1. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – Москва, Наука, 1985. – 304 с.
2. *Lie S.* Klassifikation und Integration von gewöhnlichen x, y, die eine Gruppe von Transformationen gestatten I, II // Math. Ann. – 1988. – **32**. – P. 213–281.
3. *Kushner A., Lychagin V., Roubtsov V.* Contact geometry and non-linear differential equations. – Cambridge: Cambridge University Press, 2007. – 496 p.
4. *Алексеевский Д. В., Виноградов А. М., Лычагин В. В.* Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления // Геометрия-1. Т. 28. – Москва, 1988. – 289 с.
5. *Tresse A.* Sur les invariants differentiels des groupes continus de transformations // Acta Math. – 1894. – **18**. – P. 1–88.
6. *Красильщик И. С., Лычагин В. В., Виноградов А. В.* Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. – Москва: Наука, 1986. – 336 с.

Одесская национальная академия пищевых технологий

Поступило в редакцию 03.04.2008

УДК 517.51

Ю. С. Лінчук

Про один клас інтегро-диференціальних операторних рівнянь відносно узагальненого диференціювання Гельфонда–Леонтьєва

(Представлено членом-кореспондентом НАН України М. Л. Горбачуком)

We describe solutions of a class of integro-differential operator equations which contain the generalized differentiation and integration. An analog of Delsartes–Lions's formula for the representation of solutions of such equations is obtained.

Нехай G — довільна область комплексної площини. Через $\mathcal{H}(G)$ позначимо простір усіх аналітичних у G функцій, що наділений топологією компактної збіжності [1], а символом $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ — множину всіх лінійних неперервних операторів, що діють у просторі $\mathcal{H}(G)$. Нехай D — оператор диференціювання, а у випадку, коли область G є зірковою відносно початку координат, через $\mathcal{J}$ позначимо оператор інтегрування, який діє за правилом $(\mathcal{J}f)(z) = \int\limits_0^z f(t)\,dt$. У класичній праці Ж. Дельсарта і Ж. Л. Ліонса [2] у класі $\mathcal{L}(\mathcal{H}(\mathbb{C}))$ досліджувалося операторне рівняння

$$D^nT = TD^n, \tag{1}$$

де n — фіксоване натуральне число. Зокрема, у [2] стверджувалося, що загальний розв'язок рівняння (1) можна подати у вигляді

$$T = \sum_{k=0}^{n-1} T_kP^k, \tag{2}$$

де P — лінійний неперервний оператор, що діє в просторі цілих функцій за правилом $(Pf)(z) = f(\omega z)$, $\omega = \exp(2\pi i/n)$, а кожен з операторів T_k, $k = \overline{0, n-1}$, лінійно та неперервно діє в просторі цілих функцій і є переставним з оператором D. М. І. Нагнибіда встановив [3], що формулою (2) описується деяка підмножина розв'язків рівняння (1), а також знайшов матричним методом усі розв'язки цього рівняння в класі $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$, де $G = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < R\}$, $0 < R \leqslant \infty$.

Нехай $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty}$ — послідовність комплексних чисел, які збігаються з тейлорівськими коефіцієнтами деякої цілої функції скінченного порядку. Тоді за певних умов на послідовність $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty}$ формулами

$$(D_\alpha f)(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} z^{n-1}, \qquad (\mathcal{J}_\alpha f)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} z^{n+1}$$

визначаються оператори узагальненого диференціювання D_α та узагальненого інтегрування $\mathcal{J}_\alpha$, які лінійно та неперервно діють у просторі цілих функцій [4, 5]. У [6–8] вивчалися умови на послідовність $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty}$, за яких оператор D_α можна продовжити до оператора, який лінійно та неперервно діє в просторі $\mathcal{H}(G)$ для певного класу областей G (опуклих, зіркових відносно початку координат тощо). Аналогічна задача для оператора узагальненого інтегрування розв'язана в [8, 9].

