УДК 517.95



Член-корреспондент НАН Украины **А. И. Шевченко,**
**А. С. Миненко**

# Конвективный теплоперенос в одной пространственной задаче теплопроводности

*A three-dimensional non-stationary problem of thermal conductivity considering the convective motion in the fluid phase is investigated by the series expansion in the small Reynolds number. The formula of the dependence of a free boundary equation on the Reynolds number is obtained.*

**1. Постановка задачи.** Пусть $\Omega$ — заданная область в $R^3$, граница которой состоит из двух замкнутых, связных, гладких поверхностей $\Gamma^+$ и $\Gamma^-$, не имеющих самопересечений. Поверхности $\Gamma^\pm$ предполагаются принадлежащими классу $H^{4+\alpha}$, $0<\alpha<1$. Пусть далее $\Gamma_t (t\in[0,T])$ — гладкие замкнутые поверхности, лежащие внутри $\Omega$, такие, что $\Gamma^+$ лежит внутри ограниченной области, границей которой является $\Gamma_t$. Поверхность $\Gamma_t$ — граница раздела фаз в момент времени $t$ — разбивает область $\Omega$ на две связные подобласти $\Omega_t^+$ и $\Omega_t^-$. Рассматривается двухфазная задача Стефана при наличии конвективных движений в жидкой фазе. Требуется определить скорость жидкости $\vec{V}(x,t)=(V_1(x,t),V_2(x,t),V_3(x,t))$, давление $p(x,t)$, распределения температур $u^+(x,t)$ и $u^-(x,t)$ соответственно в жидкой и твердой фазах и свободную поверхность $\Gamma_t$ по следующим условиям:

$$\frac{\partial u^+(x,t)}{\partial t}+(\vec{V}\nabla)u^+(x,t)-a_+^2\nabla^2u^+(x,t)=0, \qquad (x,t)\in D_T^+, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u^-(x,t)}{\partial t}-a_-^2\nabla^2u^-(x,t)=0, \qquad (x,t)\in D_T^-, \tag{2}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial \vec{V}(x,t)}{\partial t}+(\vec{V}\nabla)\vec{V}(x,t)+\nabla p(x,t)=\frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2\vec{V}(x,t)+\vec{f}(u^+),\\ \nabla\vec{V}(x,t)=0, \qquad (x,t)\in D_T^+,\end{gathered} \tag{3}$$

$$u^\pm(x,t)|_{t=0}=A^\pm(x), \qquad u^\pm(x,t)|_{x\in\Gamma^+\cup\Gamma^-}=B^\pm(x,t), \tag{4}$$

$$\vec{V}(x,t)|_{t=0}=\vec{C}(x), \qquad \vec{V}(x,t)|_{x\in\Gamma^+\cup\Gamma_t}=0, \tag{5}$$

$$u^\pm(x,t)|_{x\in\Gamma_t}=0, \sum_{i=1}^{3}\left[k_-\frac{\partial u^-}{\partial x_i}-k_+\frac{\partial u^+}{\partial x_i}\right]\cos(n,x_i)+\kappa\cos(n,t)=0, \qquad x\in\Gamma_t, \tag{6}$$

где $D_T^\pm=\{(x,t)\colon x\in\Omega_t^\pm,\ t\in(0,T)\}$, $x=(x_1,x_2,x_3)$, $\Omega_t^\pm$ — области жидкой и твердой фазы, на которые разбивает область $\Omega$ свободная граница раздела фаз $\Gamma_t$, причем $\partial\Omega^\pm=\Gamma_t\bigcup\Gamma^\pm$, $\vec{n}$ — нормаль к $\Gamma_t$, направленная в сторону $\Omega_t^+$, $\nabla=(\partial/\partial x_1,\partial/\partial x_2,\partial/\partial x_3)$. Предполагается также, что $B^\pm(x,t)\in H^{3+\beta,(3+\beta)/2}(\Gamma^\pm\times[0,T])$, $0<\beta<\alpha$, $\vec{C}(x)\in H^{2+\alpha}(\overline{\Omega}_0^+)$,

