

(ii)  $2 \notin \Pi(L)$  і кожна силовська  $p$ -підгрупа  $L$  скінченна і є силовською  $p$ -підгрупою всієї групи  $G$  для будь-якого  $p \in \Pi(L)$ ;

(iii) підгрупа  $L$  абелева;

(iv) будь-яка підгрупа  $L$  є  $G$ -інваріантною.

Навпаки, якщо  $G$  — періодична  $FC$ -група, яка задовольняє умови (i)–(iv), то  $G$  —  $PST$ -група.

**Наслідок.** Нехай  $G$  — періодична локально розв'язна  $PST$ -група. Якщо  $G$  —  $FC$ -група, то будь-яка підгрупа  $G$  буде  $PST$ -групою.

1. Schmidt R. Subgroups lattices of groups. — Berlin: Walter de Gruyter, 1994. — 572 p.
2. Zacher G. I gruppi risolubili finite in cui i sottogruppi di composizione coincidono con i sottogruppi quasi-normali // Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis, mat. e natur. — 1964. — **37**, No 8. — P. 150–154.
3. Robinson D. J. S. The structure of finite groups in which permutability is a transitive relation // J. Austral. Math. Soc. — 2001. — **70**. — P. 143–159.
4. Beidleman J. C., Brewster B., Robinson D. J. S. Criteria for permutability to be transitive in finite groups // J. Algebra. — 1999. — **222**. — P. 400–412.
5. Kegel O. H. Sylow – Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen // Math. Z. — 1962. — **78**. — P. 205–221.
6. Agrawal R. K. Finite groups whose subnormal subgroups permute with all Sylow subgroups // Proc. Amer. Math. Soc. — 1975. — **47**. — P. 77–83.
7. Alejandre V. J., Ballester-Bolinches A., Pedraza-Aguilera M. C. Finite soluble groups with permutable subnormal subgroups // J. Algebra. — 2001. — **240**. — P. 705–722.
8. Ballester-Bolinches A., Esteban-Romero R. Sylow permutable subnormal subgroups of finite groups // Bull. Austral. Math. Soc. — 2001. — **64**, No 3. — P. 479–486.
9. Ballester-Bolinches A., Esteban-Romero R. Sylow permutable subnormal subgroups of finite groups // J. Algebra. — 2002. — **251**, No 2. — P. 727–738.

Дніпропетровський національний університет

Надійшло до редакції 31.03.2008

УДК 519.41/47

© 2008

М. М. Семко, М. М. Пискун

## Про деякі узагальнення наближено нормальних підгруп

(Представлено академіком НАН України А. М. Самойленком)

*A subgroup  $H$  of the group  $G$  is called almost polycyclically approximate to a normal one (in  $G$ ), if  $H$  includes a subgroup  $L$  normal in  $H^G$  such that a factor-group  $H^G/L$  is almost polycyclic. A group  $G$  is said to be an anti  $PC$ -group, if every its non-polycyclic-by-finite subgroup is almost polycyclically approximate to a normal one. The study of generalized soluble anti  $PC$ -groups is finished in the present paper.*

Нехай  $G$  — група. Її підгрупа  $H$  називається наближено нормальною в  $G$ , якщо  $H$  має скінченний індекс у своєму нормальному замиканні  $K = H^G$ . У цьому випадку  $H$  включає нормальну в  $K$  підгрупу  $L$ , для якої факторгрупа  $K/L$  скінченна. Такого роду підгрупи були введені в розгляд Б. Нейманом [1]. У вказаній роботі він описав групи, усяка підгрупа яких

