УДК 531.53:517.938

В. Ю. Ічанський

Граничні цикли подвійного маятника з жорсткими характеристиками пружних елементів і слідкуючою силою

(Представлено членом-кореспондентом НАН України А. А. Мартинюком)

It is shown that the stable and unstable limit cycles exist in the phase space of a double pendulum with the hard characteristic of elastic elements.

Сили радіальної корекції в гіроскопії [1], а також слідкуючі сили [2, 3] зумовлюють появу в рівняннях збуреного руху непотенціальних позиційних сил, яким відповідає кососиметрична матриця. Динамічні системи з такими силами втрачають консервативність і набувають низку особливостей [4, 5], однією з яких є втрата однозначної залежності характеру стійкості руху від структури сил, встановлюваної теоремами [1]. Цими особливостями та важливими практичними застосуваннями таких систем пояснюється науковий інтерес до них. В [6] розглянуто еволюцію граничних циклів дволанкового математичного маятника з лінійнодеформівними пружними елементами. Можливі типи фізичних нелінійностей [7] та їх математичне описування вказано в [8]. Узагальнена математична модель n-ланкового маятника з верхнім положенням рівноваги і різними типами пружних елементів запропонована в [9]. Дана робота присвячена дослідженню еволюції граничних циклів дволанкового математичного маятника зі зміною модуля слідкуючої сили у випадку жорстких характеристик пружних елементів.

Згідно з [8], сила $\vec{Q}_c$ та моменти $\vec{M}_1$, $\vec{M}_2$ (рис. 1) описуються залежностями

$$\begin{aligned}
&\vec{Q}_c = -\vec{j}Q_c, \qquad Q_c = Q_c^h = \frac{2ca}{\pi}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi y_2}{2a}\right), \qquad y_2 = l_1\sin(\varphi_1) + l_2\sin(\varphi_2),\\
&M_1 = M_1^h + \mu_1\dot{\varphi}_1, \qquad M_2 = M_2^h + \mu_2(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1),\\
&M_1^h = \frac{2c_1a_1}{\pi}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi\varphi_1}{2a_1}\right), \qquad M_2^h = \frac{2c_2a_2}{\pi}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi(\varphi_2-\varphi_1)}{2a_2}\right), \qquad (\cdot) = \frac{d}{dt}.
\end{aligned} \tag{1}$$

З [9] при $n = 2$ одержуємо такі диференціальні рівняння плоскопаралельного руху подвійного маятника:

$$\begin{aligned}
&(m_1+m_2)l_1^2\ddot{\varphi}_1 + m_2l_1l_2\ddot{\varphi}_2\cos(\varphi_1-\varphi_2) + m_2l_1l_2\dot{\varphi}_2^2 sin(\varphi_1-\varphi_2) =\\
&\qquad = (m_1+m_2)gl_1 sin\varphi_1 + Pl_1\sin(\varphi_1 - k\varphi_2) - Q_c^h l_1\cos\varphi_1 - M_1 + M_2,\\
&m_2l_2^2\ddot{\varphi}_2 + m_2l_1l_2\ddot{\varphi}_1\cos(\varphi_1-\varphi_2) - m_2l_1l_2\dot{\varphi}_1^2\sin(\varphi_1-\varphi_2) =\\
&\qquad = m_2gl_2\sin\varphi_2 + Pl_2\sin[(1-k)\varphi_2] - Q_c^h l_2\cos\varphi_2 - M_2.
\end{aligned} \tag{2}$$