Надалі вважатимемо, що $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty}$ — послідовність відмінних від нуля комплексних чисел, які є тейлорівськими коефіцієнтами цілої функції $\alpha(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$, і породжені нею оператори узагальненого диференціювання D_α та узагальненого інтегрування $\mathcal{J}_\alpha$ лінійно та неперервно діють у просторі $\mathcal{H}(G)$, де G — довільна зіркова відносно початку координат область комплексної площини. При зроблених допущеннях вивчимо розв'язки операторного рівняння

$$T\mathcal{J}_\alpha^n = D_\alpha^n T, \tag{3}$$

$n \in \mathbb{N}$, у класі лінійних неперервних операторів $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$.

Нехай G — деяка зіркова відносно точки $z = 0$ область комплексної площини. Оскільки система функцій $\{\alpha(\lambda z)\colon \lambda \in \mathbb{C}\}$ є повною в $\mathcal{H}(G)$, то кожен оператор T з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ однозначно визначається характеристичною функцією $t(\lambda, z) = T(\alpha(\lambda \widetilde{z}))$. При цьому функція $t(\lambda, z)$ є цілою за λ, аналітичною за z в області G і задовольняє певну умову, яка рівносильна умові неперервності оператора T. Опишемо в термінах характеристичних функцій розв'язки операторного рівняння (3) у випадку $n = 1$.

Теорема 1. *Для того щоб лінійний неперервний оператор T з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ задовольняв рівність*

$$T\mathcal{J}_\alpha = D_\alpha T, \tag{4}$$

необхідно і достатньо, щоб його характеристична функція $t(\lambda, z)$ подавалася у вигляді

$$t(\lambda, z) = \alpha_0 \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k (D_\alpha^k \varphi)(z),$$

де $\varphi(z)$ — деяка функція з $\mathcal{H}(G)$.

Якщо область G є інваріантною відносно повороту навколо початку координат на кут $2\pi/n$, то формулою $(Pf)(z) = f(\omega z)$, де $\omega = \exp(2\pi i/n)$, визначається оператор P з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$. Доведемо основний результат роботи.

Теорема 2. *Нехай G — довільна зіркова відносно точки $z = 0$ область комплексної площини, яка інваріантна відносно повороту навколо початку координат на кут $2\pi/n$, де n — фіксоване натуральне число. Загальний розв'язок рівняння* (3) *у класі операторів $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ дається формулою*

$$T = \sum_{k=0}^{n-1} T_k P^k, \tag{5}$$

де T_k, $k = \overline{0, n-1}$, — деякі оператори з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$, що задовольняють рівняння (4).

Доведення. Нехай оператор $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ з характеристичною функцією $t(\lambda, z)$ задовольняє рівняння (3). Тоді при $\lambda \in \mathbb{C}$ і $z \in G$

$$t(\lambda, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j (D_\alpha^{kn} \varphi_j)(z) \lambda^{kn+j}, \tag{6}$$

де $\varphi_j(z) = Tz^j$, $j = \overline{0, n-1}$. Перетворимо функцію $t(\lambda, z)$. Функції

$$\widetilde{\varphi}_k(z) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\omega^{-kj}}{n} \alpha_j (\mathcal{J}_\alpha^j \varphi_j)(z), \qquad k = \overline{0, n-1},$$

є аналітичними в області G. При $z \in G$ і $j = \overline{0, n-1}$ є правильними рівності

$$\alpha_j \varphi_j(z) = \sum_{s=0}^{n-1} \omega^{js} (D_\alpha^j \widetilde{\varphi}_s)(z). \tag{7}$$

Тому з (6) і (7) випливає, що

$$t(\lambda, z) = \sum_{s=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m \omega^{ms} (D_\alpha^m \widetilde{\varphi}_s)(z). \tag{8}$$