є наближено нормальною. Такі групи мають скінченний комутант, зокрема, вони є  $FC$ -групами. Вивчення впливу властивостей наближено нормальних підгруп на структуру групи було продовжено іншими дослідниками. Так, у роботі Л. А. Курдаченка, М. Ф. Кузенного і М. М. Семка [2] розглянуті групи, у яких система всіх наближено нормальних підгруп буде щільною. Досить недавно італійськими алгебраїстами розпочалося активне вивчення впливу системи наближено нормальних підгруп на будову групи (див., напр., [3–6]). У роботі [7] було введено нижчеподане узагальнення наближено нормальних підгруп. Підгрупа  $H$  групи  $G$  називається майже поліциклічно наближеною до нормальної (в  $G$ ), якщо  $H$  містить у собі нормальну в  $H^G$  підгрупу  $L$ , для якої факторгрупа  $H^G/L$  буде майже поліциклічною. Ці підгрупи будуть природним узагальненням наближено нормальних підгруп. Першим природним завданням тут є опис груп, усі підгрупи яких майже поліциклічно наближені до нормальної. Тут має місце повний аналог результату Б. Неймана — такі групи мають майже поліциклічний комутант. Цей результат можна отримати з результатів роботи [8]. У роботі [8] було розглянуто інше розширення поняття наближено нормальної підгрупи. Таким розширенням були підгрупи  $H$  групи  $G$ , для яких впорядкована за включенням система підгруп  $\{L \mid H \leq L \leq G\}$  задовольняє умову максимальності. Зразу відзначимо, що це поняття не буде еквівалентним поняттю, яке введене вище. У цьому можна впевнитись, розглянувши нижченаведений приклад.

Нехай  $p$  — просте число,  $\langle a \rangle$  — циклічна група порядку  $p$ ,  $\langle g \rangle$  — нескінченна циклічна група,

$$G = \langle g \rangle wr \langle a \rangle = A\lambda \langle g \rangle —$$

вінцевий добуток цих двох циклічних груп,  $A$  — базова підгрупа цього вінцевого добутку. За конструкцією  $A$  буде нескінченною елементарною абелевою  $p$ -підгрупою, а отже, група  $G$  не є (майже) поліциклічною. Ми можемо розглядати  $A$  як циклічний модуль над груповим кільцем  $J = F_p \langle g \rangle$  нескінченної циклічної групи над простим полем  $F_p$ . Це тягне за собою ізоморфізм  $A \cong J / \text{Ann}(a)$ . У свою чергу,  $\text{Ann}(a)$  буде ідеалом у кільці  $J$ . Оскільки кожний ненульовий ідеал кільця  $J$  має скінченний індекс в  $J$ , то нескінченність  $A$  доводить рівність  $\text{Ann}(a) = \langle 0 \rangle$ . Зокрема, звідси випливає, що і  $C_A(g) = \langle 1 \rangle$ . Нехай тепер  $H$  — нормальне замикання підгрупи  $\langle g \rangle$  у групі  $G$ . Припустимо, що  $H$  є поліциклічною. З наслідку 1.5 роботи [7] отримаємо включення  $g \in PC(G)$ , яке у свою чергу доводить той факт, що і факторгрупа  $A/C_A(g)$  повинна бути поліциклічною. Оскільки  $A$  є періодичною, то це означає, що  $A/C_A(g)$  мусить бути скінченною. Але ж у цьому випадку  $C_A(g) \neq \langle 1 \rangle$ . Однак, як ми вже бачили вище, це є неможливим. Отримане протиріччя показує, що підгрупа  $H$  не може бути поліциклічною. Інакше кажучи, підгрупа  $\langle g \rangle$  не є майже поліциклічно наближеною до нормальної. Нехай тепер

$$K_1 \leq K_2 \leq \dots \leq K_n \leq \dots —$$

довільна зростаюча послідовність підгруп, що містять у собі  $\langle g \rangle$ . З включення  $\langle g \rangle \leq K_n$  отримаємо напівпрямий розклад  $K_n = B_n \lambda \langle g \rangle$ . Це приводить нас до іншої зростаючої послідовності підгруп:

$$B_1 \leq B_2 \leq \dots \leq B_n \leq \dots ,$$

кожна з яких міститься в  $A$  та буде  $\langle g \rangle$ -інваріантною. Оскільки групове кільце  $F_p \langle g \rangle$  є нетеровим, то і циклічний  $F_p \langle g \rangle$ -модуль  $A$  буде нетеровим. Це означає, що  $A$  не містить у собі

строго зростаючих послідовностей  $\langle g \rangle$ -інваріантних підгруп. Таким чином, знайдеться такий номер  $m$ , що  $B_m = B_{m+k}$  для кожного натурального  $k$ . У свою чергу, тоді матимемо  $K_m = K_{m+k}$  для кожного натурального  $k$ . Отже, впорядкована за включенням система підгруп  $\{L \mid \langle g \rangle \leq L \leq G\}$  задовольняє умову максимальності.

