УДК 514.763.624



**Е. А. Олин**

# О локально выпуклых гиперповерхностях в пространствах Финслера–Адамара

*(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. А. Борисенко)*

*Locally convex compact immersed hypersurfaces in Finsler–Hadamard manifolds with bounded* **T**-*curvature are considered. We prove that, under certain conditions on the normal curvatures, such hypersurfaces are embedded as the boundary of a convex body and are homeomorphic to a sphere.*

Пусть $M$ есть полное финслерово многообразие. Тогда:

1. Множество $A$ называется выпуклым, если каждая кратчайшая с концами в $A$ содержится в $A$.

2. Множество $A$ называется локально выпуклым, если каждая точка $P \in A$ имеет окрестность $U_P$ такую, что $A \bigcap U_P$ выпукло.

Ж. Адамар доказал следующую теорему.

**Теорема** [1]. *Пусть $\varphi$ — погружение компактного ориентированного $n$-мерного многообразия $M$ в евклидово пространство $E^{n+1}$, $n \geqslant 2$, со всюду положительной гауссовой кривизной. Тогда $\varphi(M)$ есть выпуклая гиперповерхность.*

Чжень и Лашоф обобщили эту теорему на случай знакоопределенной гауссовой кривизны [1]. Для $\varphi$-погружения компактного ориентированного $n$-мерного многообразия $M$ в евклидово пространство $E^{n+1}$ они показали эквивалентность утверждений:

1) степень сферического отображения равна $\pm 1$ и гауссова кривизна не меняет знака;

2) $\varphi(M)$ есть выпуклая гиперповерхность.

Топологическое погружение $f\colon N^n \to M^{n+1}$ многообразия $N^n$ в многообразие $M^{n+1}$ называется локально выпуклым в точке $x \in N^n$, если у $x$ есть окрестность $U$ такая, что $f(U)$ является частью границы выпуклого множества в $M^{n+1}$.

С. Александер [2] (см. также А. А. Борисенко [3]) обобщила эту теорему для компактного случая, когда объемлющим пространством является полное односвязное риманово многообразие неположительной кривизны (многообразие Адамара).

**Теорема** [2–4]. *Пусть $f\colon N^n \to M^{n+1}$, $n \geqslant 2$, есть погружение компактного связного многообразия $N^n$ в полное односвязное риманово многообразие неположительной кривизны $M^{n+1}$. Если $f$ локально выпукло, то $f$ есть вложение, $f(N^n)$ есть граница выпуклого тела, гомеоморфного шару, и $f(N^n)$ гомеоморфно сфере $\mathbb{S}^n$.*

Целью данной работы является обобщение этой теоремы на случай погружения компактного многообразия в полное односвязное финслерово многообразие неположительной кривизны. Будем называть такие многообразия многообразиями Финслера–Адамара.

**Теорема 1.** *Пусть $f\colon N^n \to M^{n+1}$, $n \geqslant 2$, есть погружение компактной гиперповерхности $N^n$ в полное односвязное финслерово многообразие $M^{n+1}$. Пусть $N^n$ и $M^{n+1}$ удовлетворяют свойствам:*

*1) флаговая кривизна $M^{n+1}$ $K \leqslant -k^2$;*

*2) $\mathbf{T}$-кривизна $M^{n+1}$ $|\mathbf{T}| \leqslant \delta$, где $0 \leqslant \delta < k$;*

*3) нормальные кривизны гиперповерхности $N^n$ удовлетворяют неравенству $\mathbf{k_n} > 2\delta$. Тогда $f$ есть вложение, $f(N^n)$ есть граница выпуклого тела, гомеоморфного шару, и $f(N^n)$ гомеоморфно сфере $\mathbb{S}^n$.*

Также показано, что теорема С. Александер верна в случае финслеровых пространств с метрикой Бервальда.

Для доказательства теорем была доказана теорема сравнения для длин якобиевых полей при экспоненциальном отображении относительно гиперповерхности и найдены условия, при которых внешние параллельные гиперповерхности к выпуклой гиперповерхности будут выпуклыми.

**Основные теоретические сведения.** Пусть $M^n$ — $n$-мерное связное $C^\infty$-многообразие. Обозначим через $TM^n = \bigsqcup_{x\in M^n} T_xM^n$ касательное расслоение $M^n$. Тогда финслеровой метрикой на $M$ называется функция $F\colon TM^n \to [0,\infty)$, удовлетворяющая следующим свойствам:

1) $F \in C^\infty(TM^n \setminus \{0\})$;

2) $F$ положительно однородна первой степени, т. е. для любой пары $(x,y) \in TM^n$ и любого $\lambda > 0$, $F(x,\lambda y) = \lambda F(x,y)$;

3) для любой пары $(x,y) \in TM^n$ билинейная симметричная форма $\mathbf{g}_y\colon T_xM^n \times T_xM^n \to \mathbb{R}$,

$$\mathbf{g}_y(u,v) := \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}[F^2(x,y+su+tv)]\Big|_{s=t=0}$$

положительно определена.

