ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

9 • 2007

МАТЕМАТИКА

УДК 517.956.4

© 2007

С. Д. Івасишен, Г. П. Івасюк

Початкові задачі для параболічних систем Солонникова–Ейдельмана

(Представлено членом-кореспондентом НАН України Б. Й. Пташником)

Initial problems for a new class of systems, which unite the structures of Solonnikov-parabolic and Eidelman-parabolic systems, are considered. The theorem on a correct solvability of these problems in Hölder spaces of rapidly growing functions is proved, and an estimate of the norms of solutions through the corresponding norms of right-hand members of a problem is obtained. For a correctness of such an estimate, the requirement of parabolicity of a system is not only sufficient, but also necessary.

Класичне означення І. Г. Петровського [1] параболічних систем рівнянь із частинними похідними узагальнено С. Д. Ейдельманом [2] на випадок систем, в яких диференціювання за різними просторовими змінними мають, взагалі кажучи, різну вагу відносно диференціювання за часовою змінною, тобто системи мають векторну параболічну вагу $\overrightarrow{2b} := (2b_1, \ldots, 2b_n)$ (такі системи називаються $\overrightarrow{2b}$-параболічними або параболічними за Ейдельманом), та В. О. Солонниковим [3] — на випадок, коли порядок оператора, який діє на невідому функцію u_j у рівнянні з номером k, може залежати як від j, так і від k (такі системи названі параболічними за Солонниковим). Дослідженню задачі Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем присвячені праці [2, 4–6], а початкових і крайових задач для параболічних за Солонниковим систем — [3, 7, 8].

У даному повідомленні розглядаються системи, які природно узагальнюють параболічні за Солонниковим системи і системи, параболічні в розумінні Ейдельмана (такі системи ми називаємо параболічними за Солонниковим системами квазіоднорідної структури або параболічними системами Солонникова–Ейдельмана). Вивчення таких систем, в основному для модельного випадку, розпочато в [9, 10]. Тут наводяться результати їх подальшого дослідження. Основним із них є теорема про коректну розв'язність початкових задач у просторах Гельдера швидко зростаючих функцій та точні оцінки розв'язків. Ці результати є новими для загальних $\overrightarrow{2b}$-параболічних і параболічних за Солонниковим систем. Вони доповнюють відповідні результати з [3–7].

1. Нехай n, N, $b_1, \ldots, b_n$ — задані натуральні числа, b — найменше спільне кратне чисел $b_1, \ldots, b_n$; $m := (m_1, \ldots, m_n)$, $m_0 := 2b$, $m_j := 2b/(2b_j)$, $j \in \{1, \ldots, n\}$; i — уявна одиниця; $A(t,x,\partial_t,\partial_x) := (A_{kj}(t,x,\partial_t,\partial_x))_{k,j=1}^N$; $u := \mathrm{col}(u_1, \ldots, u_N)$, $f := \mathrm{col}(f_1, \ldots, f_N)$ — невідома та задана вектор-функції; $\Pi_H := \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t \in H, x \in \mathbb{R}^n\}$, якщо $H \subset \mathbb{R}$; T — задане додатне число.

Припустимо, що існують такі числа s_k і t_j із $\mathbb{Z}$, що степінь відносно λ многочлена $A_{kj}(t,x,p\lambda^{m_0}, i\sigma\lambda^m)$, $\sigma\lambda^m := (\sigma_1\lambda^{m_1}, \ldots, \sigma_n\lambda^{m_n})$, не перевищує $s_k + t_j$ (якщо $s_k + t_j < 0$, то $A_{kj} := 0$) і $\sum\limits_{k=1}^{N}(s_k + t_k) = 2br$, де r — степінь $\det A(t,x,p,i\sigma)$ як многочлена від p.

Нехай $A^0 := (A^0_{kj})_{k,j=1}^N$ — головна частина A, тобто $A^0_{kj}(t,x,p\lambda^{m_0}, i\sigma\lambda^m) = \lambda^{s_k+t_j} A^0_{kj}(t,x,p,i\sigma)$.