$A^{\pm}(x) \in H^{5+\alpha}(\overline{\Omega}_0^{\pm})$, где $\Omega_0^{\pm}$ — области, на которые разбивает $\Omega$ граница раздела фаз $\Gamma_0$, и $\pm B^{\pm}(x,t) \geqslant \varepsilon_0 > 0$ при $(x,t) \in \Gamma^{\pm} \times [0,T]$, кроме того, параметры $a_{\pm}$, $k_{\pm}$, $\kappa$, Re, $\varepsilon_0$ считаются положительными постоянными, а $\vec{f}(u^+)$ — принадлежащей классу $C^2(R^1)$, $\vec{f}'(u^+)$ — ограниченной в $R^1$. Отметим, что при малых значениях $t$ задача (1)–(6) разрешима в классе гладких функций, при этом $u^{\pm} \in H^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{D}_T^{\pm})$, $\vec{V} \in H^{2+\beta,(2+\beta)/2}(\overline{D}_T^{+})$, а граница раздела фаз принадлежит классу $H^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}$ [1, теорема 5.10].

Настоящая работа посвящена приближенному анализу задачи (1)–(6) и исследованию влияния конвекции на фронт кристаллизации. Предлагаемый метод исследования этой пространственной, нестационарной задачи состоит в разложении решения в ряд по степеням малых чисел Рейнольдса. Ранее этот метод был использован при исследовании стационарной задачи для двух геометрических переменных [2]. Укажем, что используемые в работе пространства функций определены в [3, гл. I, §1].

**2. Разложение решения в ряд по степеням малого параметра Re.** Пусть $\Omega_0^{\pm}$ — области, на которые разбивает $\Omega$ граница раздела фаз $\Gamma_0$. Для точек поверхности $\Gamma_0$ введем координаты $\omega = (\omega_1, \omega_2)$, через $x(\omega) \in \Gamma_0$ или через $\omega$ будем обозначать также соответствующие точки в $R^3$. Далее, пусть $\vec{n}(\omega)$ — нормаль к $\Gamma_0$, направленная внутрь $\Omega_0^{\pm}$. Известно, что свободную границу $\Gamma_t$ можно представить в виде $\Gamma_t = \{x = x(\omega) + \vec{n}(\omega)\cdot\rho(\omega,t)\}$ с некоторой функцией $\rho(\omega,t)$ класса $H^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\Gamma_0 \times [0,T])$, так что $\rho(\omega,0) = 0$ [1].

Предположим, что неизвестные нашей задачи можно представить в виде степенного ряда:

$$
\begin{aligned}
&u^{\pm}(x,t;\mathrm{Re}) = u_0^{\pm}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (\mathrm{Re})^k u_k^{\pm}(x,t),\\
&V_i(x,t;\mathrm{Re}) = V_{i0}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (\mathrm{Re})^k V_{ik}(x,t), \qquad i = 1,2,3;\\
&\rho(\omega,t;\mathrm{Re}) = \sum_{k=1}^{\infty} (\mathrm{Re})^k \rho_k(\omega,t).
\end{aligned} \tag{7}
$$

Далее, пусть выполняются следующие условия:

$$
\begin{aligned}
&\nabla^2 A^{\pm}(x) = 0, \qquad x \in \Omega_0^{\pm};\\
&A^{\pm}(x)|_{\Gamma^{\pm}} = B^{\pm}(x,0), \qquad A^{\pm}(x)|_{\Gamma_0} = 0, \qquad \vec{C}(x) = 0, \qquad x \in \overline{\Omega}_0^{+},\\
&k_-|\nabla A^-(x)|_{\Gamma_0} = k_+|\nabla A^+(x)|_{\Gamma_0}, \qquad |\nabla A^{\pm}(x)|_{\Gamma_0} \geqslant \widetilde{\varepsilon} > 0.
\end{aligned} \tag{8}
$$

Выпишем теперь условия, определяющие нулевое приближение $\vec{V}_0(x)$, $u_0^{\pm}(x)$:

$$
\begin{cases}
\nabla^2 \vec{V}_0(x) = 0, \quad \nabla \vec{V}_0(x) = 0, \quad x \in \Omega_0^{+}, \quad \vec{V}_0(x)|_{\partial\Omega_0^{+}} = 0, \quad \nabla^2 u_0^{\pm}(x) = 0, \quad x \in \Omega_0^{\pm},\\
u_0^{\pm}(x)|_{\Gamma^{\pm}} = B^{\pm}(x,0), \qquad u_0^{\pm}(x)|_{\Gamma_0} = 0, \qquad k_- \dfrac{\partial u_0^-(x)}{\partial n}|_{\Gamma_0} - k_+ \dfrac{\partial u_0^+(x)}{\partial n}|_{\Gamma_0} = 0,
\end{cases} \tag{9}
$$

$\vec{n}$ — нормаль к $\Gamma_0$, направленная в сторону области $\Omega_0^{\pm}$. Тогда в качестве нулевого приближения $u_0^{\pm}(x)$ можно взять функции $A^{\pm}(x)$, т. е. $u_0^{\pm}(x) = A^{\pm}(x)$, $x \in \overline{\Omega}_0^{\pm}$.