Цей приклад також показує, що введене поняття підгрупи, майже поліциклічно наближеної до нормальної, є більш робочим і ефективним. За допомогою поняття майже поліциклічно наближених до нормальних підгруп може бути отримана будова класу  $PC$ -груп, що є значним розширенням класу  $FC$ -груп. Але спочатку нагадаємо деякі необхідні для подальшого означення (див. [9, розділ 3]).

Нехай  $X$  — клас груп. Будемо говорити, що група  $G$  має  $X$ -класи спряжених елементів або що  $G \in XC$ -групою, якщо факторгрупа  $G/C_G(g^G)$  належить до класу  $X$  для кожного елемента  $g$  групи  $G$ . Тут через  $g^G$  позначається клас усіх елементів, які спряжені з елементом  $g$ , тобто підмножина  $\{g^x = x^{-1}gx \mid x \in G\}$ .

Природними розширеннями класу скінченних груп є клас  $C$  усіх черніковських груп та клас  $P$  усіх майже поліциклічних груп. Тому якщо  $X = C$ , то клас усіх  $CC$ -груп — це точнісінько клас усіх груп з черніковськими класами спряжених елементів, який був введений у розгляд Я. Д. Половицьким [10]. Якщо ж  $X = P$ , то приходимо до класу  $PC$ -груп або до класу всіх груп з майже поліциклічними класами спряженості. Вивчення цього класу тільки починається [8, 11]. Цей клас допускає таку характеристику. Якщо  $G$  —  $PC$ -група, то з теореми 2.2 роботи [8] отримуємо, що для будь-якого елемента  $g \in G$  нормальне замикання  $H_g = \langle g \rangle^G$  є майже поліциклічною підгрупою. Звідси отримуємо, що і для будь-якої майже поліциклічної підгрупи  $F$  групи  $G$  її нормальне замикання  $F^G$  є майже поліциклічною підгрупою. Іншими словами, всяка майже поліциклічна підгрупа  $F$  групи  $G$  майже поліциклічно наближена до нормальної. Більше того, ця властивість є характеристичною для  $PC$ -груп. Тому природно виникає питання про будову групи  $G$ , в якій усі підгрупи, крім майже поліциклічних, майже поліциклічно наближені до нормальних. Такі групи називатимемо анти- $PC$ -групами. Відзначимо, що аналогічним чином виникали анти- $FC$ -групи. Нагадаємо, що  $FC$ -групу можна охарактеризувати як групу, усі скінченно породжені підгрупи яких є майже нормальними (відзначимо, що кожна скінченно породжена підгрупа  $FC$ -групи є майже поліциклічною). Анти- $FC$ -групи — це групи, в яких кожна нескінченно породжена підгрупа є майже нормальною. Ці групи вивчались у роботі [12]. Інший приклад такого підходу — групи, дуальні до груп Бера. Групи Бера можна визначити як групи, кожна скінченно породжена (поліциклічна) підгрупа яких є субнормальною. Їх антиподами будуть групи, кожна нескінченно породжена підгрупа яких є субнормальною. Такі групи вивчались у роботі [13].

Вивчення анти- $PC$ -груп було почато в роботі [7]. Основний результат цієї роботи показує, що при деяких природних обмеженнях анти- $PC$ -групи вичерпуються групами з майже поліциклічними комутантами і мінімаксними групами. Випадок мінімаксних груп вимагав окремого розгляду. Вивченню мінімаксних анти- $PC$ -груп і присвячена дана робота.

**Теорема 1.** *Нехай  $G$  — локально скінченна група. Якщо  $G$  — анти- $PC$ -група, то  $G$  — група одного з таких типів:*

- (1)  $G$  — група зі скінченним комутантом;
- (2)  $G$  — майже квазіциклічна група.

