УДК 531.36

В. И. Слынько

О приближенных решениях нечетких дифференциальных уравнений в пространстве $\mathbb{E}^2$

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. А. Мартынюком)

A new approach to the construction of approximate solutions of the fuzzy differential equations in the $\mathbb{E}^2$ space is proposed. A support function approximation of fuzzy sets by Fejer sums is supposed to the base of the approach.

В настоящей работе рассматривается вопрос о построении приближенных решений нечетких дифференциальных уравнений в пространстве $\mathbb{E}^2$. Особенностью этого пространства является то, что оно изоморфно некоторому замкнутому подмножеству пространства непрерывных 2π-периодических функций, что позволяет использовать хорошо разработанный аппарат теории приближения функций тригонометрическими полиномами при построении приближенных решений нечетких дифференциальных уравнений.

Общая теория нечетких дифференциальных уравнений изложена в работе [1]. Нечеткие дифференциальные уравнения в цитируемой работе понимаются в обобщенном смысле, как фазовое пространство нечеткого дифференциального уравнения принимается пространство нечетких множеств. В настоящей работе в качестве фазового пространства нечеткого дифференциального уравнения принимается некоторое функциональное пространство (пространство опорных функций нечетких множеств), которое изоморфно и изометрично исходному пространству нечетких множеств. При этом изоморфные пространства обозначаются одинаково. Опишем основные пространства, необходимые для дальнейшего изложения.

Пусть $C[0, 2\pi]$ — пространство непрерывных 2π-периодических функций. Каждый элемент пространства $\mathbb{E}^2$ можно интерпретировать как функцию двух переменных $h(\alpha, \phi)$, определенных на произведении $[0, 1] \times [0, 2\pi]$. Определим пространства

$$\Omega = \{h(\alpha, \phi) \mid h(\alpha, .) \in C[0, 2\pi]\}$$

с нормой

$$\|h(\alpha, \phi)\| = \sup_{\alpha \in (0,1]} \|h(\alpha, .)\|_{C[0,2\pi]},$$

и его подпространство

$$\Omega_\sigma = \left\{h(\alpha, \phi) \mid h(\alpha, \phi) \in \Omega, \int\limits_0^{2\pi} h(\alpha, \phi) \cos\phi \, d\phi = \int\limits_0^{2\pi} h(\alpha, \phi) \sin\phi \, d\phi = 0\right\}.$$

Функция $h(\alpha, \phi) \in \mathbb{E}^2$ тогда и только тогда, когда выполняются условия:

а) при любом фиксированном $\alpha \in [0, 1]$ для всех ϕ, ψ, $|\phi - \psi| \leqslant \pi$ справедливо неравенство

$$2\cos\frac{\phi - \psi}{2} h\left(\alpha, \frac{\phi + \psi}{2}\right) \leqslant h(\alpha, \phi) + h(\alpha, \psi); \tag{1}$$

б) при всех $\phi \in [0, 2\pi]$ выполняется неравенство

$$h(\alpha_1, \phi) \leqslant h(\alpha_2, \phi),$$

если только $0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant 1$;

в) для любой неубывающей последовательности чисел $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\alpha_k \in [0, 1]$ и такой, что $\alpha_k \to \alpha$ при $k \to \infty$ выполняется предельное соотношение

$$h(\alpha, \phi) = \lim_{k\to\infty} h(\alpha_k, \phi);$$

г) для любой невозрастающей последовательности чисел $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\alpha_k \in [0, 1]$ и такой, что $\alpha_k \to 0$ при $k \to \infty$ выполняется предельное соотношение

$$h(0, \phi) = \lim_{k\to\infty} h(\alpha_k, \phi).$$

Лемма 1. *Пусть функция $h(\alpha, \phi) \in \Omega$ удовлетворяет условиям:*

(1) при любом фиксированном $\alpha \in [0, 1]$ функция $h(\alpha, .) \in C^2[0, 2\pi]$;

(2) при всех $\phi \in \mathbb{R}^n$ выполняется неравенство

$$h(\alpha_1, \phi) \leqslant h(\alpha_2, \phi),$$

если только $0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant 1$;

