Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

12 • 2008

МАТЕМАТИКА

УДК 519.21

М. С. Братійчук

Залишковий час обслуговування в системі $GI/G/1/\infty$

(Представлено академіком НАН України В. С. Королюком)

For a $GI/G/1/\infty$-type queueing system, the remaining service time at time t is under consideration. Its distribution as $t \to \infty$ is considered as well.

Розглядається стандартна система обслуговування типу $GI/G/1/\infty$, яка описується за допомогою послідовностей $\{\alpha_n^{(i)}\}$, $n \geqslant 1$, $i = 1, 2$, випадкових величин, де $\alpha_n^{(1)}$ — проміжок часу між надходженням $n-1$-ї та n-ї вимоги, а $\alpha_n^{(2)}$ — час обслуговування n-ї вимоги. Дисципліна обслуговування є типу FIFO — "перший прийшов — перший обслужився".

Нехай $\xi(t)$ — число вимог у системі в момент часу t. Вважаємо, що траєкторії процесу $\xi(t)$ є неперервними справа. Покладемо $T(t) = \inf\{s \geqslant t \colon \xi(s) = \xi(t) - 1\} - t$, якщо $\xi(t) \geqslant 1$, і $T(t) = 0$, якщо $\xi(t) = 0$. Тобто $T(t)$ є залишковий час обслуговування в момент t. Нас цікавить формула для перетворення Лапласа–Стільтьєса функції $\mathbf{P}\{T(t) < x\}$, а також формула для розподілу $T(\infty)$. Якщо вхідний потік вимог є пуассонівським, то можна застосувати метод вкладеного ланцюга Маркова, як це було зроблено в [1] для дослідження подібної задачі. Випадок системи $GI/G/1$ розглядався в [2], де було отримано формулу для середнього залишкового часу обслуговування в момент надходження чергової вимоги при умові, що відома кількість вимог у системі в цей момент. У випадку системи $GI/G/1$ процес $\xi(t)$ не має зручних марковських моментів, і тому для вивчення розподілу функціонала $T(t)$ ми використовуємо метод, який вперше був запропонований В. С. Королюком у [3]. Ми опишемо лише головні ідеї цього методу, а більш детальну інформацію можна знайти в [4].

Введемо такі позначення:

$$F_i(x) = \mathbf{P}\{\alpha_n^{(i)} < x\},$$

$$f_i(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dF_i(x), \qquad \operatorname{Re} s \geqslant 0.$$

Для функції $f(x)$ такої, що $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax)|f(x)|dx < \infty$, ми означимо проектори $I_\pm$ таким чином:

$$I_+\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-sx} f(x)\, dx\right] = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-sx} f(x)\, dx, \qquad I_- = I - I_+, \qquad \operatorname{Re} s = a,$$

де I означає тотожний оператор. Нехай також $m_i = \int\limits_0^{\infty} x dF_i(x) < \infty$.

1. Результати. Має місце тотожність (див., напр., [5])

$$1 - f_1(s) f_2(\lambda - s) = f_+(s, \lambda) f_-(s, \lambda), \qquad \operatorname{Re} s = 0, \tag{1}$$

де функції $f_\pm(s,\lambda)$ є регулярними та обмеженими у напівплощинах $\pm \operatorname{Re} s > 0$ відповідно, не мають там нулів та $f_\pm(\infty, \lambda) = 1$. Розклад [1], який називається факторизаційний, є єдиним, і в [5] можна знайти ряд властивостей функцій $f_\pm(s, \lambda)$. Тут нам буде потрібна лише така: якщо $m_2 - m_1 < 0$ (умова ергодичності для системи), то $f_+(0,0) = 0$ і $f_-(0,0) > 0$.

