В этом случае найдется $\overline{\eta} > 0$ такое, что

$$U_{rs}(t, X(t)) > \overline{Y}_{rs}(t) \qquad \text{при} \qquad t \in [t^* - \overline{\eta}, t^*).$$

Но это противоречит выбору величины t^*. Следовательно, неравенство (16) выполняется при всех $t \in [t_0, t_0 + \eta)$.

В заключение отметим, что теоремы 1 и 3 являются основными теоремами принципа сравнения для матричной системы (1). Этот принцип позволяет исследовать динамические свойства решений системы (1) на основе матричнозначной функции аналогично тому, как исследуются системы обыкновенных дифференциальных уравнений на основе векторных функций Ляпунова (см. [5]). Эти результаты будут предметом другой работы.

Пользуясь случаем, выражаю благодарность профессору Д. Д. Шильяку за возможность ознакомления с его работой [6], которая побудила автора к проведенным исследованиям.

1. *Martynyuk A. A.* Stability by Liapunov's matrix function method with application. – New York: Marcel Dekker, 1998. – 276 p.
2. *Martynyuk A. A.* Qualitative methods in nonlinear dynamics. Novel approaches to Liapunov's matrix functions. – New York: Marcel Dekker, 2002. – 301 p.
3. *Martynyuk A. A.* Stability of motion: the role of multicomponent Liapunov functions. – London: Cambridge Sci. Publ., 2007. – 322 p.
4. *Shaw M. D.* Generalized stability of motion and matrix Lyapunov functions // J. Math. Anal. and Appl. – 1995. – **189**. – P. 104–114.
5. *Матросов В. М.* Метод векторных функций Ляпунова: Анализ динамических свойств нелинейных систем. – Москва: Физматлит, 2001. – 380 с.
6. *Šiljak D. D.* Dynamic graphs (Manuscript). – Santa Clara University, 2006. – 31 p.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 21.03.2008

УДК 517.95+511.2

Член-кореспондент НАН України **Б. Й. Пташник, І. Р. Тимків**

Багатоточкова задача для параболічного рівняння зі змінними коефіцієнтами

The correctness of a problem with multipoint conditions with respect to the time for the Petrovskii parabolic equation with coefficients depending on the spatial coordinate is investigated. The conditions of existence and uniqueness of the solution of the problem are established. The metrical theorems on the lower bounds of small denominators of the problem are proved.

Багатоточкові задачі для гіперболічних та безтипних диференціальних рівнянь в обмежених областях вивчались багатьма дослідниками (див., напр., [1–4] та наведену там бібліогр.). Встановлено, що такі задачі є умовно коректними, а їх розв'язність у багатьох випадках пов'язана з проблемою малих знаменників. Локальні багатоточкові задачі для деяких класів параболічних рівнянь високого порядку зі сталими коефіцієнтами вивчались в роботах [5, 6], а в роботі [7] досліджувалась нелокальна багатоточкова задача для параболічного рівняння другого порядку з оператором Бесселя.

У даній роботі досліджено коректність задачі з багатоточковими умовами за часовою змінною для параболічного за Петровським рівняння високого порядку зі змінними за просторовими координатами коефіцієнтами в $(p+1)$-вимірному паралелепіпеді. На основі метричного підходу встановлено оцінки знизу малих знаменників, що виникли при побудові розв'язку задачі.

1. В області $Q_p = (0,T) \times \Pi^p$, $\Pi^p = \{x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p \colon 0 < x_r < \pi, r = 1, \ldots, p\}$ розглянемо задачу

$$\frac{\partial^n u(t,x)}{\partial t^n} + \sum_{s_0=0}^{n-1} \sum_{bs_0+2|s|=bn} A_{s_0,s} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{s_0} L_1^{s_1} \ldots L_p^{s_p} u(t,x) = f(t,x), \tag{1}$$

$$u(t_j, x) = \varphi_j(x), \qquad j = 1, \ldots, n, \qquad 0 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leqslant T, \tag{2}$$

$$L_r^m u(t,x)\big|_{x_r=0} = L_r^m u(t,x)\big|_{x_r=\pi} = 0, \qquad m = 0, 1, \ldots, \left(\frac{bn}{2} - 1\right), \qquad r = 1, \ldots, p, \tag{3}$$

де $s = (s_1, \ldots, s_p) \in \mathbb{Z}_+^p$, $|s| = s_1 + \cdots + s_p$, $b \in \mathbb{N}$ — парне число, $A_{s_0,s} \in \mathbb{R}$; $L_r := -\partial/\partial x_r(a_r(x_r)\partial/\partial x_r) + q_r(x_r)$; $a_r \in C^{bn-1}([0,\pi])$, $q_r \in C^{bn-2}([0,\pi])$ — дійснозначні функції, $a_r(x_r) > 0$, $q_r(x_r) \geqslant 0$, $r = 1, \ldots, p$.