Пара $(M^n, F)$ называется финслеровым многообразием.

Если положить

$$g_{ij}(y) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^i\partial y^j}[F^2(x,y)],$$

то форму $\mathbf{g}_y(u,v)$ можно переписать в виде

$$\mathbf{g}_y(u,v) = g_{ij}(y)u^iv^j.$$

Для гладкой кривой $c\colon [a,b] \to M^n$ на многообразии $M^n$ с финслеровой метрикой $F$ длина определяется интегралом

$$L_F(c) = \int\limits_a^b F(c(t),\dot c(t))\,dt.$$

Как и в римановой геометрии, в финслеровой геометии вводятся геодезические как локально кратчайшие. Они обладают всеми необходимыми свойствами. Также обобщается секционная кривизна, здесь она называется флаговой кривизной. Тогда, по аналогии, пространствами Финслера–Адамара называются односвязные пространства неположительной флаговой кривизны. В таких пространствах выполняется обобщение теоремы Картана–Адамара.

В отличие от римановой геометрии, флаговая кривизна не описывает до конца все свойства финслеровой метрики. Поэтому в рассмотрение вводятся так называемые неримановы кривизны, которые для римановых метрик обращаются в ноль. Нам понадобится одна из них — $\mathbf{T}$-кривизна [5].

Пусть $(M^n, F)$ — финслерово пространство. Для вектора $y \in T_xM^n \setminus \{0\}$ пусть $Y$ — его продолжение до геодезического поля в некоторой окрестности $x$. Пусть $\nabla$ — связность Черна, а $\widetilde{\nabla}$ — связность Леви-Чивита для индуцированной римановой метрики $\widetilde{g} = \mathbf{g}_Y$. Для вектора $v \in T_xM^n$ определим

$$\mathbf{T}_y(v) = \mathbf{g}_y(\nabla_v V, y) - \widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_v V, y), \qquad (1)$$

где $V$ — такое векторное поле, что $V_x = v$.

Семейство $\{\mathbf{T}_y\}_{y \in T_xM^n \setminus \{0\}}$ и называется $\mathbf{T}$-кривизной.

Как и в [5], мы будем говорить, что $\mathbf{T}$-кривизна ограничена сверху $\mathbf{T} \geqslant -\delta$, если

$$\mathbf{T}_y(u) \geqslant -\delta\left[\mathbf{g}_y(u,u) - \mathbf{g}_y(u, \frac{y}{F(y)})^2\right]F(y).$$

Аналогично определяется нижняя граница $\mathbf{T}$-кривизны.

Заметим, что для метрик Бервальда $\mathbf{T}$-кривизна обращается в ноль; верно также и обратное утверждение [5].

Пусть $\varphi\colon N \to M^n$ это гиперповерхность в $M^n$. Вектор $\mathbf{n} \in T_{\varphi(x)}M^n$ называется вектором нормали к $N$ в точке $x \in N$, если $\mathbf{g}_{\mathbf{n}}(y, \mathbf{n}) = 0$ для всех $y \in T_xN$. Известно, что такой вектор существует [5]. Заметим, что в общем случае, вектор $-\mathbf{n}$ не будет вектором нормали. Таким образом, можем рассмотреть подрасслоение $\nu(N)$ касательного расслоения $TM^n$, состоящее из всех нормальных к $N$ векторов с выбранной ориентацией, $\nu(N)$ называется нормальным расслоением над $N$.

Экспоненциальным отображением относительно гиперповерхности $N$ будем называть отображение $\exp_N\colon \nu(N) \to M^n$, определяемое равенством

$$\exp_N(x, \mathbf{n}) = \exp_x(\mathbf{n}).$$

Для гиперповерхности $N$ в финслеровом многообразии $M^n$ нормальная кривизна $\mathbf{k}_{\mathbf{n}}$ в точке $x \in N$ в направлении $y \in T_xN$ определяется как

$$\mathbf{k}_{\mathbf{n}} = -\mathbf{g}_{\mathbf{n}}(\nabla_{\dot{c}(t)}\dot{c}(t)|_{t=0}, \mathbf{n}),$$

где $\dot{c}(0) = y$, и $c(t)$ является геодезической в индуцированной связности в $N$, $\mathbf{n}$ — выбранная единичная нормаль.

