ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

9 • 2007

ІНФОРМАТИКА ТА КІБЕРНЕТИКА

УДК 519.852:519.876

В. І. Кудін, член-кореспондент НАН України **С. І. Ляшко,**
Н. М. Хрітоненко, Ю. П. Яценко

Метод штучних базисних матриць

A method of artificial basis matrices for the analysis and solution of the systems of linear algebraic equations and inequalities is proposed.

Для аналізу властивостей лінійних систем рівнянь (СЛАР) та нерівностей (СЛАН) з квадратною матрицею обмежень розроблено метод штучних базисних матриць (МШБМ). На основі формул зв'язку елементів методу в сусідніх штучних розв'язках запропоновано ітераційну процедуру знаходження рангу матриці обмежень та розв'язку СЛАР. Встановлено умову єдиності розв'язків СЛАР та формулу аналітичного зображення загальних розв'язків СЛАН з різним типом обмежень у випадку невиродженості матриці обмежень.

Постановка задачі аналізу СЛАР та СЛАН. Введемо в розгляд СЛАР вигляду

$$Au^T = C, \tag{1}$$

де A — квадратна матриця розмірності $(m \times m)$, та допоміжну СЛАР вигляду

$$Iu^T = K, \tag{2}$$

в якій I — одинична матриця розмірності $(m \times m)$ з відомим ров'язком та оберненою матрицею. Вектори обмежень $C = (c_1, c_2, \ldots, c_m)^T$ та $K = \underbrace{(1, 1, \ldots, 1)}_{m}^T$ — розмірності m. Введемо відповідно системі (1) зміною знаку "=" на "⩽" СЛАН

$$Au^T \leqslant C. \tag{3}$$

При наявності цільової функції вигляду

$$\max Bu^T \tag{4}$$

модель набуде вигляду задачі лінійного програмування (3), (4), де $C = (c_1, c_2, \ldots, c_m)^T$, $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$, $a_j = (a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{jm})$, $j = \overline{1, m}$, — рядки матриці A; T — знак транспонування. Основою МШБМ є ідея порядкової базисної матриці.

Означення 1. Матрицю $A_б$, складену із m лінійно незалежних рядків $(i_1, i_2, \ldots, i_m)$ обмежень (1), будемо називати штучною базисною, а розв'язок u_o відповідної їй системи рівнянь $A_б u^T = C^0$, де $C^0 = (c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_m})^T$, — штучним базисним.

Дві базисні матриці з відмінним одним рядком називатимемо суміжними.

Базисні матриці в ході ітерацій послідовно змінюються вводом — виводом із неї рядків-нормалей обмежень задачі.

Нехай e_{ij} та β_{ij} — елементи матриці $A_б^{-1}$, оберненої до $A_б$ та $A_б$; $u_0 = (u_{01}, u_{02}, \ldots, u_{om})$ — базисний розв'язок; $\alpha_r = (\alpha_{r1}, \alpha_{r2}, \ldots, \alpha_{rm})$ — вектор розвинення нормалі обмеження $a_r u^T \leqslant c_r$ за рядками базисної матриці $A_б$, $\alpha_0 = (\alpha_{01}, \alpha_{02}, \ldots, \alpha_{0m})$ — вектор розвинення вектора-нормалі цільової функції (4) за рядками базисної матриці $A_б$; $\triangle_r = a_r u_0^T - c_r$ — нев'язка r-го обмеження (1). Всі введені елементи в суміжній базисній матриці $\overline{A}_б$ (відмінній одним рядком від $A_б$) будемо позначати рискою зверху.

Введемо в розгляд a_{i1}, $a_{i2}, \ldots, a_{im}$ — нормалі обмежень, $a_j u^T \leqslant c_j$, $j \in J_б$, де $J_б = \{i_1, i_2, \ldots, i_m\}$ — індекси обмежень, нормалі яких утворюють базисну матрицю $A_б$; a_l — вектор-нормалі обмеження $a_l u^T \leqslant c_l$, $\alpha_l = (\alpha_{l1}, \alpha_{l2}, \ldots, \alpha_{lm})$ — вектор розвинення вектора a_l за рядками базисної матриці $A_б$.