Теорема 1. *Для* $\operatorname{Re}\lambda > 0$, $\operatorname{Re}\mu \geqslant 0$ *справедлива формула*

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda t} \mathbf{E}\{e^{-\mu T(t)}/\xi(0) = 1\} dt = \frac{1}{\lambda} + \frac{f_+(0,\lambda)}{(\mu - \lambda) f_+(\lambda, \lambda)} \left(\frac{1 - f_2(\mu)}{1 - f_2(\lambda)} - \frac{\mu}{\lambda}\right).$$

Наслідок 1. *Нехай* $m_2/m_1 = \rho < 1$, *тоді*

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{T(t) < x1\} = I\{x \geqslant 0\}(1 - \rho) + \frac{\rho}{m_2} \int\limits_0^x (1 - F_2(y))\, dy. \tag{2}$$

Цей наслідок має просту ймовірнісну інтерпретацію. Якщо вимога надходить до системи, яка перебуває в ергодичному стані, то можливі дві ситуації:

1) з імовірністю $1 - \rho$ вимога застає систему вільною, і тоді $T(\infty) = 0$;

2) з імовірністю ρ вимога застає систему зайнятою, і тоді процес обслуговування, розглянутий на періоді зайнятості, є процесом відновлення, який породжується розподілом $F_2(x)$. Вираз $m_2^{-1} \int_0^x (1 - F_2(y))\, dy$ якраз і є розподілом ергодичного залишкового часу очікування для такого процесу.

2. Доведення результатів. Покладемо $\mu_i(t) = \max\left\{n\colon \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k^{(i)} \leqslant t\right\}$ і означимо процеси $\xi^*(t)$ таким чином: $\xi^*(t) = \xi(0) + \mu_1(t) - \mu_2(t)$, $\xi(0) \geqslant 0$. Відомо, що $\xi(t) = \xi^*(t) - \inf\limits_{0\leqslant u\leqslant t}(\xi^*(u), 0)$.

Нехай ρ_n, $n = 0, 1, \ldots$, $\rho_0 = 0$ позначають послідовні моменти стрибків процесу $\xi^*(t)$, і ми скажемо, що ρ_n, $n \geqslant 1$, має тип "1", якщо ρ_n є моментом стрибка процесу $\mu_1(t)$, і він має тип "2", якщо це є моментом стрибка процесу $\mu_2(t)$.

Нехай подія A_n, $n \geqslant 0$, означає, що момент ρ_n має тип "1". Покладемо $\varkappa_n = 2 - I\{A_n\}$, $\nu(n) = \min\{k > 0\colon \varkappa_n \neq \varkappa_{n+k}\}$, де $I\{A_n\} = 1$ чи 0 відповідно до того відбулась подія A_n чи ні. Означимо процеси $\beta(t) = \rho_{n+\nu(n)} - t$ та $\varkappa(t) = \varkappa_n$, $\rho_n \leqslant t < \rho_{n+\nu(n)}$, $n \geqslant 0$. Нехай

${\xi^*}_n = \xi^*(\rho_n)$, $\beta_n = \beta(\rho_n)$. Процес $(\xi^*(t), \varkappa(t), \beta(t))$ не є марковським, але з його конструкції випливає, що послідовність $(\xi^*_n, \varkappa_n, \beta_n)$, $n \geqslant 0$, є його вкладеним ланцюгом Маркова. Нижченаведені співвідношення задають його перехідні ймовірності:

$$\mathbf{P}\{\xi^*_{n+1} = i+1, \varkappa_{n+1} = 1, \beta_{n+1} \in [z, z+dz)/\xi^*_n = i, \varkappa_n = k, \beta_n = x\} =$$
$$= \begin{cases} -d_z F_1(x-z), & \text{якщо} \quad k=1, \quad x \geqslant z; \\ \ \ d_z F_2(x+z), & \text{якщо} \quad k=2, \end{cases} \tag{3}$$

$$\mathbf{P}\{\xi^*_{n+1} = i-1, \varkappa_{n+1} = 2, \beta_{n+1} \in [z, z+dz)/\xi^*_n = i, \varkappa_n = k, \beta_n = x\} =$$
$$= \begin{cases} \ \ d_z F_1(x+z), & \text{якщо} \quad k=1; \\ -d_z F_2(x-z), & \text{якщо} \quad k=2, x \geqslant z. \end{cases} \tag{4}$$