Нехай  $G$  — абелева група скінченного спеціального рангу. Виберемо в ній таку скінченно породжену підгрупу без скруту  $H$ , що  $G/H$  є періодичною. Позначимо через  $D/H$  подільну

частину  $G/H$  і покладемо  $\text{Sp}(G) = \Pi(D/H)$ . Якщо  $K$  — інша скінченно породжена підгрупа без скруту, що визначає періодичну факторгрупу  $G/K$ , то обидва фактора  $H/(H \cap K)$  та  $K/(H \cap K)$  скінченні. Це означає, що подільні частини  $G/H$  та  $G/K$  ізоморфні, так що множина  $\text{Sp}(G)$  є інваріантом групи  $G$ .

Якщо  $G$  — розв'язна група скінченного спеціального рангу, то  $\text{Sp}(G)$  визначається як об'єднання спектрів факторів її ряду комутантів.

Група  $G$  називається узагальнено радикальною, якщо вона має зростаючий ряд підгруп, фактори якого або локально нільпотентні, або локально скінченні.

**Теорема 2.** *Нехай  $G$  — неперіодична узагальнено радикальна група, яка містить у собі нескінченну періодичну підгрупу. Група  $G$  тоді і тільки тоді буде анти-PC-групою, коли  $G$  — група одного з таких типів:*

(1)  $G$  — група, усі підгрупи якої поліциклічно наближені до нормальних, зокрема, вона має майже поліциклічний комутант.

(2)  $[G, G]$  містить у собі таку нормальну в  $G$  квазіциклічну підгрупу  $D$ , що  $G/D$  майже поліциклічна.

(3)  $G$  задовольняє такі умови:

(3A) центр групи  $G$  містить у собі таку квазіциклічну підгрупу  $D$ , що  $G/D$  не містить у собі нескінченних періодичних підгруп;

(3B)  $[G/D, G/D] = K/D$  — майже поліциклічна підгрупа;

(3C)  $G/D$  є добутком двох нормальних підгруп  $A/D$  та  $L/D$ , де  $L/D$  — майже поліциклічна, а  $A/D$  — абелева мінімаксна група без скруту, у якої  $\text{Sp}(G/K) = \{p\}$ , де  $\{p\} = \Pi(D)$ ;

(3D) якщо  $A$  — PC-підгрупа групи  $G$ , то  $A/(A \cap D)$  буде скінченно породженою. Зокрема, кожна підгрупа  $G$ , що не має скінченної системи породжувальних елементів, містить у собі  $D$ .

Через  $P(G)$  будемо позначати максимальну нормальну періодичну підгрупу групи  $G$ .

**Теорема 3.** *Нехай  $G$  — неперіодична майже розв'язна мінімаксна група, у якої  $P(G) = \langle 1 \rangle$ . Якщо  $G$  є анти-PC-групою, то  $G$  — група одного з таких типів:*

(1)  $G$  — група, усі підгрупи якої поліциклічно наближені до нормальних, зокрема, вона має майже поліциклічний комутант.

(2)  $G$  задовольняє такі умови:

(2A)  $G$  містить у собі таку нормальну раціонально  $G$ -незвідну абелеву підгрупу  $D$  без скруту, що  $G/D$  майже поліциклічна;

(2B) якщо  $U$  — підгрупа  $G$ , що не має скінченної множини породжувальних елементів, то  $U \cap D$  також не має скінченної множини породжувальних елементів.

(3)  $G$  задовольняє такі умови:

(3A)  $G$  містить у собі таку нормальну раціонально  $G$ -незвідну абелеву підгрупу  $D$  без скруту, що  $G/D$  є добутком двох нормальних підгруп  $A/D$  та  $Q/D$ , де  $Q/D$  — скінченно породжена, а  $A/D$  — абелева мінімаксна група без скруту;

(3B) якщо  $U$  — підгрупа  $G$ , що не має скінченної множини породжувальних елементів, то  $U \cap D$  також не має скінченної множини породжувальних елементів.