Означення. Система рівнянь

$$A(t,x,\partial_t,\partial_x)u(t,x) = f(t,x), \qquad (t,x) \in \Pi_{[0,T]}, \tag{1}$$

називається рівномірно параболічною системою Солонникова–Ейдельмана на множині $\Pi_{[0,T]}$, якщо існує така стала $\delta > 0$, що для будь-яких $(t,x) \in \Pi_{[0,T]}$ і $\sigma \in \mathbb{R}^n$ p-корені рівняння $\det A^0(t,x,p,i\sigma) = 0$ задовольняють нерівність

$$\mathrm{Re}\, p(t,x,\sigma) \leqslant -\delta(\sigma_1^{2b_1} + \cdots + \sigma_n^{2b_n}).$$

Числа t_j і s_k визначаються неоднозначно. Їхній вибір фіксуватимемо умовою $\max\limits_{k \in \{1,\ldots,N\}} s_k = 0$.

Частинними випадками вищеозначених систем є системи, параболічні за Петровським ($m_k = 1$, $k \in \{1, \ldots, n\}$, $s_j = 0$ і $t_j = 2bn_j$, $n_j \in \mathbb{N}$, $j \in \{1, \ldots, N\}$), $\overrightarrow{2b}$-параболічні за Ейдельманом ($m_k > 1$ для принаймні одного $k \in \{1, \ldots, n\}$, $s_j = 0$ і $t_j = 2bn_j$, $j \in \{1, \ldots, N\}$) і параболічні за Солонниковим однорідної структури ($m_k = 1$, $k \in \{1, \ldots, n\}$).

Вважатимемо, що виконується умова:

A) система (1) є рівномірно параболічною в $\Pi_{[0,T]}$ зі сталою $\delta > 0$ згідно з вищенаведеним означенням.

2. Для систем (1) задавати початкові умови так, як для систем Петровського, взагалі кажучи, не можна. Задаватимемо їх так само, як для систем Солонникова з однорідною структурою [7].

Нехай $B(x,\partial_t,\partial_x) := (B_{kj}(x,\partial_t,\partial_x))_{k=1,j=1}^{r,N}$ — матричний диференціальний вираз, $\varphi = \mathrm{col}(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$ — задана вектор-функція. Припустимо, що існують такі цілі числа p_k, що степінь відносно λ многочлена $B_{kj}(x,p\lambda^{m_0}, i\sigma\lambda^m)$ не перевищує $p_k + t_j$, а якщо $p_k + t_j < 0$, то $B_{kj} := 0$. Тут t_j — ті самі, що й у системі (1). Головною частиною виразу B назвемо вираз $B^0 := (B^0_{kj})_{k=1,j=1}^{r,N}$, де $B^0_{kj}(x,p\lambda^{m_0}, i\sigma\lambda^m) = \lambda^{p_k+t_j} B^0_{kj}(x,p,i\sigma)$.

Початкові умови для системи (1) задамо у вигляді

$$B(x,\partial_t,\partial_x)u(t,x)\big|_{t=0} = \varphi(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Для забезпечення коректності задачі з умовою (2) матричний вираз B повинен задовольняти відповідну умову доповняльності, рівномірним варіантом якої є умова:

B) існує така стала $\delta_1 > 0$, що для всіх матриць $H^{(p')}$ (їх означення див. у [7, 10]) і точок $x \in \mathbb{R}^n$ справджується нерівність

$$|\det H^{(p')}(x)| \geqslant \delta_1.$$

Зауважимо (див. [7]), що з умови $\boldsymbol{B}$ випливає від'ємність чисел p_k, $k \in \{1, \ldots, r\}$.