Введемо подію $A_i(n,x) = \{\xi(0) = n, \varkappa(0) = i, \beta(0) = x\}$, $i = 1, 2$, і для $n \geqslant 0$, $\mu \geqslant 0$, $x > 0$ покладемо

$$\psi_i(n,t,x) = \mathbf{E}\{e^{-\mu T(t)}/A_i(n,x)\}.$$

Неважко зрозуміти, що

$$\psi_1(n,t,x) = e^{-\mu(x-t)}, \qquad \psi_2(n,t,x) = 1 - f(n,t,\mu), \qquad x > t,$$

де

$$f(n,t,\mu) = \mu \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_0^\infty e^{-\mu y} \int\limits_0^t \overline{F}_2(y+t-v)\, dF_2^{k*}(v)\, dy.$$

Для $x \geqslant 0$, $n \geqslant 1$ з формули повної ймовірності та (3), (4) отримуємо

$$\begin{aligned} \psi_1(n,t,x) &= I\{x \leqslant t\}\left(\int\limits_0^x \psi_1(n+1, t-y, x-y)\, dF_1(y) + \right. \\ &\quad \left. + \int\limits_x^\infty \psi_2(n-1, t-x, y-x)\, dF_1(y)\right) + I\{x > t\} e^{-\mu(x-t)}, \\ \psi_2(n,t,x) &= I\{x \leqslant t\}\left(\int\limits_0^x \psi_2(n-1, t-y, x-y)\, dF_2(y) + \right. \\ &\quad \left. + \int\limits_x^t \psi_1(n+1, t-x, y-x)\, dF_2(y) + \int\limits_t^\infty e^{-\mu(y-t)} dF_2(y)\right) + I\{x > t\}(1 - f(n,t,\mu)). \end{aligned} \tag{5}$$

Ці рівняння мають бути ще доповнені такою граничною умовою:

$$\psi_2(0,t,x) = I\{x \leqslant t\}\left(\int\limits_0^{t-x} \psi_1(1, t-x, y)\, dF_2(y) + \int\limits_{t-x}^\infty e^{-\mu(y-t+x)} dF_2(y)\right) + I\{x > t\}. \tag{6}$$

Нехай $\widehat{\psi}_i(n,\lambda,x) = \int\limits_x^\infty e^{-\lambda t}\psi_i(n,t,x)\,dt,\ i=1,2,\ \lambda>0.$

З (6) отримуємо

$$\widehat{\psi}_2(0,\lambda,x) = e^{-\lambda x}\left(\int\limits_0^\infty \widehat{\psi}_1(1,\lambda,y)\,dF_2(y) + \frac{f_2(\lambda)-f_2(\mu)}{\mu-\lambda}\right) = e^{-\lambda x}C.$$

Зауважимо, що

$$C = \widehat{\psi}_2(0,\lambda,+0) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\mathbf{E}\{e^{-\mu T(t)}/\xi(0)=1\}dt = \widehat{\psi}_1(2,\lambda,+0). \tag{7}$$

Зробимо в (5) такі перетворення. Спочатку перейдемо до перетворення Лапласа за t з параметром $\lambda>0$, після чого введемо нові функції

$$V_1(n,x) = e^{\lambda x}\widehat{\psi}_1(n+1,\lambda,x), \qquad V_2(n,x) = \widehat{\psi}_2(n+1,\lambda,x) - e^{-\lambda x}C.$$

У результаті цього отримаємо систему інтегральних рівнянь

$$\begin{aligned}
&V_1(n,x) - \int\limits_0^x V_1(n+1,x-y)\,dF_1(y) - \int\limits_x^\infty V_2(n-1,y-x)\,dF_1(y) = \\
&\qquad = \varphi_1(n,x) + C\psi_1(x), \\
&V_2(n,x) - \int\limits_0^x e^{-\lambda y}V_2(n-1,x-y)\,dF_2(y) - \int\limits_x^\infty e^{-\lambda y}V_1(n+1,y-x)\,dF_2(y) = \\
&\qquad = \varphi_2(x) + C\psi_2(x), \qquad n\geqslant 0, \qquad x>0,
\end{aligned} \tag{8}$$