**3. Первое приближение.** Пусть $\widetilde{D}_T^{\pm} = \Omega_0^{\pm} \times (0,T)$, $\Gamma_T^{\pm} = \Gamma^{\pm} \times [0,T]$, $\widetilde{\Gamma}_T = \Gamma_0 \times [0,T]$, $\Gamma_T = \Gamma_t \times [0,T]$, тогда для функций $\vec{V}_1(x,t) = (V_{11}(x,t), V_{21}(x,t), V_{31}(x,t))$, $u_1^{\pm}(x,t)$, $\rho_1(\omega,t)$ из условий (1)–(6) и разложений (7) вытекает следующая задача:

$$\frac{\partial \vec{V}_1(x,t)}{\partial t} + \nabla p_0(x) = \nabla^2 \vec{V}_1(x,t) + \vec{f}(u_0^+), \qquad \nabla \vec{V}_1(x,t) = 0 \quad \text{в} \quad \widetilde{D}_T^+, \tag{10}$$

$$\vec{V}_1(x,t)|_{\Gamma_T^+ \cup \widetilde{\Gamma}_T} = 0, \qquad \vec{V}_1(x,t)|_{t=0} = 0; \tag{11}$$

$$\frac{\partial u_1^{\pm}}{\partial t}(x,t) - a_{\pm}{}^2 \nabla^2 u_1^{\pm}(x,t) = F_1^{\pm}(x,t) \quad \text{в} \quad \widetilde{D}_T^{\pm}, \qquad u_1^{\pm}(x,t)|_{t=0} = 0, \tag{12}$$

$$u_1^{\pm}(x,t)|_{\Gamma_T^{\pm}} = 0, \qquad [|\nabla u_0(x(\omega))| \rho_1(\omega,t) + u_1^{\pm}(x,(\omega),t)]|_{\Gamma_0} = 0, \tag{13}$$

где $F_1^{\pm}(x,t) = -(\vec{V}_1(x,t)\nabla) u_0^+(x)$ при $(x,t) \in \widetilde{D}_T^+$ и $F_1^-(x,t) = 0$ при $(x,t) \in \widetilde{D}_T^-$. Кроме того, на $\Gamma_0$ должно выполняться условие

$$\begin{aligned}
&2\rho_1(\omega,t)\Bigg[k_-^2\left(\frac{\partial u_0^-}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial u_0^-}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial u_0^-}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial u_0^-}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial u_0^-}{\partial x_3}\cdot\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial u_0^-}{\partial x_3}\right)\right) - \\
&\quad - k_+^2\left(\frac{\partial u_0^+}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial u_0^+}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial u_0^+}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial u_0^+}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial u_0^+}{\partial x_3}\cdot\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial u_0^+}{\partial x_3}\right)\right)\Bigg] + \\
&\quad +2\Bigg[k_-^2\left(\frac{\partial u_0^-}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial u_1^-}{\partial x_1} + \frac{\partial u_0^-}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial u_1^-}{\partial x_2} + \frac{\partial u_0^-}{\partial x_3}\cdot\frac{\partial u_1^-}{\partial x_3}\right) - \\
&\qquad - k_+^2\left(\frac{\partial u_0^+}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial u_1^+}{\partial x_1} + \frac{\partial u_0^+}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial u_1^+}{\partial x_2} + \frac{\partial u_0^+}{\partial x_3}\cdot\frac{\partial u_1^+}{\partial x_3}\right)\Bigg] = -\kappa\left(k_-\frac{\partial u_1^-}{\partial t} + k_+\frac{\partial u_1^+}{\partial t}\right),
\end{aligned}$$

