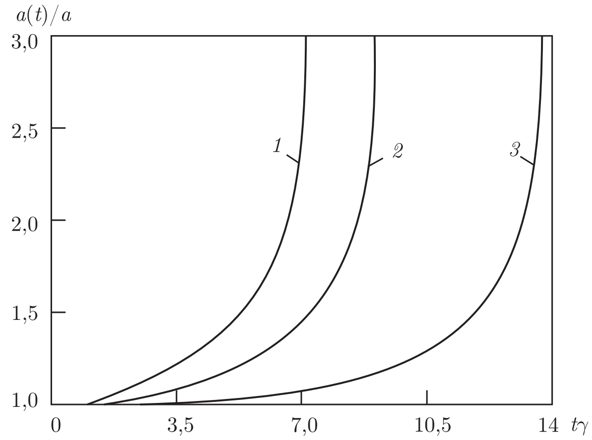

Рис. 1. Кинетические кривые

(сталь) — $E_a = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu_a = 0{,}3$. Начало отсчета времени для каждой кривой на рис. 1 (*1* — $\tau_1 = 14$ сут, *2* — $\tau_1 = 28$ сут, *3* — $\tau_1 = 120$ сут) совпадает с возрастом материала связующего композита τ_1, в котором к нему была приложена внешняя нагрузка.

1. *Каминский А. А.* Разрушение вязкоупругих тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1990. – 310 с.
2. *Механика* композитов: В 12 т. Т. 5 / Под общ. ред. А. Н. Гузя. – Механика разрушения / Под ред. А. А. Каминского. – Киев: ПТОО «А. С. К.», 1996. – 340 с.
3. *Гаврилов Г. В.* Определение вязкоупругих характеристик композита на основе рациональной аппроксимации // Доп. НАН України. – 2006. – № 3. – С. 47–50.
4. *Лучко Й. Й.* Методи оцінки несучої здатності і підвищення тріщиностійкості залізобетонних елементів конструкцій. – Львів: Слово і комерція, 1997. – 435 с.
5. *Kaminsky A. A., Gavrilov G. V.* Initiation and stable growth of penny-shaped crack in aging viscoelastic transversally isotropic material // Theoret. and Appl. Fracture Mechanics. – 2002. – **38**. – P. 243–254.
6. *Каминский А. А., Гаврилов Д. А.* Длительное разрушение полимерных и композитных материалов с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1992. – 248 с.
7. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. – Москва; Ленинград: ГИТТЛ, 1952. – 324 с.
8. *Хорошун Л. П., Маслов Б. П., Шикула Е. Н., Назаренко Л. В.* Статистическая механика и эффективные свойства материалов. – Киев: Наук. думка, 1993. – 390 с.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 07.02.2007