(3) для любой неубывающей последовательности чисел $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\alpha_k \in [0, 1]$ и такой, что $\alpha_k \to \alpha$ при $k \to \infty$ выполняется предельное соотношение

$$h(\alpha, \phi) = \lim_{k\to\infty} h(\alpha_k, \phi);$$

(4) для любой невозрастающей последовательности чисел $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\alpha_k \in [0, 1]$ и такой, что $\alpha_k \to 0$ при $k \to \infty$ выполняется предельное соотношение

$$h(0, \phi) = \lim_{k\to\infty} h(\alpha_k, \phi)$$

и при любом фиксированном $\alpha \in [0, 1]$ функция $h(\alpha, .) \in C^2[0, 2\pi]$. Тогда для того чтобы $h(\alpha, \phi) \in \mathbb{E}^2$, необходимо и достаточно, чтобы при всех $\alpha \in [0, 1]$ и $\phi \in [0, 2\pi]$ выполнялось неравенство

$$\frac{\partial^2 h(\alpha, \phi)}{\partial \phi^2} + h(\alpha, \phi) \geqslant 0. \tag{2}$$

Следствие. *Пусть $h \in C^2[0, 2\pi]$, тогда функция $h(\phi) \in \mathcal{K}_C^2$ тогда и только тогда, когда*

$$\frac{d^2 h(\phi)}{d\phi^2} + h(\phi) \geqslant 0.$$

Обозначим $J(\tau)$ неотрицательную непрерывную 2π-периодическую функцию. Имеет место следующий результат.

Лемма 2. *Пусть $h(\alpha,\phi) \in \mathbb{E}^2$, тогда функция $g(\alpha,\phi) \in \mathbb{E}^2$, где*

$$g(\alpha,\phi) = \int\limits_0^{2\pi} J(\phi-\tau)h(\alpha,\tau)\,d\tau.$$

Следствие. *Множество элементов пространства $\mathbb{E}^2$, для которых при любом фиксированном $\alpha \in [0,1]$ функция $h(\alpha,\phi) \in C^\infty[0,2\pi]$, всюду плотно в $\mathbb{E}^2$.*

Для доказательства необходимо выбрать в качестве функции $J(\phi)$ ядро Фейера

$$J(\phi) = \Phi_N(\phi) = \frac{1}{2(N+1)}\left(\frac{\sin\dfrac{N+1}{2}\phi}{\sin\dfrac{\phi}{2}}\right)^2$$

и воспользоваться теоремой Фейера (см. [2]).

Установим условия принадлежности элемента $h(\alpha,\phi) \in \Omega$ пространству $\mathbb{E}^2$. Для любого $\alpha \in [0,1]$ обозначим

$$a_k(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} h(\alpha,\phi)\cos k\phi\,d\phi, \qquad k = 0,1,\ldots,$$

$$b_k(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} h(\alpha,\phi)\sin k\phi\,d\phi, \qquad k = 1,2,\ldots.$$

Теорема 1. *Предположим, что функция $h(\alpha,\phi) \in \Omega$ удовлетворяет условиям 2–4 и при любом фиксированном $\alpha \in [0,1]$ и при любом $N = 0,2,\ldots$ тригонометрические полиномы*

$$\frac{a_0(\alpha)}{2} + \sum_{k=2}^{N}(1-k^2)\left(1-\frac{k}{N+1}\right)(a_k(\alpha)\cos k\phi + b_k(\alpha)\sin k\phi)$$

являются неотрицательными, тогда $h(\alpha,\phi) \in \mathbb{E}^2$, и наоборот.

Приведем определение нечеткого дифференциального уравнения и его решения. Рассмотрим в банаховом пространстве Ω дифференциальное уравнение

$$\frac{dh(t)}{dt} = \mathcal{F}(t,h(t)), \qquad h(t_0) = h_0, \tag{3}$$

где $h(t) \in \Omega$, $\mathcal{F} \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{E}^n, \Omega)$.

Определение 1. Дифференциальное уравнение (3) называется нечетким дифференциальным уравнением, если для любого $h_0 \in \mathbb{E}^2$ существует дифференцируемая функция $h(t)$, $t \geqslant t_0$, определенная на некотором интервале $[t_0, t_0+a)$, $0 < a \leqslant \infty$, со значениями в пространстве $\mathbb{E}^2$ удовлетворяющая дифференциальному уравнению (3) и начальному условию $h(t_0) = h_0$.

Функция $h(t)$, удовлетворяющая условиям определения 1, называется решением нечеткого дифференциального уравнения (3).

Обозначим $\mathcal{K}_C^n$ пространство опорных функций непустых выпуклых компактов на плоскости. Далее рассматриваются нечеткие дифференциальные уравнения, правые части которых удовлетворяют следующему условию: существуют операторы $\mathcal{F}_\alpha\colon \mathcal{K}_C^2 \to C[0, 2\pi]$ такие, что

$$[\mathcal{F}(t, h(t))]_\alpha = \mathcal{F}_\alpha(t, h_\alpha(t)), \qquad \alpha \in [0, 1],$$

где $h_\alpha(t) = h(t, \alpha, .) \in C[0, 2\pi]$.

