2. *Chen P. J., Gurtin M. E.* On a theory of head conduction involving to temperatures // Z. angew. Math. und Phys. – 1968. – **19**. – P. 614–627.
3. *Чудновский А. Ф.* Теплофизика почв. – Москва: Наука, 1976. – 352 с.
4. *Majchrowski M.* On inverse problems with nonlocal condition for parabolic systems of partial differential equations and pseudoparabolic equations // Demonstr. math. – 1993. – **26**, No 1. – P. 255–275.
5. *Гладков А. Л.* Задачи Коши в классах растущих функций для некоторых нелинейных псевдопараболических уравнений // Дифференц. уравнения. – 1988. – **24**, № 2. – С. 277–288.
6. *Гладков А. Л.* Задачи Коши в классах растущих функций для некоторых нелинейных уравнений с частными производными третьего порядка. – Москва, 1984. – 44 с. – Деп. в ВИНИТИ 12.04.84 Эг., № 2282–84.
7. *Гладков А. Л.* Единственность решения задачи Коши для некоторых квазилинейных псевдопараболических уравнений // Мат. заметки. – 1996. – **60**, № 3. – С. 356–362.
8. *Кожанов А. И.* Теоремы сравнения и разрешимость краевых задач для некоторых классов эволюционных уравнений типа псевдопараболических и псевдогиперболических. – Новосибирск, 1990. – С. 1–30. – (Препр. / АН СССР. СО. Ин-т математики; № 17).
9. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – Москва: Мир, 1978. – 336 с.
10. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – Москва: Мир, 1972. – 608 с.
11. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1958. – 475 с.

Львівський національний університет ім. Івана Франка *Надійшло до редакції 18.03.2008*

УДК 512.547.4

А. В. Дудко

Описание характеров на обобщенных группах движений, связанных с $GL(\infty, \mathbb{F}_q)$

(Представлено академиком НАН Украины Л. А. Пастуром)

Groups $M_{n,m}$ which generalize the infinite groups of motions over a finite field are introduced. A complete classification of finite-type factor representations for the groups $M_{n,m}$ is given.

Предварительные замечания. Обозначим через $\mathbb{F}_q$ конечное поле из $q = p^l$ элементов, где $l \in \mathbb{N}$, p — простое число. Пусть $GL(\infty, \mathbb{F}_q)$ — группа всех обратимых бесконечных матриц над $\mathbb{F}_q$ вида $I + A$, где A имеет лишь конечное число ненулевых элементов. Обозначим $\mathbb{F}_q^\infty$ пространство всех бесконечных вектор-столбцов с элементами из $\mathbb{F}_q$, которые начиная с некоторого места равны 0. Пусть $\{e_i\}$ — канонический базис в $\mathbb{F}_q^\infty$. Для n, $m \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}$ положим

$$M_{n,m} = \{h \in GL(\infty, \mathbb{F}_q)\colon h^t e_i = e_i \text{ при } i \leqslant n,\ h e_i = e_i \text{ при } n < i \leqslant n + m\}, \tag{1}$$

где ^{t} — обычное транспонирование. Для этих групп в работе дается полное описание фактор-представлений конечного типа.

Серия групп $M_{n,m}$ содержит бесконечномерные группы движений над $\mathbb{F}_q$ ($m = 0$ или $n = 0$). Подгруппа $H_{n,m} = \{h \in M_{n,m}\colon (he_i, e_j) = \delta_{i,j}$ при $i, j > n + m\}$ — хорошо известный некоммутативный тор. Наконец, $M_{0,0} = GL(\infty, \mathbb{F}_q)$. Интерес к изучению характеров на $M_{n,m}$ мотивирован знаменитой теоремой Тома [1]. Описание конечных неразложимых характеров на группе $GL(\infty, \mathbb{F}_q)$ дано Скудлареком в [2] и содержится в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть $\mathbb{F}_q^*$ — мультипликативная группа поля $\mathbb{F}_q$. Функция χ на группе $GL(\infty, \mathbb{F}_q)$ является неразложимым характером, если и только если либо $\chi(g) = \delta_{I,g}$ — регулярный характер, либо существуют такое число $k \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}$ и такой гомоморфизм $\upsilon\colon \mathbb{F}_q^* \to \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\}$, что для любого $g \in GL(\infty, \mathbb{F}_q)$ $\chi(g) = q^{-k\cdot\mathrm{rank}(I-g)}\upsilon(\det(g))$.*