Відомо [1, 2], що необхідною і достатньою умовою лінійної незалежності системи векторів a_{i_1}, $a_{i_2}, \ldots, a_{i_{k-1}}$, a_l, $a_{i_{k+1}}$, $\ldots$, a_{i_m} при заміні вектора a_{i_k}, що утворює k-й рядок в базисній матриці $A_б$ вектором a_l, є виконання умови $\alpha_{lk} \neq 0$.

Теорема 1. *Між коефіцієнтами розвинення нормалей обмежень* (3), *цільової функції* (4) *за рядками штучної базисної матриці, елементами обернених матриць, базисними розв'язками, нев'язками обмежень* (3) *та значеннями цільової функції в двох суміжних базисних матрицях мають місце такі співвідношення:*

$$\overline{\alpha}_{rk} = \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}}, \qquad \overline{\alpha}_{ri} = \alpha_{ri} - \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}}\alpha_{li}, \qquad r = \overline{0, n}, \qquad i = \overline{1, m}, \qquad i \neq k, \tag{5}$$

$$\overline{e}_{rk} = \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}, \qquad \overline{e}_{ri} = e_{ri} - \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}\alpha_{li}, \qquad r = \overline{1, m}, \qquad i = \overline{1, m}, \qquad i \neq k, \tag{6}$$

$$\overline{u}_{0j} = u_{0j} - \frac{e_{jk}}{\alpha_{lk}}\Delta_l, \qquad j = \overline{1, m}, \tag{7}$$

$$\overline{\Delta}_k = -\frac{\Delta_l}{\alpha_{lk}}, \qquad \overline{\Delta}_r = \Delta_r - \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}}\Delta_l, \qquad r = \overline{1, n}, \qquad r \neq k, \tag{8}$$

$$B\overline{u}_0^T = Bu_0^T - \frac{\alpha_{0k}}{\alpha_{lk}}\Delta_l, \tag{9}$$

причому умовою невиродженості базисної матриці при заміні вектором нормаллю a_l обмеження $a_l u^T \leqslant c_l$ k-го рядка базисної матриці $A_б$ є виконання $\alpha_{lk} \neq 0$.

Доведення. Виконання (5) випливає з таких тотожних перетворень:

$$a_{rj} = \sum_{i=1}^{m} \overline{\alpha}_{ri}\overline{\beta}_{ij} = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{m} \overline{\alpha}_{ri}\beta_{ij} + \overline{\alpha}_{rk}a_{lj}.$$

Оскільки $a_{lj} = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_{li}\beta_{ij}$, то після підстановки цього співвідношення отримаємо:

$$\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{m}\overline{\alpha}_{ri}\beta_{ij}+\overline{\alpha}_{rk}\alpha_{ij}=\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{m}\overline{\alpha}_{ri}\beta_{ij}+\overline{\alpha}_{rk}\sum_{i=1}^{m}\alpha_{li}\beta_{ij}=\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ri}\beta_{ij}.$$

Порівнявши коефіцієнти зліва і справа для кожного i, де $i=\overline{1,m}$, встановлюємо, що $\overline{\alpha}_{ri}+\overline{\alpha}_{rk}\alpha_{li}=\alpha_{ri}$, $i\neq k$; $\overline{\alpha}_{rk}\alpha_{lk}=\alpha_{rk}$, $i=k$, тобто справедливість (5), оскільки

$$\overline{\alpha}_{rk}=\frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}},\qquad \overline{\alpha}_{ri}=\alpha_{ri}-\frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}}\alpha_{li},\qquad r=\overline{0,n},\qquad i=\overline{1,m},\qquad i\neq k.$$

Аналогічно одержуємо формули (6), враховуючи, що для транспонованих та прямих квадратних матриць справедливо $\overline{A}_{б}^{-1}\cdot\overline{A}_{б}=A_{б}^{-1}\cdot A_{б}$, тобто

$$\sum_{i=1}^{m}\overline{e}_{ri}\overline{\beta}_{ij}=\sum_{i=1,i\neq k}^{m}\overline{e}_{ri}\beta_{ij}+\overline{e}_{rk}a_{lj}=\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{m}\overline{e}_{ri}\beta_{ij}+\overline{e}_{rk}\sum_{i=1}^{m}\alpha_{li}\beta_{ij}=\sum_{i=1}^{m}e_{ri}\beta_{ij},$$

$$\overline{e}_{rk}=\frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}},\qquad \overline{e}_{ri}=e_{ri}-\frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}\alpha_{li},\qquad r=\overline{1,m},\qquad i=\overline{1,m},\qquad i\neq k.$$