Таким чином, при $z \in G$ і $\lambda \in \mathbb{C}$

$$t(\lambda, z) = \sum_{k=0}^{n-1} t_k(\omega^k \lambda, z), \tag{9}$$

де $t_k(\lambda, z) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \lambda^m (D_\alpha^m \widetilde{\varphi}_k)(z)$, $k = \overline{0, n-1}$. Всі функціональні ряди для кожного фіксованого $\lambda \in \mathbb{C}$ за змінною z збігаються за топологією простору $\mathcal{H}(G)$. Покажемо далі, що кожна з функцій $t_k(\lambda, z)$ є характеристичною функцією деякого оператора T_k з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ і кожен з операторів T_k задовольняє рівність (4), $k = \overline{0, n-1}$. Для кожного $p = 0, 1, \ldots$ при $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $z \in G$ є правильними рівності

$$D_\alpha^p (t_k(\omega^k \lambda, z)) = \frac{\omega^{-kp}}{\lambda^p} t_k(\omega^k \lambda, z) - \sum_{r=0}^{p-1} \frac{\omega^{-k(r+1)}}{\lambda^{r+1}} (D_\alpha^{p-r-1} \widetilde{\varphi}_k)(z). \tag{10}$$

Подіявши на рівність (9) оператором D_α^p за змінною z і скориставшись (10), одержимо

$$D_\alpha^p(t(\lambda,z))=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\omega^{-kp}}{\lambda^p}t_k(\omega^k\lambda,z)-\sum_{r=0}^{p-1}\frac{\omega^{-k(r+1)}}{\lambda^{r+1}}(D_\alpha^{p-r-1}\widetilde{\varphi}_k)(z)\right).$$

Тому

$$\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{-kp}t_k(\omega^k\lambda,z)=\lambda^pD_\alpha^p(t(\lambda,z))+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{r=0}^{p-1}\omega^{-k(r+1)}\lambda^{p-r-1}(D_\alpha^{p-r-1}\widetilde{\varphi}_k)(z), \tag{11}$$

$p=\overline{0,n-1}$, $z\in G$, $\lambda\in\mathbb{C}$. Для кожного $p=\overline{0,n-1}$ через B_p позначимо оператор

$$B_p=D_\alpha^pTD_\alpha^p+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{r=0}^{p-1}\omega^{-k(r+1)}(D_\alpha^{p-r-1}\widetilde{\varphi}_k)(z)\delta_{p-r-1},$$

де $\delta_l(f)=\alpha_0^{-1}(D_\alpha^lf)(0)=f^{(l)}(0)/(\alpha_l l!)$, $l=0,1,\ldots$. Зрозуміло, що $B_p\in\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ при $p=\overline{0,n-1}$. Нехай $b_p(\lambda,z)$ — характеристична функція оператора B_p, тобто $B_p(\alpha(\lambda\widetilde{z}))=$ $=b_p(\lambda,z)$, $p=\overline{0,n-1}$. Тоді співвідношення (11) при $\lambda\in\mathbb{C}$ і $z\in G$ можна записати у вигляді

$$\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{-kp}t_k(\omega^k\lambda,z)=b_p(\lambda,z),\qquad p=\overline{0,n-1}. \tag{12}$$

Співвідношення (17) є системою n лінійних рівнянь відносно невідомих $t_k(\omega^k\lambda,z)$. Оскільки визначник цієї системи відмінний від нуля, то, розв'язавши її, одержимо, що при $\lambda\in\mathbb{C}$, $z\in G$

$$t_k(\omega^k\lambda,z)=\sum_{p=0}^{n-1}d_{pk}b_p(\lambda,z), \tag{13}$$

де d_{pk} — деякі сталі, p, $k=\overline{0,n-1}$. З (13) одержуємо, що функція $t_k(\lambda,z)$ є характеристичною для оператора $T_k=\sum\limits_{p=0}^{n-1}d_{pk}B_pP^{n-k}$, який належить класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$. При цьому $\widetilde{\varphi}_k(z)=t_k(0,z)=T_k1$, $k=\overline{0,n-1}$. Оскільки

$$t_k(\lambda,z)=\alpha_0\sum_{m=0}^{\infty}\lambda^m\left(D_\alpha^m\frac{\widetilde{\varphi}_k}{\alpha_0}\right)(z),$$

то за теоремою 1 оператор T_k задовольняє рівність (4), $k=\overline{0,n-1}$. З (9) випливає, що оператор T подається у вигляді (5), причому кожен з операторів T_k належить класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ і задовольняє рівність (4), $k=\overline{0,n-1}$. Необхідність умов теореми 2 доведено, а їхня достатність встановлюється безпосередньою перевіркою.