Основные понятия и обозначения. Для $k,\ l \in \mathbb{N}\bigcup\{\infty\}$ обозначим через $\mathrm{Mat}(k, l)$ пространство матриц размера $k \times l$ с конечным числом ненулевых элементов над $\mathbb{F}_q$. Пусть

$$\begin{aligned} &M_{n,m}(k) = \{g \in M_{n,m}\colon ge_i = g^t e_i = e_i \text{ при } i > n + m + k\},\\ &M_{n,m,k} = \{g \in M_{n,m}\colon ge_i = g^t e_i = e_i \text{ при } n + m < i \leqslant n + m + k\}. \end{aligned} \tag{2}$$

Для $a \in \mathrm{Mat}(m, \infty)$, $b \in \mathrm{Mat}(\infty, n)$, $c \in \mathrm{Mat}(m, n)$, $g \in GL(\infty, \mathbb{F}_q)$ введем следующие элементы $M_{n,m}$:

$$\begin{aligned} &\theta(a) = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0\\ 0 & I_m & a\\ 0 & 0 & I_\infty \end{bmatrix}, \qquad \vartheta(b) = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0\\ 0 & I_m & 0\\ b & 0 & I_\infty \end{bmatrix},\\ &\zeta(c) = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0\\ c & I_m & 0\\ 0 & 0 & I_\infty \end{bmatrix}, \qquad \gamma(g) = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0\\ 0 & I_m & 0\\ 0 & 0 & g \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{3}$$

Каждый элемент из $M_{n,m}$ единственным образом представляется в виде $\zeta(c)\vartheta(b)\gamma(g)\theta(a)$.

Обозначим через $\mathrm{Col}(d)$ и $\mathrm{Row}(d)$ линейную оболочку вектор-столбцов и вектор-строк матрицы d соответственно. Зафиксируем нетривиальный гомоморфизм ω из аддитивной группы поля $\mathbb{F}_q$ в $\mathbb{T}$.

Главный результат. Неразложимые характеры выделяются свойством мультипликативности, точная формулировка которого дана в следующем утверждении.

Теорема 2. *Для неразложимости характера χ на группе $M_{n,m}$ необходимо и достаточно, чтобы при любом k и для всех $g_1 \in M_{n,m}(k)$, $g_2 \in M_{n,m,k}$ имело место условие $\chi(g_1 g_2) = \chi(g_1)\chi(g_2)$.*

Для неразложимого характера χ на группе $M_{n,m}$ обозначим через W_χ наибольшее подпространство в $\mathbb{F}_q^m$ такое, что $\chi(\theta(a)) = 1$, когда $a \in \mathrm{Mat}(m, \infty)$ и $\mathrm{Col}(a) \subset W_\chi$. Аналогично, обозначим W'_χ наибольшее подпространство в $(\mathbb{F}_q^n)^t$ такое, что $\chi(\vartheta(b)) = 1$ для любого $b \in \mathrm{Mat}(\infty, n)$ с $\mathrm{Row}(b) \subset W'_\chi$. Пусть $(\pi_\chi, \mathcal{H}_\chi, \xi_\chi)$ — ГНС-представление группы $M_{n,m}$, соответствующее χ, где $\mathcal{H}_\chi$ — пространство, в котором действует представление π_χ, а $\xi_\chi \in \mathcal{H}_\chi$ — циклический вектор со свойством $\chi(h) = (\pi_\chi(h)\xi_\chi, \xi_\chi)$ для всех $h \in M_{n,m}$. Так как χ — неразложимый характер, то π_χ — факторпредставление и операторы $\pi_\chi(\zeta(c))$, $c \in \mathrm{Mat}(m, n)$ скалярно кратны единичному. Следовательно, существует матрица $A_\chi \in \mathrm{Mat}(n, m)$ такая, что $\chi(\zeta(c)) = \omega(\mathrm{tr}(cA_\chi))$ для любого $c \in \mathrm{Mat}(m, n)$. Ввиду теоремы 2, функция $\chi \circ \gamma$ на $GL(\infty, \mathbb{F}_q)$ является неразложимым характером. По теореме 1, либо существуют $k \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}$ и гомоморфизм $\upsilon\colon \mathbb{F}_q^* \to \mathbb{T}$ такие, что $\chi(\gamma(g)) = \upsilon(\det(g))q^{-k\cdot\mathrm{rank}(I-g)}$ для любого $g \in GL(\infty, \mathbb{F}_q)$, либо $\chi(\gamma(g)) = \delta_{I,g}$ — регулярный характер. Далее в случае регулярного характера будем полагать, что $k = \infty$, а υ — тривиальный гомоморфизм. Главным результатом данной работы является следующее утверждение.