где $u_0^{\pm} = u_0^{\pm}(x(\omega))$, $u_1^{\pm} = u_1^{\pm}(x(\omega),t)$. Это условие может быть представлено в виде

$$k_+ \frac{\partial u_1^+(x,t)}{\partial n} - k_- \frac{\partial u_1^-(x,t)}{\partial n} = \kappa \frac{\partial \rho_1}{\partial t}, \qquad x \in \Gamma_0. \tag{14}$$

Здесь использовалось условие Стефана в следующем виде:

$$k_-^2 |\nabla u^-|^2 - k_+^2 |\nabla u^+|^2 = -\kappa\left(k_- \frac{\partial u^-}{\partial t} + k_+ \frac{\partial u^-}{\partial t}\right)$$

на $\Gamma_t$. Далее, учитывая, что $u_1^{\pm}(x,0) = 0$ и $\vec{V}_1(x,0) = 0$, из уравнений (12) получаем, что $u_{1t}^{\pm}(x,0) = 0$. Очевидно, что $F_1^{\pm} \in \underset{o}{H}{}^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{\widetilde{D}}{}_T^{\pm})$. Задача (12)–(14) фактически изучена в [3, 4], при этом $u_1^{\pm} \in H^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}\ (\overline{\widetilde{D}}{}_T^{\pm})$ и $\rho_1 \in \widehat{H}^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{\widetilde{D}}{}_T^{\pm})$.

**Лемма.** *Пусть выполнены условия* (8)*. Тогда* $u_0^{\pm}(x) = A^{\pm}(x)$ *при* $x \in \overline{\Omega}^{\pm}$*, а в качестве приближения* $u_1^{\pm}(x,t)$ *можно взять решение задачи* (10)–(14)*. При этом* $\Gamma_0$ *— поверхность класса* $C^{\infty}$ *(в предположении звездности* $\Gamma^{\pm}$*), не имеющая самопересечений и расположенная относительно* $\Gamma^+$ *и* $\Gamma^-$ *аналогично поверхности* $\Gamma$ *в задаче* (1)–(6).

**4. Второе приближение.** Рассмотрим теперь второе приближение $(\vec{V}_2, u_2^{\pm}, p_2, \rho_2)$ задачи (1)–(6) для малых чисел Рейнольдса. Имеем:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \vec{V}_2}{\partial t} + (\vec{V}_2\nabla)\vec{V}_1 + \nabla p_1 = \nabla^2 \vec{V}_2 + \vec{f}'(u_0^+)u_1^{\pm}, \qquad \nabla\vec{V}_2 = 0, \qquad (x,t)\in \widetilde{D}_T^+,\\
&\vec{V}_2(x,t)|_{\Gamma_T^+\cup\widetilde{\Gamma}_T} = 0, \qquad \vec{V}_2(x,t)|_{t=0} = 0;\\
&\frac{\partial u_2^{\pm}}{\partial t} - {a_{\pm}}^2\nabla^2 u_2^{\pm} = F_2^{\pm}(x,t)\widetilde{D}_T^{\pm}, \qquad u_2^{\pm}(x,t)|_{\Gamma_T^{\pm}} = 0, \qquad u_2^{\pm}(x,t)|_{t=0} = 0,\\
&[|\nabla u_0^{\pm}(x(\omega))|\rho_2(\omega,t) + u_2^{\pm}(x(\omega),t)]_{\Gamma_0} = f_1^{\pm}(x,t), \qquad x\in\Gamma_0,
\end{aligned} \tag{15}$$

где

$$F_2^+(x,t) = -(\vec{V}_1\nabla)u_1^+ - (\vec{V}_2\nabla)u_0^+ \qquad \text{при} \qquad (x,t)\in\widetilde{D}_T^+,$$

$$F_2^-(x,t) = 0 \qquad \text{при} \qquad (x,t)\in\widetilde{D}_T^-$$

и

$$f_1^{\pm}(x,t) = -\frac{\partial u_1^{\pm}}{\partial n}(x(\omega),t)\rho_1(\omega,t) - \frac{1}{2}\frac{d^2 u_0^{\pm}(x(\omega)+\tau n(\omega)\rho_1(\omega,t))}{d\tau^2}\Big|_{\tau=0} \qquad \text{при} \qquad x\in\Gamma_0.$$