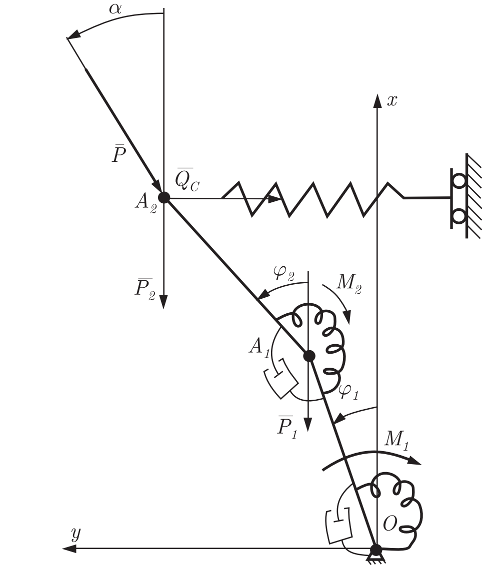


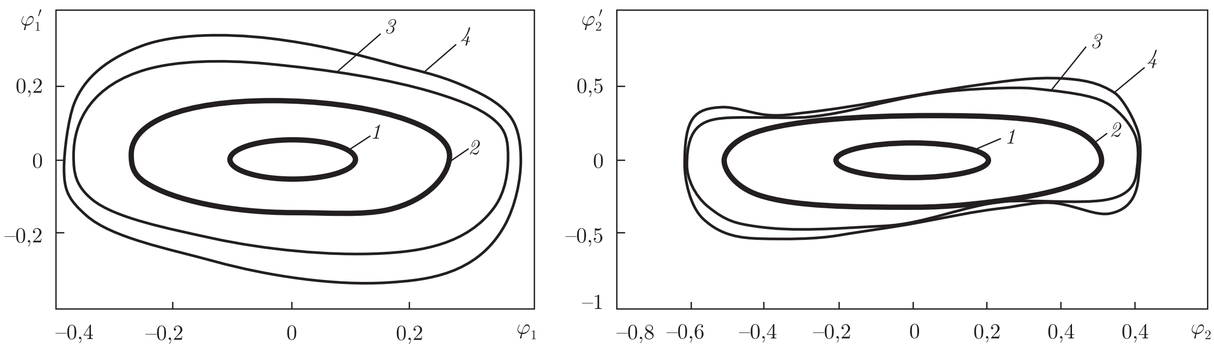
Рис. 1

Для вертикального стану рівноваги маятника ($\varphi_1 = 0, \dot{\varphi}_1 = 0, \varphi_2 = 0, \dot{\varphi}_2 = 0$) система (2) є одночасно і системою рівнянь збуреного руху. Подамо її у вигляді

$$x' = f(x), \qquad f \in C^1(R^4, R^4), \qquad x(t_0) = x_0, \qquad (') = \frac{d}{d\tau}. \tag{3}$$

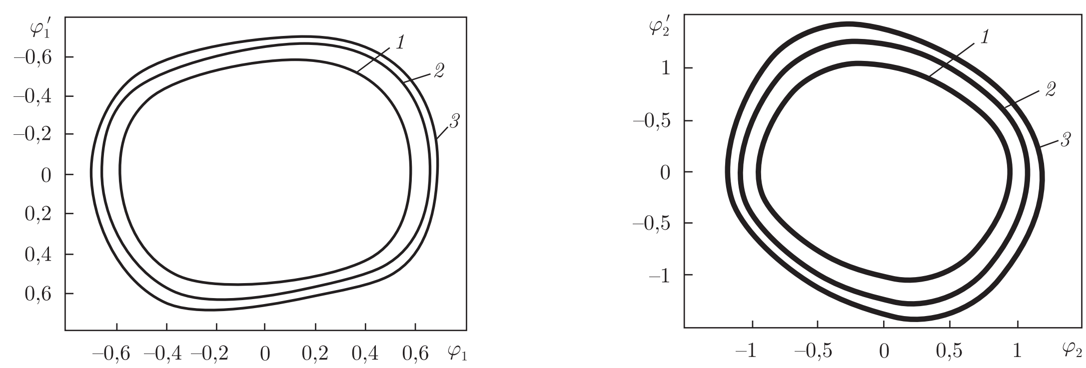
Нехай $D(s, 4-s)$ — область площини параметрів $\overline{c}$ та $\overline{P}$, в якій s коренів відповідного характеристичного рівняння мають від'ємні дійсні частини, $4-s$ — додатні. На ній границя області асимптотичної стійкості $D(4,0)$ має стійку та нестійку ділянки [6]. Візьмемо $m_1 = 10$ кг, $m_2 = 5$ кг, $l_1 = l_2 = 0{,}5$ м, $c_1 = c_2 = 400$ Н $\cdot$ м, $\mu_1 = \mu_2 = 10$ Н $\cdot$ м $\cdot$ с, $c = 500$ Н/м, параметр P варіюємо. Числові експерименти з великою кількістю варіантів значень параметрів маятника і початкових умов дають підставу стверджувати, що у фазовому просторі зі зміною модуля слідкуючої сили $\vec{P}$ відбувається зміна топологічної структури, пов'язана з біфуркаціями народження або злиття стійкого та нестійкого граничних циклів. Теоретичні обгрунтування цих якісних перетворень динамічної системи (3) випливають з робіт [10, 11].