Теорема 3. *Набор параметров* $(W_\chi, W'_\chi, A_\chi, k, \upsilon)$ *является полным инвариантом неразложимого характера* χ. *Характер* χ, *соответствующий* (W, W', A, k, υ), *существует тогда и только тогда, когда*

$$AW = \{0\}, \qquad W'A = \{0\}, \qquad k \geqslant m + n - \operatorname{rank}(A). \tag{4}$$

При этом значение характера на элементе $h = \zeta(c)\vartheta(b)\gamma(g)\theta(a)$ *вычисляется по следующему правилу:*

если существуют $a_1 \in \operatorname{Mat}(m, \infty)$, $b_1 \in \operatorname{Mat}(\infty, n)$ *такие, что* $\operatorname{Col}(a - a_1(I - g)) \subset W$, $\operatorname{Row}(b - (I - g)b_1) \subset W'$, *то*

$$\chi(h) = q^{-k\cdot\operatorname{rank}(I-g)}\upsilon(\det(g))\omega(\operatorname{tr}((a_1(I - g)b_1 + c)A));$$

в противном случае $\chi(h) = 0$.

Конструкция факторпредставлений. Мы дадим здесь реализации факторпредставлений, соответствующих неразложимым характерам на $M_{n,m}$ с $k < \infty$ (см. теорему 3). Из них несложно получить конструкции факторпредставлений для случая $k = \infty$. Обозначим через $\mathcal{B}_k$ пространство всех матриц размера $k \times \infty$ над $\mathbb{F}_q$. Пусть x_i — i-й столбец матрицы x. Введем пространство

$$\widetilde{\mathcal{B}}_k = \{(x, y) \in \mathcal{B}_k \times \mathcal{B}_k \colon \text{ существует } N, \text{ для которого } x_i = y_i \text{ при всех } i \geqslant N\}. \tag{5}$$

Для $r \in \mathbb{N}$, a, $b \in \operatorname{Mat}(k, r)$ определим цилиндрические множества

$$\mathcal{C}_r(a, b) = \{(x, y) \in \widetilde{\mathcal{B}}_k \colon x_i = a_i,\ y_i = b_i \text{ при } i \leqslant r,\ x_i = y_i \text{ при } i > r\}. \tag{6}$$

Определим вероятностную меру μ на $\widetilde{\mathcal{B}}_k$ по формуле

$$\mu(\mathcal{C}_r(a, b)) = q^{-kr} \text{ для любых } r \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}, \qquad a, b \in \operatorname{Mat}(k, r). \tag{7}$$

Пусть $\sigma_a \in \operatorname{Mat}(k, m)$, $\sigma_b \in \operatorname{Mat}(n, k)$ и $\upsilon \colon \mathbb{F}_q^* \to \mathbb{T}$ — произвольный гомоморфизм. Зададим представление π группы $M_{n,m}$ в пространстве $\mathcal{H} = L_2(\widetilde{\mathcal{B}}_k, \mu)$ с помощью соотношений:

$$\begin{aligned} &(\pi(\gamma(g))f)(x, y) = \upsilon(\det(g))f(xg, y), \qquad (\pi(\theta(a))f)(x, y) = f(x + \sigma_a a, y),\\ &(\pi(\vartheta(b))f)(x, y) = \omega(\operatorname{tr}(b\sigma_b x))f(x, y), \qquad \pi(\zeta(c)) = \omega(\operatorname{tr}(c\sigma_b\sigma_a))I_\mathcal{H} \end{aligned} \tag{8}$$