з граничною умовою $V_2(-1,x)=0$. Тут ми позначили

$$\varphi_1(n,x) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}(1-f(n,t,\mu))\overline{F}_1(t+x)\,dt, \qquad \psi_1(x) = \int\limits_x^\infty e^{-\lambda(y-x)}dF_1(y),$$

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{\mu-\lambda}\int\limits_x^\infty e^{-\lambda y}(1-e^{-(\mu-\lambda)(y-x)})\,dF_2(y), \qquad \psi_2(x) = -e^{-\lambda x}\overline{F}_2(x).$$

Система (8) досліджувалась у роботах [3, 4], і в останній з них були отримані формули для загального розв'язку такої системи. Тут ми сформулюємо результат з цієї роботи у випадку системи (8) для функції $V_1(1,x)$, оскільки лише він буде використовуватися далі.

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^\infty e^{-sx}V_1(1,x)\,dx = \int\limits_0^\infty e^{-(s-\lambda)x}\int\limits_x^\infty e^{-\lambda t}\mathbf{E}\{e^{-\mu T(t)}/A_1(2,x)\}dtdx = \\
&\qquad = \frac{1}{f_+(s,\lambda)}I_+\left[\frac{\Phi(s,\lambda)}{f_-(s,\lambda)}\right] + \frac{C}{f_+(s,\lambda)}I_+\left[\frac{\Psi(s,\lambda)}{f_-(s,\lambda)}\right] + \frac{C(f_1(s)-f_1(\lambda))}{(\lambda-s)(1-f_1(s))} + \\
&\qquad\quad + \sum_{k=0}^\infty f_1^k(s)\varphi_+(k+1,s),
\end{aligned} \tag{9}$$

де

$$\Phi(s,\lambda)=\frac{I_+[\varphi_-(s)f_1(s)]}{1-f_1(s)}+\sum_{k=1}^{\infty}f_1^k(s)I_-[\varphi_+(k,s)f_2(\lambda-s)],$$

$$\Psi(s,\lambda)=\frac{I_+[\psi_-(s)f_1(s)]+I_-[\psi_+(s)f_2(\lambda-s)]}{1-f_1(s)}.$$

Тут

$$\varphi_+(n,s)=\int\limits_0^\infty e^{-sx}\varphi_1(n,x)\,dx,\qquad \psi_+(s)=\int\limits_0^\infty e^{-sx}\psi_1(x)\,dx,$$

$$\varphi_-(s)=\int\limits_0^\infty e^{sx}\varphi_2(x)\,dx,\qquad \psi_-(s)=\int\limits_0^\infty e^{sx}\psi_2(x)\,dx.$$

Надалі доведення базується на двох технічних результатах, які ми подамо у вигляді леми.

Лема 1. *Для* $0<\operatorname{Re}s<\lambda$ *маємо*

$$I_+\left[\frac{\Psi(s,\lambda)}{f_-(s,\lambda)}\right]=\frac{1-f_1(\lambda)}{\lambda-s}\left(\frac{f_+(\lambda,\lambda)}{1-f_1(\lambda)}-\frac{f_+(s,\lambda)}{1-f_1(s)}\right),$$

$$I_+\left[\frac{\Phi(s,\lambda)}{f_-(s,\lambda)}\right]=\frac{1}{sf_-(0,\lambda)}\left(\frac{f_2(\lambda)-f_2(\mu)}{\mu-\lambda}-\frac{1-f_2(\lambda)}{\lambda}\right)+$$
$$+\frac{1-f_1(\lambda)}{\lambda(\lambda-s)}\left(\frac{f_+(s,\lambda)}{1-f_1(s)}-\frac{f_+(\lambda,\lambda)}{1-f_1(\lambda)}\right)+f_+(s,\lambda)\sum_{k=1}^{\infty}f_1^k(s)\widehat{\varphi}_+(k+1,s),$$

де

$$\widehat{\varphi}_+(n,s)=\int\limits_0^\infty e^{-sx}\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}f(n,t,\mu)\overline{F}_1(x+t)\,dtdx.$$