Припустимо, що рівняння (1) є рівномірно параболічним за Петровським в області Q_p, тобто що ξ-корені рівняння

$$\xi^n + \sum_{s_0=0}^{n-1} \sum_{bs_0+2|s|=bn} A_{s_0,s} \prod_{r=1}^{p} (a_r(x_r))^{s_r} \eta_r^{2s_r} \xi^{s_0} = 0 \tag{4}$$

для довільного $\eta \in \mathbb{R}^p$ і для довільного $x \in \Pi^p$ задовольняють нерівності

$$\operatorname{Re} \xi_j(x,\eta) \leqslant -\delta \|\eta\|^b, \qquad \delta > 0, \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

Нехай $\{X_{k_r}(x_r), k_r \in \mathbb{N}\}$ і $\Lambda_r = \{\lambda_{k_r}, k_r \in \mathbb{N}\}$, $r = 1, \ldots, p$, — система власних функцій та множина власних значень відповідної задачі

$$L_r X(x_r) = \lambda X(x_r), \qquad X(0) = X(\pi) = 0, \qquad r = 1, \ldots, p. \tag{6}$$

Відомо [8], що власні функції задачі (6) утворюють повну ортогональну в $L_2(0,\pi)$ систему і для всіх $k_r \in \mathbb{N}$ виконуються оцінки

$$\widetilde{C_0} k_r^2 \leqslant \lambda_{k_r} \leqslant \widetilde{C_1} k_r^2, \tag{7}$$

$$|X_{k_r}^{(j)}(x_r)| \leqslant p_j \lambda_{k_r}^{j/2}, \qquad j = 0, 1, \ldots, n, \tag{8}$$

де $\widetilde{C_0}$, $\widetilde{C_1}$, p_j — додатні константи; при цьому система функцій $\{X_k(x) = X_{k_1}(x_1) \ldots X_{k_p}(x_p)$, $k = (k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{N}^p\}$ є повною ортогональною системою в просторі $L_2(\Pi^p)$ (вважатимемо, що вона ортонормована). Далі позначимо: $\Lambda = \{\lambda_k = (\lambda_{k_1}, \ldots, \lambda_{k_p}), k \in \mathbb{N}^p\}$, $|\lambda_k| = \lambda_{k_1} + \cdots + \lambda_{k_p}$; $C^{(q,m)}(\overline{Q_p})$ — банахів простір функцій $v(t,x)$ з нормою

$$\|v(t,x); C^{(q,m)}(\overline{Q_p})\| = \sum_{\substack{0 \leqslant j \leqslant q,\\ 0 \leqslant |s| \leqslant m}} \max_{(t,x) \in \overline{Q_p}} \left| \frac{\partial^{j+|s|} v(t,x)}{\partial t^j \partial x_1^{s_1} \cdots \partial x_p^{s_p}} \right|;$$

$G_{\alpha,\gamma}(\Pi^p) \subset L_2(\Pi^p)$, $\alpha > 0$, $\gamma > 0$, — простір функцій $\varphi(x) = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}^p} \varphi_k X_k(x)$, для яких є скінченною норма

$$\|\varphi(x); G_{\alpha,\gamma}(\Pi^p)\| = \sum_{k\in\mathbb{N}^p} |\varphi_k| \exp(\alpha|\lambda_k|^\gamma);$$

$C^q([0,T]; G_{\alpha,\gamma}(\Pi^p))$ — простір функцій $v(t,x)$, визначених в Q_p, таких, що для кожного $t \in [0,T]$ $\partial^j v(t,x)/\partial t^j \in G_{\alpha,\gamma}(\Pi^p)$ і є неперервною за t в нормі цього простору, $j = 0,1,\ldots,q$,

$$\|v(t,x); C^q([0,T]; G_{\alpha,\gamma}(\Pi^p))\| = \sum_{k\in\mathbb{N}^p} \sum_{j=0}^{q} \max_{0\leqslant t\leqslant T} |v_k^{(j)}(t)| \exp(\alpha|\lambda_k|^\gamma),$$

де $v_k(t) = \int\limits_{\Pi^p} v(t,x) X_k(x)\,dx$, $k \in \mathbb{N}^p$.

2. Розв'язок задачі (1)–(3) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{N}^p} u_k(t) X_k(x). \tag{9}$$

Кожна функція $u_k(t)$ є розв'язком багатоточкової задачі

$$\frac{\partial^n u_k(t)}{\partial t^n} + \sum_{s_0=0}^{n-1} \sum_{bs_0+2|s|=bn} A_{s_0,s} \lambda_{k_1}^{s_1} \cdots \lambda_{k_p}^{s_p} \frac{\partial^{s_0} u_k(t)}{\partial t^{s_0}} = f_k(t), \tag{10}$$

$$u_k(t_j) = \varphi_{jk}, \qquad j = 1,\ldots,n, \tag{11}$$

де $f_k(t) = \int\limits_{\Pi^p} f(t,x) X_k(x)\,dx$, $\varphi_{jk} = \int\limits_{\Pi^p} \varphi_j(x) X_k(x)\,dx$, $j = 1,\ldots,n$.