Із формули (6) та наступних перетворень випливає співвідношення (7), що зв'язує базисні розв'язки в двох суміжних базисних матрицях:

$$\overline{u}_{0j}=\sum_{i=1}^{m}\overline{e}_{ji}\overline{c}_{i}^{0}=\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{m}\overline{e}_{ij}\overline{c}_{i}^{0}+\overline{e}_{jk}\overline{c}_{k}^{0}=\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{m}\left(e_{ji}-\frac{e_{jk}}{\alpha_{lk}}\alpha_{li}\right)c_{i}^{0}+\frac{e_{jk}}{\alpha_{lk}}c_{l}=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}e_{ji}c_{i}^{0}-e_{jk}c_{k}^{0}-\frac{e_{jk}}{\alpha_{lk}}\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{m}\alpha_{li}c_{i}^{0}+\frac{e_{jk}}{\alpha_{lk}}c_{l}=$$

$$=u_{0j}-e_{jk}\frac{\alpha_{lk}}{\alpha_{lk}}c_{k}^{0}-\frac{e_{jk}}{\alpha_{lk}}\left(\sum_{i=1,i\neq k}^{m}\alpha_{li}c_{i}^{0}-c_{l}\right)=u_{0j}-\frac{e_{jk}}{\alpha_{lk}}\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_{li}c_{i}^{0}-c_{l}\right)=$$

$$=u_{0j}-\frac{e_{jk}}{\alpha_{lk}}\left(\sum_{j=1}^{m}a_{lj}\sum_{i=1}^{m}e_{ji}c_{i}^{0}-c_{l}\right)=u_{0j}-\frac{e_{jk}}{\alpha_{lk}}\left(\sum_{j=1}^{m}a_{lj}u_{0j}-c_{l}\right)=u_{0j}-\frac{e_{jk}}{\alpha_{lk}}\Delta_{l},$$

тобто $\overline{u}_{0j}=u_{0j}-\dfrac{e_{jk}}{\alpha_{lk}}\Delta_{l}$, $j=\overline{1,m}$.

При доведенні (8) використаємо (7). Отримаємо, враховуючи, що $\Delta_k=0$ і $\alpha_{kk}=1$ при $k\notin J_{б}$, $\overline{\Delta}_k=-\Delta_l/\alpha_{lk}$, а для решти нев'язок

$$\overline{\Delta}_{r}=\sum_{i=1}^{m}a_{ri}\overline{u}_{0i}-c_{r}=\sum_{i=1}^{m}a_{ri}\left(u_{0i}-\frac{e_{ik}}{\alpha_{lk}}\Delta_{l}\right)-c_{r}=\Delta_{r}-\frac{\Delta_{l}}{\alpha_{lk}}\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ri}e_{ik}=$$

$$=\Delta_{r}-\frac{\Delta_{l}}{\alpha_{lk}}\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ri}e_{ik}=\Delta_{r}-\frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}}\Delta_{l},$$

$$\overline{\Delta}_{r}=\Delta_{r}-\frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}}\Delta_{l},\qquad r=\overline{1,n},\qquad r\neq k.$$

Аналогічно можна отримати співвідношення

$$B\overline{u}_0^T = Bu_0^T - \frac{\alpha_{0k}}{\alpha_{lk}}\Delta_l,$$

що завершує доведення теореми.

Наслідок 1. *Для існування єдиного розв'язку* (1) *необхідно і достатньо, щоб* $\alpha_{lk}^{(i)} \neq 0$, $i = \overline{1, m}$, *де* $\alpha_{lk}^{(i)}$ *— ведучі елементи симплексної ітерації МШБМ по заміщенню рядків базисної матриці* (2) *нормалями обмежень* (1).

На основі (5)–(9) формується схема визначення рангу системи (1) та розв'язання системи рівнянь послідовними змінами базисних матриць та відповідних штучних розв'язків із збереженням умови невиродженості суміжних базисних матриць.

Початкові розв'язок u_0 та всі елементи методу будуються на основі відомих властивостей системи (2).

Нижче наведено основні стадії алгоритмічної схеми знаходження величини рангу, оберненої базисної матриці та розв'язку системи (1).