Нечеткое дифференциальное уравнение в пространстве $\mathbb{E}^2$

$$\frac{dh(t)}{dt} = \mathcal{F}_\alpha(t, h_\alpha(t)), \qquad h(t_0) = h_0(\alpha, \phi) \in \mathbb{E}^2, \tag{4}$$

где $h(t) \in \mathbb{E}^2$, можно привести к гибридной системе на произведении пространств $\mathbb{R}^2 \times \times \mathcal{K}_C^2/\mathbb{R}^2$ следующим образом:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1(t,\alpha)}{dt} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathcal{F}(t, \alpha, x_1(t,\alpha)\cos\phi + x_2(t,\alpha)\sin\phi + y(t,\alpha,\phi))\cos\phi\, d\phi,\\
\frac{dx_2(t,\alpha)}{dt} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathcal{F}(t, \alpha, x_1(t,\alpha)\cos\phi + x_2(t,\alpha)\sin\phi + y(t,\alpha,\phi))\sin\phi\, d\phi,
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dy(t,\alpha,\phi)}{dt} &= \mathcal{F}(t, \alpha, x_1(t,\alpha)\cos\phi + x_2(t,\alpha)\sin\phi + y(t,\alpha,\phi)) - \\
&- \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(\phi - s)\mathcal{F}(t, \alpha, x_1(t,\alpha)\cos s + x_2(t,\alpha)\sin s + y(t,\alpha,s))\, ds
\end{aligned} \tag{6}$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned}
&x_1(t_0,\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h_0(\alpha,\phi)\cos\phi\, d\phi, \qquad x_2(t_0,\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h_0(\alpha,\phi)\sin\phi\, d\phi,\\
&y(t_0,\alpha,\phi) = h_0(\alpha,\phi) - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(\phi - s) h(\alpha, s)\, ds \in \mathbb{E}^2 \bigcap \Omega_\sigma.
\end{aligned} \tag{7}$$

Наряду с задачей (5)–(7) рассмотрим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которую в дальнейшем будем называть системой N-го приближения для нечеткого дифференциального уравнения (3).

$$\frac{dx_1^{(N)}(t,\alpha)}{dt} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathcal{F}(t, \alpha, x_1^{(N)}(t,\alpha)\cos\phi + x_2^{(N)}(t,\alpha)\sin\phi + y^{(N)}(t,\alpha,\phi))\cos\phi\, d\phi,$$

$$\frac{dx_2^{(N)}(t,\alpha)}{dt} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathcal{F}(t, \alpha, x_1^{(N)}(t,\alpha)\cos\phi + x_2^{(N)}(t,\alpha)\sin\phi + y^{(N)}(t,\alpha,\phi))\sin\phi\, d\phi,$$

$$\frac{da_k^{(N)}(t,\alpha)}{dt} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \mathcal{F}(t,\alpha,x_1^{(N)}(t,\alpha)\cos\phi + x_2^{(N)}(t,\alpha)\sin\phi + y^{(N)}(t,\alpha,\phi))\cos k\phi\, d\phi,$$

$$k = 0, 2, \ldots, N, \tag{8}$$

$$\frac{db_k^{(N)}(t,\alpha)}{dt} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \mathcal{F}(t,\alpha,x_1^{(N)}(t,\alpha)\cos\phi + x_2^{(N)}(t,\alpha)\sin\phi + y^{(N)}(t,\alpha,\phi))\sin k\phi\, d\phi,$$

$$k = 2, \ldots, N,$$

где

$$y^{(N)}(t,\alpha,\phi) = \frac{a_0(t,\alpha)}{2} + \sum_{k=2}^{N} 1 - \frac{k}{N+1}(a_k(t,\alpha)\cos k\phi + b_k(t,\alpha)\sin k\phi),$$

с начальными условиями

$$x_1^{(N)}(t_0,\alpha) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} h_0(\alpha,\phi)\cos\phi\, d\phi, \qquad x_2^{(N)}(t_0,\alpha) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} h_0(\alpha,\phi)\cos\phi\, d\phi,$$

$$a_k^{(N)}(t_0,\alpha) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} h_0(\alpha,\phi)\cos k\phi\, d\phi, \qquad k = 0, 2, \ldots, N,$$

$$b_k^{(N)}(t_0,\alpha) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} h_0(\alpha,\phi)\sin k\phi\, d\phi, \qquad k = 2, \ldots, N.$$