Для выбранного векторного поля $Y$ $\mathbf{g}_Y(u, v)$ превращается в риманову метрику на $M^n$. Полученная риманова метрика обладает рядом полезных свойств.

Для гиперповерхности $N$ можем определить оператор Вейнгартена следующим образом. Пусть $\rho$ — функция расстояния класса $C^\infty$ на открытой окрестности $U \subset N$ такая, что $U = \rho^{-1}(0)$. Пусть $\widetilde{\nabla}$ — связность Леви-Чивита для индуцированной римановой метрики $\widetilde{g} = \mathbf{g}_{\nabla\rho}$, определенной в некоторой окрестности $U$. Тогда для вектора нормали $\mathbf{n} = \nabla\rho|_N$ оператором Вейнгартена называется оператор $S_{\mathbf{n}}(w)\colon T_xN \to T_xN$, действующий по закону

$$S_{\mathbf{n}}(w) = \widetilde{\nabla}_w \mathbf{n}.$$

**Теоремы сравнения для якобиевых полей.** Изначально теорема Рауха была доказана для сравнения длин якобиевых полей при экспоненциальном отображении относительно точки. Используя теорему Рауха, можно показать отсутствие сопряженных точек в многообразиях неположительной кривизны. Затем Берже обобщил эту теорему на случай фокальных точек экспоненциального отображения относительно геодезической. Окончательным результатом в этом направлении можно назвать работу Варнера [6], где он доказывает теоремы сравнения для экспоненциального отображения относительно подмногообразия.

Здесь мы доказываем теорему сравнения Рауха для экспоненциального отображения относительно гиперповерхности в финслеровых пространствах.

Рассмотрим гладкую гиперповерхность $N$ в $M^n$. Выпустим из точки $x \in N$ геодезическую с параметризацией $c(t)$ в направлении вектора нормали к $N$ в $x$.

Рассмотрим геодезическую $c\colon [a,b] \to M^n$. Тогда полем Якоби вдоль геодезической $c$ называется векторное поле $J(t)$, удовлетворяющее уравнению Якоби:

$$\nabla_{\dot c(t)}\nabla_{\dot c(t)}J + \mathbf{R}_{\dot c(t)}(J) = 0.$$

Будем называть поле Якоби $J(t)$ вдоль геодезической $c(t)$ $N$-якобиевым полем, если

$$\nabla_{\dot c(t)}J(t)|_{t=0} = S_{\dot c}(J(t))|_{t=0}.$$

Назовем точку $c(t_0)$ фокальной точкой к $N$ вдоль $c$, если существует такое нетривиальное $N$-якобиево поле $J$ вдоль $c$, что $J(t_0) = 0$.

Как и в римановой геометрии, фокальные точки можно рассматривать как точки нерегулярности экспоненциального отображения относительно гиперповерхности.

Берем два финслеровых многообразия $M^n$ и $\overline{M}^n$. В $M^n$ рассматриваем гиперповерхность $N$, нормальная геодезическая $c\colon [0,t] \to M^n$ такая, что $c(0) \in N$ и $\dot c(0)$ — $\mathbf{g}_{\dot c(0)}$-ортогонально $N$. Обозначим через $J$ нетривиальное $N$-якобиево поле вдоль $c$. В $\overline{M}^n$ рассматриваем аналогичную конструкцию, элементы которой будем отличать чертой сверху. Предположим также, что $\mathbf{g}_{\dot c(t)}(J(t), J(t))|_0 = \overline{\mathbf{g}}_{\dot{\overline{c}}(t)}(\overline{J}(t), \overline{J}(t))|_0$. Сделаем "пересадку" векторного поля $J(t)$ в многообразие $\overline{M}^n$ вдоль геодезической $\overline{c}(t)$. Будем следовать [7]. Выберем $\mathbf{g}_{\dot c(0)}$-ортонормированный базис в $T_{c(0)}M^n$ с $E_n = \dot c(0)$. Разнесем этот базис до параллельного вдоль $c(t)$. Получим набор $E_i(t)$ $\mathbf{g}_{\dot c(t)}$-ортонормированных полей вдоль $c(t)$ с $E_n(t) = \dot c(t)$. Проделав аналогичную конструкцию в $\overline{M}^n$, получим набор $F_i(t)$ $\overline{\mathbf{g}}_{\dot{\overline{c}}(t)}$-ортонормированных полей вдоль $\overline{c}(t)$ с $F_n(t) = \dot{\overline{c}}(t)$. Теперь разложим $J(t) = \varphi^i(t)E_i(t)$ и определим новое поле $\widetilde{J}(t) = \varphi^i(t)F_i(t)$.