Твердження теореми 2 буде правильним для операторів узагальненого диференціювання $D_{\rho,\mu}$ та узагальненого інтегрування $\mathcal{J}_{\rho,\mu}$ Гельфонда–Леонтьєва, які породжені послідовністю $(\alpha_n=1/(\Gamma((n/\rho)+\mu)))_{n=0}^{\infty}$, $\rho>0$, $\mathrm{Re}\,\mu>0$, Γ — гамма-функція Ейлера [10]. У випадку $\rho=\mu=1$ оператори узагальненого диференціювання $D_{\rho,\mu}$ та узагальненого інтегрування $\mathcal{J}_{\rho,\mu}$ збігаються відповідно з операторами звичайного диференціювання D та звичайного інтегрування $\mathcal{J}$. Тому це твердження буде правильним і для операторного рівняння виду $T\mathcal{J}^n = D^nT$. Таким чином, ми одержали узагальнення основного результату з [11], оскільки в [11] правильність відповідної формули (5) встановлено при допущенні, що область G є опуклою.

1. *Köthe G.* Dualität in der Funktionentheorie // J. reine und angew. Math. – 1953. – **191**. – S. 30–49.
2. *Delsartes J., Lions J. L.* Transmutations d'operateurs differentieles dans le domaine complexe // Comment. Math. Helv. – 1957. – **32**, No 2. – S. 113–128.
3. *Нагнибида Н. И.* К вопросу об изоморфизмах аналитического пространства, перестановочных со степенью оператора дифференцирования // Докл. АН СССР. – 1966. – **167**, № 6. – С. 1230–1233.
4. *Гельфонд А. О., Леонтьев А. Ф.* Об одном обобщении ряда Фурьє // Мат. сб. – 1951. – **29(71)**, № 3. – С. 477–500.
5. *Нагнибида Н. И., Фишман К. М.* О базисе из обобщенных первообразных // Сиб. мат. журн. – 1965. – **6**, № 4. – С. 944–946.
6. *Коробейник Ю. Ф.* Об операторах обобщенного дифференцирования, применимых к любой аналитической функции // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1964. – **28**, № 4. – С. 833–854.
7. *Братищев А. В.* О линейных операторах, символ которых является функцией произведения своих аргументов // Докл. АН. – 1999. – **365**, № 1. – С. 9–12.
8. *Моржаков А. В.* Представление оператора обобщенного дифференцирования в одном классе односвязых областей // Вестн. ДГТУ. – 2006. – **6**, № 1. – С. 10–16.
9. *Кирютенко Ю. А.* Об операторах обобщенного интегрирования, аналитически продолжимих из нуля // Изв. высш. учеб. заведений. Матем. – 1975. – № 7(158). – С. 47–53.
10. *Dimovski I. H.* Convolutional calculus. Ser. Math. and appl. – 1990. – Vol. 43. – 208 p.
11. *Лінчук Ю. С.* Зображення розв'язків одного інтегро-диференціального операторного рівняння // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 1. – С. 136–139.

Чернівецький національний університет
ім. Юрія Федьковича

Надійшло до редакції 16.04.2008

УДК 517.988

Член-кореспондент НАН України **В. Л. Макаров, І. І. Демків**

Новий клас інтерполяційних інтегральних ланцюгових дробів

An interpolation integral chain fraction for a given nonlinear functional on the continual knot set is constructed. It is a natural generalization of the interpolation chain fraction.

Інтегральні інтерполяційні ланцюгові дроби (ІІЛД) вперше були введені в роботі [1]. Для функціоналів $F\colon L_1(0,1) \to R^1$ вони мають вигляд

$$Q_n^I(x(\cdot);F) = F(x_0(\cdot)) + \int\limits_0^1 \frac{K_1^I(z_1)[x(z_1)-x_0(z_1)]dz_1}{1+\int\limits_{z_1}^1 \frac{K_2^I(\vec{z}^{\,2})[x(z_2)-x_1(z_2)]dz_2}{1+\ddots}}, \qquad (1)$$