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 2. *Предположим, что оператор $\mathcal{F}(t,.)$ определяет нечеткое дифференциальное уравнение и в области $D_{T,r} = \{(t,h) \mid 0 \leqslant t - t_0 \leqslant T, \|h - h_0\|_\Omega \leqslant r$, т. е. существует постоянная L такая, что*

$$\|\mathcal{F}(t,\alpha,h') - \mathcal{F}(t,\alpha,p,h'')\|_\Omega \leqslant L\|h' - h''\|_\Omega$$

при всех $(t,h') \in D_{T,r}$, $(t,h'') \in D_{T,r}$. Тогда

$$x_i^{(N)}(t,\alpha) \to x_i(t,\alpha), \qquad i = 1, 2, \qquad \text{при} \qquad N \to \infty,$$

$$y^{(N)}(t,\alpha,\phi) \to y(t,\alpha,\phi) \qquad \text{при} \qquad N \to \infty$$

при всех $(t,\alpha,\phi) \in \mathbb{R}_+ \times [0,1] \times [0,2\pi]$ равномерно по $(t,\alpha) \in [t_0, t_0 + T] \times [0,1]$, $T > 0$.

Теорема 1 позволяет построить приближенные решения нечеткого дифференциального уравнения (3), взяв в качестве приближенного решения функции

$$h^{(N)}(t) = \left(1 - \frac{1}{N+1}\right)(x_1(t,\alpha)\cos\phi + x_2(t,\alpha)\sin\phi) + y^{(N)}(t,\alpha,\phi).$$

1. *Lakshmikantham V., Ram Mohapatra.* Theory of Fuzzy Differential Equations and Inclusions. – Melbourne: Florida Institute of Technology, 2003. – 178 p. (Manuscript).
2. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. – Москва; Ленинград: ОГИЗ, 1947. – 324 с.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 18.12.2006

УДК 517.912

Р. М. Тацій, О. О. Власій

Еквівалентна рекурентна формула для узагальненого квазідиференціального рівняння та її застосування

(Представлено членом-кореспондентом НАН України Б. Й. Пташником)

The equivalence of an (n+m)-order generalized quasi-differential equation and an (n+m)-order difference equation which will be named by the equivalent recurrent formula is established. Applications of the equivalent recurrent formula are considered.

Вперше існування точної різницевої схеми для диференціальних рівнянь другого порядку з сумовними коефіцієнтами було доведене А. А. Самарським в [1]. У даному повідомленні пропонується дещо інший підхід до побудови точних різницевих схем, який дає змогу одержати такі схеми для квазідиференціальних рівнянь (КДР)довільного порядку з узагальненими коефіцієнтами. У роботі [2] було одержано еквівалентне рекурентне співвідношення (точну різницеву схему) для узагальненого КДР другого порядку способом, який не вдалося поширити для КДР вищих порядків.

У роботі використовуватимемо такі позначення: I — відкритий інтервал дійсної осі $\mathbb{R}$; $BV^+_{\mathrm{loc}}(I)$ — простір неперервних справа функцій локально обмеженої на I варіації; $L_2(I)$ — простір квадратично сумовних за Лебегом на I функцій; $\delta(x-x_s)$ — функція Дірака з носієм у точці x_s; $\Delta C(x) = C(x)-C(x-0)$ — стрибок матриці-функції $C(x)$, елементи якої належать класу $BV^+_{\mathrm{loc}}(I)$, у точці $x \in I$; ω_N — довільне розбиття відрізка $[a;b] \subset I$: $\omega_N = \{x_i\colon a \equiv \equiv x_0 < x_1 < \cdots < x_k < x_{k+1} < \cdots < x_N \equiv b\}$.

Розглянемо КДР

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}(a_{ij}(x)y^{(n-i)}(x))^{(m-j)} = 0. \tag{1}$$

На коефіцієнти $a_{ij}(x)$ накладемо такі умови:

A) $a_{00}^{-1}(x)$ — обмежена і вимірна на I функція;

B) $a_{i0}(x)$, $a_{0j}(x) \in L_2(I)$, $i = 1,\ldots,n$, $j = 1,\ldots,m$;

C) $a_{ij}(x) = b'_{ij}(x)$, $b_{ij}(x) \in BV^+_{\mathrm{loc}}(I)$, $i = 1,\ldots,n$, $j = 1,\ldots,m$.