**Теорема 2.** *Пусть для всех $t \in [0,s]$ и для всех флагов $P \subset T_{c(t)}M^n$ и $\overline{P} \subset T_{\overline{c}(t)}\overline{M}^n$ вдоль геодезических $c$, $\overline{c}$ таких, что флаг $\overline{P}$ — это флаг $P$, "пересаженный" в $\overline{M}$, выполнено неравенство $K(\dot c(t), P) \leqslant K(\dot{\overline{c}}(t), \overline{P})$; каждое из собственных чисел формы $S$ не меньше любого собственного числа $\overline{S}$. Пусть также на $c$ нет точек, фокальных вдоль $c$ к $N$. Тогда для всех $t \in [0,s]$*

$$\mathbf{g}_{\dot c(t)}(J(t), J(t)) \geqslant \overline{\mathbf{g}}_{\dot{\overline{c}}(t)}(\overline{J}(t), \overline{J}(t))$$

*и на $c$ также нет фокальных точек.*

**Следствие 1.** *В финслеровом пространстве с неположительной флаговой кривизной и ограниченной $\mathbf{T}$-кривизной $|\mathbf{T}| \leqslant \delta \geqslant 0$ экспоненциальное отображение относительно гиперповерхности с нормальными кривизнами $\mathbf{k_n} \geqslant \delta$ будет невырожденным. То есть внешние параллельные гиперповерхности будут регулярными.*

О выпуклости параллельных гиперповерхностей. Известным в римановой геометрии является факт, что в пространствах неположительной кривизны внешние, а в пространствах неотрицательной кривизны внутренние эквидистантные гиперповерхности к выпуклой гиперповерхности будут выпуклыми. Мы доказываем аналогичный результат при более сильных ограничениях на нормальную кривизну для пространств Финслера–Адамара.

**Теорема 3.** *В финслеровом многообразии с флаговой кривизной $K \leqslant -k^2$ и $\mathbf{T}$-кривизной $|\mathbf{T}| \leqslant \delta$ такой, что $0 \leqslant \delta \leqslant k$, рассмотрим гиперповерхность $N$ с нормальными кривизнами $\mathbf{k_n} > 2\delta$. Тогда все внешние эквидистантные гиперповерхности являются локально выпуклыми.*

Теперь, используя теоремы 2 и 3, становится возможным доказать теорему 1.


1. *Стернберг С.* Лекции по дифференциальной геометрии. – Москва: Мир, 1970. – 412 с.
2. *Alexander S.* Locally convex hypersurfaces of negatively curved spaces // Proc. AMS. – 1977. – **64**, No 2. – P. 321–325.
3. *Борисенко А. А.* О локально выпуклых гиперповерхностях в многообразиях Адамара // Мат. заметки. – 2000. – **67**. – С. 425–431.
4. *Борисенко А. А.* Внутренняя и внешняя геометрия многомерных подмногообразий. – Москва: Экзамен, 2003. – 672 с.
5. *Shen Z.* Lectures on Finsler geometry. – Singapore: World Scientific Publishing Co, 2001. – 306 p.
6. *Warner F. W.* Extension of the Rauch comparison theorem to submanifolds // Trans. Amer. Math. Soc. – 1966. – **122**, No 2. – P. 341–356.
7. *Bao D., Chern S. S., Shen Z.* An introduction to Riemann–Finsler geometry. – Berlin: Springer-Verlag, 2000. – 434 c.



*Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина*



*Поступило в редакцию 03.04.2008*



УДК 514.764.27





**Е. В. Петров**


## О грассмановом отображении подмногообразий в группах Ли

*(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. А. Борисенко)*


*A criterion for the harmonicity of the Grassmann map of an immersed smooth submanifold in some Lie group with left-invariant metric is given. Using the obtained expression, we obtain criteria for the harmonicity of this map in both cases of totally geodesic submanifolds in Lie groups with biinvariant metric and cylindrical submanifolds in Heisenberg groups.*


**Постановка задачи.** Пусть $M$ — гладкое многообразие, $N$ — группа Ли с левоинвариантной метрикой $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $\mathcal{N}$ — ее алгебра Ли со скобкой Ли $[\cdot,\cdot]$, $M \to N$ — погружение, $\dim M = n$, $\dim N = n+q$.

Грассманово отображение $\Phi\colon M \to G(n,q)$ подмногообразия $M$ определяется как результат переноса в $T_eN = \mathcal{N}$ касательного пространства в соответствующей точке $M$ дифференциалом левого сдвига:

$$\Phi(p) = dL_{p^{-1}}(T_pM). \tag{1}$$

Тут точка $p$ отождествляется с ее образом при погружении.