для любых $g \in GL(\infty, \mathbb{F}_q)$, $a \in \operatorname{Mat}(m, \infty)$, $b \in \operatorname{Mat}(\infty, n)$, $c \in \operatorname{Mat}(m, n)$, где $I_\mathcal{H}$ — тождественный оператор в $\mathcal{H}$. Введем $\xi \in \mathcal{H}$ по формуле $\xi(x, y) = \delta_{x,y}$. Положим

$$\chi(h) = (\pi(h)\xi, \xi) \text{ для любого } h \in M_{n,m}. \tag{9}$$

Имеет место следующее

Предложение 1. *Пусть* $W_{\sigma_a} = \{v \in \mathbb{F}_q^m \colon \sigma_a v = 0\}$, $W'_{\sigma_b} = \{w \in (\mathbb{F}_q^n)^t \colon w\sigma_b = 0\}$. *Характер* χ *неразложим, соответствует параметрам* $(W_{\sigma_a}, W'_{\sigma_b}, \sigma_b\sigma_a, k, \upsilon)$ *и удовлетворяет условиям теоремы 3.*

Действительно, неразложимость характера χ вытекает из теоремы 2. В частности, сужение π на подпространство $\overline{\operatorname{Lin}\{\pi(M_{n,m})\xi\}}$ является факторпредставлением. Остальные утверждения предложения 1 проверяются путем непосредственных вычислений. Заметим, что для любых W, W', A, удовлетворяющих (4), существуют σ_a, σ_b такие, что $W = W_{\sigma_a}$, $W' = W'_{\sigma_b}$, $A = \sigma_b \sigma_a$. При этом принципиально важным является условие $k \geqslant m + n - \operatorname{rank}(A)$.

Классификация неразложимых характеров.

Предложение 2. *Пусть χ — неразложимый характер на $M_{n,m}$, $(\pi_\chi, \mathcal{H}_\chi, \xi_\chi)$ — соответствующее ГНС-представление, I_χ — тождественный оператор в $\mathcal{H}_\chi$. Тогда существуют $W \subset \mathbb{F}_q^m$, $W' \subset (\mathbb{F}_q^n)^t$, $A \in \operatorname{Mat}(n, m)$ со свойством $AW = \{0\}$, $W'A = \{0\}$ такие, что для любых $a \in \operatorname{Mat}(m, \infty)$, $b \in \operatorname{Mat}(\infty, n)$, $c \in \operatorname{Mat}(m, n)$*

$$\chi(\theta(a)\vartheta(b)) = \begin{cases} 1, & \text{\textit{если} } \operatorname{Col}(a) \subset W, \qquad \operatorname{Row}(b) \subset W', \\ 0, & \text{\textit{в противном случае}}; \end{cases} \tag{10}$$

$$\pi_\chi(\zeta(c)) = \omega(\operatorname{tr}(cA)) I_\chi. \tag{11}$$

Доказательство. Пусть $V \subset \mathbb{F}_q^m$, $V' \subset (\mathbb{F}_q^n)^t$, $c \in \operatorname{Mat}(m, n)$, причем $V \supset \operatorname{Col}(c)$, $V' \supset \operatorname{Row}(c)$. Рассмотрим матрицы $a \in \operatorname{Mat}(m, \infty)$, $b \in \operatorname{Mat}(\infty, n)$ такие, что $ab = c$, $\operatorname{Col}(a) = V$, $\operatorname{Row}(b) = V'$. Можно показать, что сопряженный класс элемента $\theta(a)\vartheta(b)$ не зависит от выбора a и b. Следовательно, ввиду центральности χ, $\chi(\theta(a)\vartheta(b))$ не зависит от выбора a, b. Положим $\psi(c, V, V') = \chi(\theta(a)\vartheta(b))$. Выберем l такое, что столбцы матрицы a и строки матрицы b с номерами, большими, чем l, нулевые. Пусть также $\widetilde{a}\widetilde{b} = \widetilde{c}$, $\operatorname{Col}(\widetilde{a}) = \widetilde{V}$, $\operatorname{Row}(\widetilde{b}) = \widetilde{V}'$. Причем столбцы матрицы $\widetilde{a}$ и строки матрицы $\widetilde{b}$ с номерами, не превосходящими l, нулевые. Тогда $\theta(a)\vartheta(b) \in M_{n,m}(l)$ и $\theta(\widetilde{a})\vartheta(\widetilde{b}) \in M_{n,m,l}$ (см. (2)). По теореме 2, учитывая (3), получаем