3. При формулюванні основних результатів цього повідомлення користуватимемось такими просторами Гельдера, означеними в [10]:

$H^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+\lambda,[0,T]} := H^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+\lambda}$ і $C^{\overrightarrow{a}}_{l+\lambda}$ — простори функцій, які визначені відповідно в $\Pi_{[0,T]}$ і $\mathbb{R}^n$, разом зі своїми похідними узагальненого порядку не вище $l \in \mathbb{Z}_+$ можуть певним способом (який характеризується вектором $\overrightarrow{a}$ з невід'ємними координатами) зростати при $|x| \to \to \infty$, а старші похідні ще задовольняють відповідну вагову умову Гельдера з показником $\lambda \in (0,1)$;

$H_{l+\lambda,[0,T]} := H^{\overrightarrow{k}(\cdot,0)}_{l+\lambda,[0,T]}$ і $C_{l+\lambda} := C^{\overrightarrow{0}}_{l+\lambda}$ ($\overrightarrow{0} := (0,\ldots,0)$) — відповідні простори Гельдера обмежених функцій;

$\overset{\circ}{H}{}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+\lambda,[0,T]}$ — підпростір простору $H^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+\lambda,[0,T]}$, елементи якого разом з усіма своїми похідними дорівнюють нулю при $t = 0$;

$\prod\limits_{j=1}^{N} H^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l_j+\lambda,[0,T]}$, $\prod\limits_{j=1}^{N} \overset{\circ}{H}{}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l_j+\lambda,[0,T]}$ і $\prod\limits_{j=1}^{r} C^{\overrightarrow{a}}_{l_j+\lambda}$ — декартові добутки відповідних просторів з індексами $l_j \in \mathbb{Z}_+$.

Через $\|\cdot\|^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+\lambda,[0,T]}$, $\|\cdot\|_{l+\lambda,[0,T]}$ і $|\cdot|^{\overrightarrow{a}}_{l+\lambda}$ позначимо норми відповідно в просторах $H^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+\lambda,[0,T]}$, $H_{l+\lambda,[0,T]}$ і $C^{\overrightarrow{a}}_{l+\lambda}$.

4. Основним результатом цієї роботи є теорема про коректну розв'язність початкової задачі (1), (2).

Теорема 1. *Нехай l і λ — задані числа із множин $\mathbb{Z}_+$ і $(0,1)$. Якщо виконуються умови* $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ *та умова:*

C) *коефіцієнти диференціальних виразів A_{kj} і B_{sj} належать відповідно до просторів $H_{l-s_k+\lambda,[0,T]}$ і $C_{l-p_s+\lambda}$, $\{k,j\} \subset \{1,\ldots,N\}$, $s \in \{1,\ldots,r\}$, то для будь-яких $f \in \in \prod\limits_{j=1}^{N} H^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l-s_j+\lambda,[0,T]}$ і $\varphi \in \prod\limits_{s=1}^{r} C^{\overrightarrow{a}}_{l-p_s+\lambda}$ існує єдиний розв'язок $u \in \prod\limits_{j=1}^{N} H^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+t_j+\lambda,[0,T]}$ задачі* (1), (2), *для якого справджується оцінка*

$$\sum_{j=1}^{N} \|u_j\|^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+t_j+\lambda,[0,T]} \leqslant C\left(\sum_{j=1}^{N} \|f_j\|^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l-s_j+\lambda,[0,T]} + \sum_{s=1}^{r} |\varphi_s|^{\overrightarrow{a}}_{l-p_s+\lambda}\right), \tag{3}$$

де стала C залежить тільки від відповідних норм коефіцієнтів задачі, сталих δ і δ_1 з умов $\boldsymbol{A}$ *і* $\boldsymbol{B}$ *та чисел n, N, b_j, t_k, s_k, p_s, l, λ і T.*