Лема 1 та формула (9) дають

$$\int\limits_0^\infty e^{-(s-\lambda)x}\int\limits_x^\infty e^{-\lambda t}\mathbf{E}\{e^{-\mu T(t)}/A_1(2,x)\}dtdx=$$
$$=-\frac{C}{\lambda-s}\left(1-\frac{f_+(\lambda,\lambda)}{f_+(s,\lambda)}\right)+\frac{1-f_1(\lambda)}{\lambda(\lambda-s)f_+(s,\lambda)}\left(\frac{f_+(s,\lambda)}{1-f_1(s)}-\frac{f_+(\lambda,\lambda)}{1-f_1(\lambda)}\right)+$$
$$+\frac{1}{sf_-(0,\lambda)}\left(\frac{f_2(\lambda)-f_2(\mu)}{\mu-\lambda}-\frac{1-f_2(\lambda)}{\lambda}\right)+\frac{1}{\lambda-s}\left(\frac{1-f_1(s)}{s}-\frac{1-f_1(\lambda)}{\lambda}\right).\quad(10)$$

З (7), (10) та тауберової теореми маємо

$$C=\lim_{x\to0+}\widehat{\psi}_1(2,\lambda,x)=\lim_{s\to+\infty}s\int\limits_0^\infty e^{-(s-\lambda)x}\int\limits_x^\infty e^{-\lambda t}\mathbf{E}\{e^{-\mu T(t)}/A_1(2,x)\}dtdx=$$
$$=C(1-f_+(\lambda,\lambda))+\frac{f_+(\lambda,\lambda)}{\lambda}+\frac{1}{f_-(0,\lambda)}\left(\frac{f_2(\lambda)-f_2(\mu)}{\mu-\lambda}-\frac{1-f_2(\lambda)}{\lambda}\right),$$

що дає

$$C = \frac{1}{\lambda} + \frac{f_+(0,\lambda)}{(\mu-\lambda)f_+(\lambda,\lambda)}\left(\frac{1-f_2(\mu)}{1-f_2(\lambda)} - \frac{\mu}{\lambda}\right).$$

Це та (7) завершує доведення теореми 1.

Щоб довести наслідок 1, зауважимо, що в умовах цього наслідку система є ергодичною, а $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{P}\{T(t) < x\}$ існує та не залежить від початкового стану. Маємо

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{f_+(0,\lambda)}{f_+(\lambda,\lambda)} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{f_-(0,\lambda)(1-f_2(\lambda))}{f_-(\lambda,\lambda)(1-f_1(\lambda))} = \frac{m_2}{m_1} = \rho.$$

Це та теорема 1 дають

$$\mathbf{E}e^{-\mu T(\infty)} = \lim_{\lambda\to 0} \lambda \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\mathbf{E}\{e^{-\mu T(t)}/\xi(0)=1\}dt = 1-\rho+\frac{\rho}{m_2}\frac{1-f_2(\mu)}{\mu},$$

звідки випливає (2).

Робота виконана за підтримки Міністерства наукових досліджень та інформаційних технологій Польської Народної Республіки (грант No. 3 T11C 014 26.)

1. *Chydzinski A.* On the remaininig service time upon reaching a given level in $M/G/1$ queue // Queueing Systems. – 2004. – **47**. – P. 71–80.
2. *Fakinos D.* The expected remaining service time in a single-server queue // Oper. Res. – 1982. – **30**. – P. 1014–1018.
3. *Королюк В. С., Пирлиев В.* Случайное блуждание на полуоси на суперпозиции двух процессов восстановления // Укр. мат. журн. – 1984. – **36**, № 4. – С. 433–436.
4. *Bratiychuk M. S., Kempa W.* Application of the superposition of renewal processes to the study of batch arrival queues // Queueing Systems. – 2003. – **44**. – P. 51–67.
5. *Боровков А. А.* Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. – Москва: Наука, 1972. – 368 с.

Шльонський технічний університет, Глівіце, Польща
Надійшло до редакції 13.05.2008