$$\chi(\theta(a + \widetilde{a})\vartheta(b + \widetilde{b})) = \chi(\theta(a)\vartheta(b)\theta(\widetilde{a})\vartheta(\widetilde{b})) = \chi(\theta(a)\vartheta(b))\chi(\theta(\widetilde{a})\vartheta(\widetilde{b})).$$

Следовательно, функция ψ удовлетворяет соотношению

$$\psi(c + \widetilde{c}, V + \widetilde{V}, V' + \widetilde{V}') = \psi(c, V, V')\psi(\widetilde{c}, \widetilde{V}, \widetilde{V}'). \tag{12}$$

Отсюда, положив $c = \widetilde{c} = 0$, получим, что существуют подпространства $W \subset \mathbb{F}_q^m$, $W' \subset (\mathbb{F}_q^n)^t$, для которых

$$\psi(0, V, V') = \begin{cases} 1, & \text{если } V \subset W, \qquad V' \subset W', \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{13}$$

Пусть $\operatorname{Col}(a) = W$. Тогда, в силу (13), $\chi(\theta(a)) = 1$. Следовательно, $\pi_\chi(\theta(a)) = I_\chi$. Аналогично, при $\operatorname{Row}(b) = W'$ $\pi_\chi(\vartheta(b)) = I_\chi$. Отсюда, используя (12) и (13), получаем

$$\psi(c, V, V') = \begin{cases} 1, & \text{если } V \subset W, \qquad V' \subset W', \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Формула (10) доказана.

Так как операторы $\pi_\chi(\zeta(c))$, $c \in \operatorname{Mat}(m, n)$, лежат в центре фактора $\pi_\chi(M_{n,m})''$, то существует $A \in \operatorname{Mat}(n, m)$ такая, что $\chi(\zeta(c)) = \omega(\operatorname{tr}(cA))$ для любого $c \in \operatorname{Mat}(m, n)$. Если c такова, что $\operatorname{Col}(c) \subset W$, то существуют a, b, для которых $\operatorname{Col}(a) \subset W$ и $ab = c$. Теперь, используя (10), имеем $\pi_\chi(\theta(a)) = I_\chi$. Следовательно, ввиду (3)

$$\chi(\zeta(c)) = \chi(\theta(a)\vartheta(b)\theta(-a))\vartheta(-b)) = (\pi_\chi(\theta(a))\pi_\chi(\vartheta(b))\pi_\chi(\theta(-a))\pi_\chi(\vartheta(-b))\xi_\chi, \xi_\chi) = 1.$$

Отсюда и из определения A получаем, что $AW = \{0\}$. Аналогично, $W'A = \{0\}$.

Далее, пусть χ — произвольный неразложимый характер на группе $M_{n,m}$, а W_χ, W'_χ — подпространства из предложения 2. Рассмотрим нормальную подгруппу $H_{W_\chi,W'_\chi} \subset M_{n,m}$, порожденную элементами вида $\theta(a)$, $\vartheta(b)$, $\zeta(c)$, где $\mathrm{Col}(a) \subset W_\chi$, $\mathrm{Row}(b) \subset W'_\chi$ и либо $\mathrm{Col}(c) \subset W$, либо $\mathrm{Row}(c) \subset W'$. По предложению 2, сужение представления π_χ на подгруппу H_{W_χ,W'_χ} тривиально. Факторгруппа $M_{n,m}/H_{W_\chi,W'_\chi}$ изоморфна M_{n_1,m_1}, где $n_1 = n - \dim W'_\chi$, $m_1 = m - \dim W_\chi$. Фиксируем некоторый гомоморфизм $\phi\colon M_{n,m} \to M_{n_1,m_1}$, ядро которого совпадает с H_{W_χ,W'_χ}. Тогда, согласно предложению 2, формула

$$\widetilde{\chi}(\phi(g)) = \chi(g), \qquad g \in M_{n,m} \tag{14}$$

задает неразложимый характер на группе M_{n_1,m_1} такой, что $W_{\widetilde{\chi}} = \{0\}$, $W'_{\widetilde{\chi}} = \{0\}$. Далее мы исследуем свойства полученного характера.