Доведення теореми 1 проводиться за схемою доведення в [7] відповідної теореми для крайових задач для параболічних за Солонниковим систем. Центральним моментом доведення є вивчення такої задачі з нульовими початковими даними в шарі $\Pi_{[t_0,t_0+\tau]}$, $0 \leqslant t_0 < t_0 + + \tau \leqslant T$:

$$A(t,x,\partial_t,\partial_x)v(t,x) = g(t,x), \qquad (t,x) \in \Pi_{[t_0,t_0+\tau]}, \qquad v \in \prod_{j=1}^{N} \overset{\circ}{H}{}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+t_j+\lambda,[t_0,t_0+\tau]}, \tag{4}$$

де $g \in \prod\limits_{j=1}^{N} \overset{\circ}{H}{}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l-s_j+\lambda,[t_0,t_0+\tau]}$. Для цієї задачі доводиться така теорема.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ *і* $\boldsymbol{C}$. *Тоді існує таке число τ_0, що для будь-якого числа $\tau \leqslant \tau_0$ задача* (4) *однозначно розв'язна і для її розв'язку справджується* *нерівність*

$$\sum_{j=1}^{N} \|v_j\|^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+t_j+\lambda,[t_0,t_0+\tau]} \leqslant C \sum_{j=1}^{N} \|g_j\|^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l-s_j+\lambda,[t_0,t_0+\tau]},$$

в якій стала C *залишається обмеженою при* $\tau \to 0$.

За допомогою цієї теореми та теореми 1 із [10] про зведення задачі (1), (2) до задачі з нульовими початковими даними вже легко доводиться теорема 1.

Щоб довести теорему 2, треба побудувати так званий регуляризатор задачі та дослідити його властивості. Для задачі (4) регуляризатор будується за допомогою операторів, які розв'язують відповідні модельні задачі. Останні детально досліджені в [10].

5. З теореми 1 випливає, що умова параболічності системи (1) є достатньою, щоб справджувалась оцінка (3) для будь-якого розв'язку $u \in \prod_{j=1}^{N} H^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+t_j+\lambda,[0,T]}$ задачі (1), (2). Виявляється, що ця умова є необхідною, так що правильною є така теорема.

Теорема 3. *Нехай система* (1) *має структуру параболічної системи Солонникова–Ейдельмана з параметрами* b_j, t_k, s_k, p_s *і* r, *число початкових умов* (2) *дорівнює* r *і диференціальний вираз* $B(x,\partial_t,\partial_x)$ *задовольняє умову* $\boldsymbol{B}$, *коефіцієнти диференціальних виразів* A *і* B *задовольняють умову* $\boldsymbol{C}$ *з деякими числами* $l \in \mathbb{Z}_+$ *і* $\lambda \in (0,1)$. *Для того щоб система* (1) *задовольняла умову* $\boldsymbol{A}$, *необхідно і достатньо, щоб існувала така стала* $C > 0$, *що для всіх вектор-функцій* $u \in \prod_{j=1}^{N} H^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+t_j+\lambda,[0,T]}$ *справджується нерівність*

$$\sum_{j=1}^{N} \|u_j\|^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+t_j+\lambda,[0,T]} \leqslant C\left(\sum_{k,j=1}^{N} \|A_{kj}u_j\|^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l-s_k+\lambda,[0,T]} + \sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{N} |B_{kj}u_j|_{t=0}|^{\overrightarrow{a}}_{l-p_k+\lambda}\right). \tag{5}$$

Покажемо, як можна довести необхідність умови параболічності для правильності оцінки (5) у випадку модельної системи

$$A^0(\partial_t,\partial_x)u(t,x) = f(t,x), \qquad (t,x) \in \Pi_{[0,T]}. \tag{6}$$