При невеликих значеннях модуля слідкуючої сили $\vec{P}$ областю притягування нульового розв'язку $x = 0$ динамічної системи (3) є весь фазовий простір. З досягненням параметром P значення $P_* = P_*(c, k, a, a_1, a_2)$ відбувається біфуркація народження "з нічого" [11] двох граничних циклів: стійкого ($L+$) та нестійкого ($L-$), які при подальшому зростанні модуля сили переміщуються з різними швидкостями в протилежних напрямах: стійкий ($L+$) розпускається, нестійкий ($L-$) сплющується до початку координат $O(0,0,0,0)$ фазового простору R^4. При $P = P_1(c)$ він зливається з точкою O, руйнуючи її стійкість як особливої точки динамічної системи (3). При зменшенні значень P граничні цикли ($L-$) і ($L+$) рухаються назустріч один одному. При $P = P_*$ вони анігілюють. Рис. 2 ($k = 0{,}5$; $\overline{a} = a_1 = a_2 = 1$) ілюструє еволюцію граничних циклів ($L+$), причому криві *1–4* відповідають значенням $P = 1250$ Н, 1350 Н, 1550 Н, 1750 Н. Дещо іншу конфігурацію мають граничні цикли, зображені на рис. 3 ($k = 1$; $\overline{a} = 2$; $a_1 = a_2 = 1$), причому криві *1–3* відповідають значенням $P = 1720$ Н, 1800 Н, 1900 Н.



а *б*

Рис. 2



а *б*

Рис. 3

Стійкий граничний цикл ($L+$) отримали комп'ютерним моделюванням динамічної системи (3), виходячи безпосередньо з його означення, тобто як граничної множини точок фазового простору, що притягують з плином часу фазові траєкторії маятника.

1. *Меркин Д. Р.* Введение в теорию устойчивости движения. – Москва: Наука, 1971. – 321 с.
2. *Pflüger A.* Stabilitätsprobleme der elastotatic. – Berlin; Göttingen; Heidelberg: Springer, 1950. – 339 s.
3. *Ziegler H.* Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik // Ingenieur-Archiv. – 1952. – **20**, No 1. – S. 49–56.
4. *Циглер Г.* Об устойчивости упругих систем // Пробл. механики. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1959. – Вып. 2. – С. 116–160.
5. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – Москва: Физматгиз, 1961. – 340 с.
6. *Борук И. Г., Лобас В. Л.* Эволюции предельных циклов в области устойчивости двойного маятника при изменении следящей силы // Прикл. механика. – 2004. – **40**, № 3. – С. 121–129.
7. *Василенко М. В., Алексійчук О. М.* Теорія коливань і стійкості руху. – Київ: Вища шк., 2004. – 528 с.
8. *Лобас В. Л.* Влияние нелинейных характеристик упругих элементов на бифуркации состояний равновесия двойного маятника со следящей силой // Прикл. механика. – 2005. – **41**, № 2. – С. 103–109.
9. *Лобас Л. Г.* Об уравнениях опрокинутого маятника с произвольным числом звеньев под воздействием асимметричной следящей силы // Там же. – 2007. – **43**, № 5. – С. 106–114.
10. *Баутин Н. Н.* Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. – Москва: Наука, 1984. – 176 с.
11. *Арнольд В. И.* Теория катастроф // Итоги науки и техники: Сер. "Современные проблемы математики". Фундаментальные направления. Т. 5. – Москва: ВИНИТИ, 1985. – С. 219–277.

Державний економіко-технологічний університет транспорту, Київ

Надійшло до редакції 21.04.2008