Для произвольного вектора $v \in \mathbb{F}_q^m$ и $i \in \mathbb{N}$ обозначим через $v^{(i)}$ матрицу из $\mathrm{Mat}(m,\infty)$, у которой i-й вектор-столбец равен v, а остальные столбцы нулевые. Аналогично, для любого вектора $u \in (\mathbb{F}_q^n)^t$ введем матрицы $u^{(i)} \in \mathrm{Mat}(\infty,n)$.

Лемма 1. *Пусть χ — неразложимый характер на группе $M_{n,m}$ такой, что $W_\chi = \{0\}$, $W'_\chi = \{0\}$. Для $g \in GL(\infty,\mathbb{F}_q)$, $a \in \mathrm{Mat}(m,\infty)$, $b \in \mathrm{Mat}(\infty,n)$ положим $h = \vartheta(b)\gamma(g)\theta(a)$. Тогда*

$$\chi(h) = \begin{cases} \omega(\mathrm{tr}(ab_1A_\chi))\chi(\gamma(g)), & \text{если } \mathrm{Row}(a) \subset \mathrm{Row}(I-g) \text{ и } \mathrm{Col}(b) \subset \mathrm{Col}(I-g); \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{15}$$

где $b_1 \in \mathrm{Mat}(\infty,n)$ любая матрица, удовлетворяющая условию $(I-g)b_1 = b$, а A_χ определяется согласно предложению 2.

Доказательство. Фиксируем r такое, что $g \in G(r)$, $a \in \mathrm{Mat}(m,r)$, $b \in \mathrm{Mat}(r,n)$. Предположим сначала, что $\mathrm{Row}(a) \not\subset \mathrm{Row}(I-g)$. Тогда существует $v \in \mathbb{F}_q^r$ такой, что $(I-g)v = 0$ и $u = av \neq 0$. Положим $w = \begin{bmatrix} 0_{m\times 1} \\ v \end{bmatrix} \in \mathbb{F}_q^{m+r}$. По $a \in \mathrm{Mat}(m+r,\infty)$ определим элемент $\theta'(a)$ согласно формуле для θ из (3) с заменой I_m на I_{m+r}. Тогда для любого i, используя центральность χ и (3), имеем

$$\chi(h) = \chi(\theta'(-w^{(i)})h\theta'(w^{(i)})) = \chi(\theta(u^{(i+r)})h) = (\pi_\chi(h)\xi_\chi, \pi_\chi(\theta(-u^{(i+r)}))\xi_\chi). \tag{16}$$

Ввиду (10) и условий леммы 1 векторы $\{\pi_\chi(\theta(-u^{(i+r)}))\xi_\chi\}_{i\in\mathbb{N}}$ попарно ортогональны. Переходя в (16) к пределу ($i \to \infty$), получаем $\chi(h) = 0$. Аналогично рассматривается случай $\mathrm{Col}(b) \not\subset \mathrm{Col}(I-g)$.

Пусть теперь $\mathrm{Row}(a) \subset \mathrm{Row}(I-g)$, $\mathrm{Col}(b) \subset \mathrm{Col}(I-g)$. Тогда существуют матрицы $a_1 \in \mathrm{Mat}(m,\infty)$, $b_1 \in \mathrm{Mat}(\infty,n)$ такие, что $a = a_1(I-g)$, $b = (I-g)b_1$. Следовательно,

$$h = \zeta(ab_1)\vartheta(b_1)\gamma(g)\theta(a)\vartheta(-b_1), \qquad \gamma(g)\theta(a) = \theta(-a_1)\gamma(g)\theta(a_1). \tag{17}$$

Отсюда, опираясь на центральность χ и (11), получаем $\chi(h) = \omega(\mathrm{tr}(ab_1A))\chi(\gamma(g))$.