Кроме того, при $x\in\Gamma_0$ справедливы представления:

$$\frac{\partial u^{\pm}}{\partial t}\bigg|_{\Gamma_t} = \mathrm{Re}\,\frac{\partial u_1^{\pm}}{\partial t} + (\mathrm{Re})^2\left[\rho_1\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial u_1^{\pm}}{\partial t}\right) + \frac{\partial u_2^{\pm}}{\partial t}\right] + o((\mathrm{Re})^2),$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial u^{\pm}}{\partial x_k}\right)^2\bigg|_{\Gamma_t} &= \left(\frac{\partial u_0^{\pm}}{\partial x_k}\right)^2 + 2\,\mathrm{Re}\left[\rho_1\cdot\frac{\partial u_0^{\pm}}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial u_0^{\pm}}{\partial x_k}\right) + \frac{\partial u_0^{\pm}}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial u_1^{\pm}}{\partial x_k}\right] + \\
&\quad + (\mathrm{Re})^2\left[\rho_1\frac{\partial}{\partial n}\cdot\left(\frac{\partial u_0^{\pm}}{\partial x_k}\right) + \frac{\partial u_1^{\pm}}{\partial x_k}\right]^2 + 2(\mathrm{Re})^2\frac{\partial u_0^{\pm}}{\partial x_k}\left[\rho_2\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial u_0^{\pm}}{\partial x_k}\right) + \right.\\
&\quad \left. + \rho_1\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial u_1^{\pm}}{\partial x_k}\right) + \frac{\partial u_2^{\pm}}{\partial x_k} + \frac{1}{2}\frac{d^2}{d\tau^2}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x_k}(x(\omega)+\tau n\rho_1)\right)\bigg|_{\tau=0}\right] + o((\mathrm{Re})^2),
\end{aligned}$$

$$x\in\Gamma_0, \qquad k = 1,2,3.$$

Отсюда, с учетом условия Стефана, следует, что

$$\begin{aligned}
&k_+\frac{\partial u_2^+}{\partial n} - k_-\frac{\partial u_2^-}{\partial n} = \kappa\frac{\partial\rho_2}{\partial t} + f_2(x,t), \qquad x\in\Gamma_0,\\
&f_2(x(\omega),t) = -\frac{\kappa\rho_1}{k_+|\nabla u_0^+| + k_-|\nabla u_0^-|}\frac{\partial}{\partial n}\left(k_+\frac{\partial u_1^+}{\partial t} + k_-\frac{\partial u_1^-}{\partial t}\right) - \\
&\qquad - \frac{\kappa}{k_+|\nabla u_0^+| + k_-|\nabla u_0^-|}\left(k_+\frac{\partial f_1^+}{\partial t} + k_-\frac{\partial f_1^-}{\partial t}\right).
\end{aligned} \tag{16}$$

Разрешимость задачи (15), (16) и (12)–(14) установлена в [3].

**Теорема.** *Пусть выполнены условия леммы. Тогда при малых числах* Re *и достаточно малых значениях* $t$ *справедлива формула*

$$\Gamma_t : x = x(\omega) - \mathrm{Re}\,\vec{n}\frac{u_1^{\pm}(x(\omega),t)}{|\nabla u_0^{\pm}(x(\omega))|} - (\mathrm{Re})^2\vec{n}\frac{u_2^{\pm}(x(\omega),t) - f_1^{\pm}(x(\omega),t)}{|\nabla u_0^{\pm}(x(\omega))|} + o((\mathrm{Re})^2),$$

$$x(\omega) \in \Gamma_0,$$

*где* $u_2^{\pm}(x,t)$, $\rho_2(\omega,t)$ *— решение задачи* (15), (16).

Последняя формула позволяет исследовать свободную поверхность $\Gamma_t$ в зависимости от чисел Re.


1. *Данилюк И. И.* О задаче Стефана // Успехи мат. наук. – 1985. – **40**, вып. 5 (245). – С. 133–185.
2. *Миненко А. С.* Вариационные задачи со свободной границей. – Киев: Наук. думка, 2005. – 354 с.
3. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные уравнения параболического типа. – Москва: Наука, 1967. – 736 с.
4. *Базалий Б. В., Дегтярев С. П.* О классической разрешимости многомерной задачи Стефана при конвективном движении вязкой несжимаемой жидкости // Мат. сб. – 1987. – **132 (174)**, № 1. – С. 3–19.



*Институт проблем искусственного интеллекта НАН Украины, Донецк*



*Поступило в редакцию 02.02.2007*