Для деяких частинних випадків теорему 3 можна деталізувати. Зокрема має місце

**Теорема 4.** *Нехай  $G$  — неперіодична майже розв'язна мінімаксна група, у якої  $P(G) = \langle 1 \rangle$ . Припустимо також, що  $\zeta(G)$  не має скінченної системи породжувальних елементів. Група  $G$  тоді і тільки тоді буде анти-PC-групою, коли  $G$  — група одного з таких типів:*

(1)  $G$  — група, усі підгрупи якої поліциклічно наближені до нормальних, зокрема, вона має майже поліциклічний комутант.

(2)  $G$  має ряд нормальних підгруп  $B \leq Z \leq G$ , що  $Z$  — сервантна підгрупа центру,  $B$  — скінченно породжена підгрупа,  $Z/B$  — квазіциклічна  $p$ -група,  $G/Z$  — скінченно породжена. Більше того, якщо  $U$  — підгрупа  $Z$ , що не має скінченної множини породжувальних елементів, то  $U$  має в  $Z$  скінченний індекс.

(3)  $G$  має ряд нормальних підгруп  $B \leq Z \leq G$ , які задовольняють такі умови:

(3A)  $Z$  — сервантна підгрупа центру групи  $G$ ,  $B$  — скінченно породжена підгрупа,  $Z/B$  — квазіциклічна  $p$ -група,  $p$  — просте число;

(3B) якщо  $U$  — підгрупа  $G$ , що не має скінченної множини породжувальних елементів, то  $U \cap Z$  має в  $Z$  скінченний індекс;

(3C)  $G/Z$  є добутком двох нормальних підгруп  $A/Z$  та  $L/Z$ , де  $L/Z$  — скінченно породжена, а  $A/Z$  — абелева мінімаксна група без скруту, у якої  $\text{Sp}(G/K) = \{p\}$ .

1. Neumann B. H. Groups with finite classes of conjugate subgroups // Math. Z. — 1955. — **63**, No 1. — P. 76–96.
2. Курдаченко Л. А., Кузенний М. Ф., Семко М. М. Группы с щільною системою нескінченних підгруп // Доп. АН УРСР. Сер. А. — 1985. — № 3. — С. 7–9.
3. Franciosi S., de Giovanni F. Groups satisfying the minimal condition on certain non-normal subgroups // “Groups — Korea 94”. — Berlin: Walter de Gruyter, 1995. — P. 107–118.
4. Galoppo A. Groups satisfying the maximal condition on non-nearly normal subgroups // Ric. mat. — 2000. — **49**, No 2. — P. 213–220.
5. Franciosi S., de Giovanni F., Kurdachenko L. A. Groups with restrictions on non-subnormal subgroups // Ibid. — 1997. — **46**, No 2. — P. 307–320.
6. Musella C. Isomorphisms between lattices of nearly normal subgroups // Note mat. — 2000/2001. — **20**, No 1. — P. 43–52.
7. Пускун М. М. О строении групп с некоторыми системами подгрупп, близких к нормальным // Наук. часопис НПУ ім. М. П. Драгоманова. Сер. фіз.-мат. наук. — 2006. — Вип. 7. — С. 24–34.
8. Franciosi S., de Giovanni F., Tomkinson M. J. Groups with polycyclic-by-finite conjugacy classes // Boll. Unione mat. ital. — 1990. — **4B**, No 7. — P. 35–55.
9. Kurdachenko L. A., Otal J., Subbotin I. Ya. Artinian modules over group rings. — Basel: Birkhauser, 2007. — 245 p.
10. Половицкий Я. Д. Локально экстремальные и слойно экстремальные группы // Мат. сб. — 1962. — **58**, № 2. — С. 685–694.
11. Kurdachenko L. A., Otal J., Soules P. Groups with polycyclic-by-finite conjugate classes of subgroups // Commun Algebra. — 2004. — **32**, No 12. — P. 4769–4784.
12. Franciosi S., de Giovanni F., Kurdachenko L. A. On groups with many almost normal subgroups // Ann. mat. pura ed Appl. — 1995. — **169**, No 4. — P. 35–65.
13. Heineken H., Kurdachenko L. A. Groups with subnormality for all sub-groups that are not finitely generated // Annali Mat. — 1995. — **169**. — P. 203–232.

Національний університет державної  
податкової служби України, Ірпінь

Надійшло до редакції 12.03.2008