Лемма 2. *Пусть χ — неразложимый характер на группе $M_{n,m}$ такой, что $W_\chi = \{0\}$, $W'_\chi = \{0\}$, а A_χ определена согласно предложению 2. Положим $g = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in G(2) \subset GL(\infty,\mathbb{F}_q)$. Тогда $\chi(\gamma(g)) \leqslant q^{\mathrm{rank}(A_\chi)-m-n}$.*

Доказательство. Обозначим $\mathcal{P}$ множество пар (a, b), где $a \in \mathbb{F}_q^m$ произволен, $b \in (\mathbb{F}_q^n)^t$ такой, что $bA_\chi = 0$. Тогда множество элементов $\theta(a^{(2)})\vartheta(b^{(1)})$, $(a, b) \in \mathcal{P}$, образует коммутативную подгруппу, которую мы обозначим через S. Пусть $\widehat{S}$ — группа, дуальная к S, E_p — ортопроектор на общее собственное подпространство в $\mathcal{H}_\chi$ для операторов $\pi_\chi(S)$, отвечающее собственному значению $p \in \widehat{S}$. Если $s \in S$ и $s \neq I$, то, используя (10) и условия леммы 2, имеем

$$0 = (\pi_\chi(s)\xi_\chi, \xi_\chi) = \sum_{p\in\widehat{S}} p(s)(E_p\xi_\chi, \xi_\chi). \tag{18}$$

Следовательно, $(E_p\xi_\chi, \xi_\chi)$ не зависит от $p \in \widehat{S}$. Наконец, учитывая соотношения $\|\xi_\chi\| = 1$ и $|\widehat{S}| = |\mathcal{P}| = q^{m+n-\mathrm{rank}(A_\chi)}$, получаем

$$(E_p\xi_\chi, \xi_\chi) = q^{\mathrm{rank}(A_\chi)-m-n}. \tag{19}$$

Теперь рассмотрим $s = \theta(a^{(2)})\vartheta(b^{(1)}) \in S$. Заметим, что выполняются следующие соотношения: $\gamma(g)\theta(a^{(2)})\vartheta(b^{(1)}) = \vartheta(b^{(1)})\gamma(g)\theta(a^{(2)})$, $(I - g)b^{(2)} = -b^{(1)}$, $a^{(2)}b^{(2)}A_\chi = 0$. Отсюда и из леммы 1 вытекает, что $\chi(\gamma(g)s)$ не зависит от $s \in S$. Следовательно,

$$\chi(\gamma(g)) = \frac{1}{|S|}\sum_{s\in S}(\pi_\chi(\gamma(g)s)\xi_\chi, \xi_\chi) = \frac{1}{|S|}\sum_{p\in\widehat{S}}\sum_{s\in S} p(s)(\pi_\chi(\gamma(g))E_p\xi_\chi, \xi_\chi). \tag{20}$$

Так как для неединичного элемента $p \in \widehat{S}$ выполняется соотношение $\sum\limits_{s\in S} p(s) = 0$, то, используя (19), (20) и центральность χ, получаем

$$\chi(\gamma(g)) = (\pi_\chi(\gamma(g))E_{p_0}\xi_\chi, \xi_\chi) = (\pi_\chi(\gamma(g))E_{p_0}\xi_\chi, E_{p_0}\xi_\chi) \leqslant q^{\mathrm{rank}(x_\chi)-m-n}, \tag{21}$$

где $p_0 \in \widehat{S}$ — единичный элемент.

Доказательство теоремы 3. Формула для характера (см. теорему 3) вытекает из теоремы 1, предложения 2, (14) и леммы 1. Из предложения 2 и леммы 2 вытекает необходимость, а из предложения 1 — достаточность условий (4) для существования неразложимого характера.

1. *Thoma E.* Die unzerlegbaren, positiv-definiten Klassenfunktionen der abzählbar unendlichen symmetrischen Gruppe // Math. Z. – 1964. – **85**, No 1. – P. 40–61.
2. *Skudlarek H. L.* Die unzerlegbaren Charaktere einiger diskreter Gruppen // Math. Ann. – 1976. – **233**. – P. 213–231.

Физико-технический институт низких температур им. В. И. Веркина НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 20.03.2008