Припустимо, що система (6) не є параболічною. Тоді існують такі $p^0 \in \mathbb{C}$ і $\sigma^0 := (\sigma^0_1,\ldots,\sigma^0_n) \in \mathbb{R}^n$, що $|p^0| + |\sigma^0| \neq 0$, $\operatorname{Re} p^0 \geqslant 0$ і

$$\det A^0(p^0,\sigma^0) = 0. \tag{7}$$

При довільно фіксованому $\nu > 0$ розглянемо матрицю-стовпчик висоти N $v_\nu(t,x)$, всі елементи якої дорівнюють $\exp\left\{\nu^{m_0}p^0t + i\sum_{j=1}^{n}\nu^{m_j}\sigma^0_jx_j\right\}$. Нехай ζ — нескінченно диференційовна і фінітна в $\Pi_{[0,T]}$ функція. Візьмемо матрицю-стовпчик

$$u_\nu(t,x) := [\widehat{A^0}(\partial_t,\partial_x)v_\nu(t,x)]\zeta(t,x), \qquad (t,x) \in \Pi_{[0,T]},$$

де $\widehat{A^0} := \det A^0(A^0)^{-1}$ — матриця, взаємна для A^0. Оскільки елементи $u_{\nu j}$, $j \in \{1,\ldots,N\}$, матриці u_ν є фінітними в $\Pi_{[0,T]}$, то оцінка (5) для них має вигляд

$$\sum_{j=1}^{N} \|u_{\nu j}\|_{l+t_j+\lambda,[0,T]} \leqslant C \sum_{k,j=1}^{N} \|A^0_{kj}u_{\nu j}\|_{l-s_k+\lambda,[0,T]}. \tag{8}$$

Але ця нерівність не може виконуватися для досить великих $\nu > 0$. Справді, найшвидше зростаючий при $\nu \to \infty$ член у лівій частині нерівності (8) дорівнює

$$C\nu^{2br-s_0+l+\lambda}\exp\{\nu^{m_0}\tau\,\mathrm{Re}\,p^0\}, \qquad \tau \in (0,T],$$

де $s_0 := \min\limits_{j\in\{1,\dots,N\}} s_j$. Але оскільки на підставі (7)

$$A^0(\partial_t,\partial_x)[\widehat{A^0}(\partial_t,\partial_x)v_\nu] = \nu^{2br}\det A^0(p^0,i\sigma^0)v_\nu = 0,$$

то аналогічний член у правій частині зазначеної нерівності дорівнює

$$C\nu^{2br-s_0+l+\lambda-1}\exp\{\nu^{m_0}\tau\,\mathrm{Re}\,p^0\}.$$

Отже, нерівність (8) порушується при великих ν.

1. *Петровский И. Г.* О проблеме Коши для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций // Бюл. Моск. ун-та. Математика и механика. – 1938. – **1**, № 7. – С. 1–72.
2. *Эйдельман С. Д.* Об одном классе параболических систем // Докл. АН СССР. – 1960. – **133**, № 1. – С. 40–43.
3. *Солонников В. А.* О краевых задачах для общих параболических систем // Там же. – 1964. – **157**, № 1. – С. 56–59.
4. *Ивасишен С. Д., Эйдельман С. Д.* $\overrightarrow{2b}$-параболические системы // Тр. сем. по функц. анализу. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1968. – Вып. 1. – С. 3–175, 271–273.
5. *Івасишен С. Д., Кондур О. С.* Про матрицю Гріна задачі Коші та характеризацію деяких класів розв'язків для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем довільного порядку // Мат. студії. – 2000. – **14**, № 1. – С. 73–84.
6. *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. – Basel: Birkhäuser, 2004. – 390 p. – (Operator Theory: Adv. and Appl. Vol. 152).
7. *Солонников В. А.* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Тр. Мат. ин-та. АН СССР. – 1965. – **83**. – С. 3–163.
8. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – Москва: Наука, 1967. – 736 с.
9. *Івасюк Г. П.* Початкова задача для модельних параболічних за Солонниковим систем неоднорідної структури // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. – 2005. – Вип. 269. – С. 49–52.
10. *Івасишен С. Д., Івасюк Г. П.* Параболічні за Солонниковим системи квазіоднорідної структури // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 11. – С. 1501–1510.

НТУ України "Київський політехнічний інститут"
Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича

Надійшло до редакції 22.02.2007