Алгоритм.

Крок 1. Проводимо симплексні ітерації по заміщенню рядків базисної матриці системи (2) нормалями обмежень системи (1), згідно з співвідношеннями (5)–(9) та виконанням умов невиродженості $\alpha_{l^{(r)}k^{(r)}} \neq 0$, r — номер ітерації.

Знаходимо відповідні елементи методу: розвинення за рядками базисних матриць обмежень (2), обернену базисну матрицю, штучні базисні розв'язки $u_0^{(k)}$, де k — номер ітерації.

Крок 2. Перевіряємо кількість ітерацій r заміщення рядків допоміжної системи рядками основної системи, для яких виконується умова невиродженості, тобто $\alpha_{lk} \neq 0$. Число таких ітерацій визначає ранг основної системи.

Крок 3. Якщо кількість ітерацій, для яких $\alpha_{lk}^{(i)} \neq 0$, дорівнює m, то переходимо на наступний крок. У противному разі — на передостанній крок.

Крок 4. Знаходимо єдиний розв'язок, згідно з співвідношенням $A_б^{-1}c^0 = u_0$ (або згідно з формулою (7)).

Крок 5. Виконання умови $r < m$ означає, що для СЛАР (1) не виконується умова єдиності розв'язку. Модель потребує подальшого аналізу розв'язності задачі.

Останній крок. Формування вихідної інформації за результатами аналізу (1).

Виявляється, що побудова загального розв'язку СЛАН (3) грунтується на властивостях розв'язків СЛАР (1).

Наслідок 2. *Загальний розв'язок СЛАН* (3) *рангу* m *є конус* K *з вістрям* u_0 *— розв'язок СЛАР* (1) *та твірними* $e_i = (A_б^{-1})_i$, $i = \overline{1, m}$, *що наводиться співвідношенням*

$$K = \left\{u/u = u_0 - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i\right\},$$

де

$$\lambda_i > 0.$$

Особливості дослідження СЛАР на основі МШБМ. МШБМ є релаксаційним, оскільки на кожному кроці в обчислення включається одне обмеження; обернена матриця та розв'язок (2) є початковими і заданими; максимальна кількість ітерацій по знаходженню рангу системи (при невиродженості) обмежена числом m; ідеологія симплексних перетворень (5)–(9) може бути застосована для аналізу виродженості матриці обмежень, рангу та розв'язку СЛАР (1) при збуренні елементів.

Таким чином, застосування симплексної ідеології на основі МШБМ дає змогу: досліджувати властивості розв'язків СЛАР та СЛАН зі змінними та функціональними елементами; проводити построзрахунковий аналіз властивостей системи при зміні значень окремих елементів та її компонент; використовувати розв'язок початкової системи при аналізі збуреної системи; моделювати механізм постадійного перетворення виродженої матриці обмежень в невироджену направленою корекцією елементів; знаходити розв'язок квадратної системи рівнянь та нерівностей за фіксовану кількість кроків; застосувати схему аналізу для задач, що передбачають багатокроковість або багаторазовість розрахунків на моделях з незначними змінами в компонентах моделі. Для організації ефективної роботи алгоритмічних схем, розроблених на основі МШБМ, необхідно: включити контроль в ході обчислень верхніх значень числа обумовленості для суміжних базисних матриць, розробити варіанти алгоритмічних схем з направленим вибором ведучого елемента для досягнення числової стійкості методу; проводити нормування елементів моделі в межах [−0,5, 0,5], що перешкоджатиме росту значень елементів методу.

Структурні властивості МШБМ дають можливість врахувати наведені вище пункти як доповнення до алгоритмічного та програмного забезпечення.

Робота підтримана програмою ICS NATO від 18.04.2006 в рамках проекту "Оптимальна заміна інформаційних технологій і стійкий розвиток (в Казахстані, Україні та США)", грант НАТО CLG 982209.

1. *Волкович В. Л., Войналович В. М., Кудин В. И.* Релаксационная схема строчного симплекс-метода // Автоматика. – 1987. – № 4. – С. 79–86.
2. *Кудін В. І.* Про побудову загальних розв'язків одного класу систем лінійних нерівностей // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. Вип. 2. – 2005. – С. 309–313.

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 14.02.2007