Розглянемо відповідну до (10), (11) однорідну задачу

$$\frac{\partial^n u_k(t)}{\partial t^n} + \sum_{s_0=0}^{n-1} \sum_{bs_0+2|s|=bn} A_{s_0,s} \lambda_{k_1}^{s_1} \cdots \lambda_{k_p}^{s_p} \frac{\partial^{s_0} u_k(t)}{\partial t^{s_0}} = 0, \tag{12}$$

$$u_k(t_j) = 0, \qquad j = 1,\ldots,n, \tag{13}$$

і зауважимо, що розв'язок задачі (10), (11) можна зобразити у вигляді суми

$$u_k(t) = w_k(t) + v_k(t), \tag{14}$$

де $w_k(t)$ — розв'язок задачі (11), (12), а $v_k(t)$ — розв'язок задачі (10), (13).

Припустимо, що для довільного $\lambda_k \in \Lambda$ всі корені $\mu_j(\lambda_k)$, $j = 1,\ldots,n$, рівняння

$$\mu^n + \sum_{s_0=0}^{n-1} \sum_{bs_0+2|s|=bn} A_{s_0,s} \lambda_{k_1}^{s_1} \cdots \lambda_{k_p}^{s_p} \mu^{s_0} = 0 \tag{15}$$

є різними, і нехай $\operatorname{Re}\mu_l(\lambda_k) \leqslant \operatorname{Re}\mu_r(\lambda_k)$, $l < r$, $l,r = 1,\ldots,n$. Зі структури рівняння (15) на підставі [9, с. 102] випливають оцінки

$$|\mu_j(\lambda_k)| \leqslant 2C_1|\lambda_k|^{b/2}, \qquad j = 1,\ldots,n, \qquad C_1 = \max_{m\in\{1,\ldots,n\}} \Big(\max_{|s|=bm/2} |A_{n-m,s}|\Big)^{1/m}. \tag{16}$$

Розв'язок задачі (11), (12) має вигляд

$$w_k(t) = \sum_{q=1}^{n} c_{kq}(\lambda_k) \exp(\mu_q(\lambda_k)t),$$

де сталі $c_{kq}(\lambda_k) := c_{kq}$, $q = 1, \ldots, n$, визначаються зі системи рівнянь

$$\sum_{q=1}^{n} c_{kq} \exp(\mu_q(\lambda_k)t_j) = \varphi_{jk}, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

визначник якої

$\Delta(\lambda_k) = \det \| \exp(\mu_q(\lambda_k)t_j) \|_{q,j=1}^{n}$.

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (1)–(3) *у просторі* $C^{(n,bn)}(\overline{Q_p})$ *необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова*

$$\forall\, \lambda_k \in \Lambda \qquad \Delta(\lambda_k) \neq 0. \tag{17}$$

Доведення проводиться за схемою доведення теореми 5.3 з [3, гл. 2].

3. Нехай виконується умова (17). Тоді для кожного $\lambda_k \in \Lambda$ існує розв'язок задачі (11), (12), який зображується формулою

$$w_k(t) = \sum_{j,q=1}^{n} \frac{\Delta_{jq}(\lambda_k)}{\Delta(\lambda_k)} \varphi_{jk} \exp(\mu_q(\lambda_k)t), \tag{18}$$

де $\Delta_{jq}(\lambda_k)$ — алгебраїчне доповнення елемента $\exp(\mu_q(\lambda_k)t_j)$ у визначнику $\Delta(\lambda_k)$, а також у квадраті $K = \{(t,\tau)\colon 0 \leqslant t \leqslant T, 0 \leqslant \tau \leqslant T\}$ існує єдина функція Гріна $G_k(t,\tau)$ задачі (12), (13), за допомогою якої розв'язок задачі (10), (13) визначається формулою

$$v_k(t) = \int_{0}^{T} G_k(t,\tau) f_k(\tau)\, d\tau. \tag{19}$$

У кожній з областей $K_j = \{(t,\tau)\colon 0 \leqslant t \leqslant T, t_j < \tau < t_{j+1}\}$, $j = 0, 1, \ldots, n$, $t_0 = 0$, $t_{n+1} = T$, функція $G_k(t,\tau)$ збігається з функцією

$$G_{kj}(t,\tau) = \frac{\operatorname{sgn}(t-\tau)}{2} \sum_{q=1}^{n} \frac{\exp(\mu_q(\lambda_k)(t-\tau))}{\prod\limits_{r=1, r\neq q}^{n} (\mu_q(\lambda_k) - \mu_r(\lambda_k))} +$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\sum_{l=1}^{j} (-1)^l F_{kl}(t,\tau) - \sum_{l=j+1}^{n} (-1)^l F_{kl}(t,\tau) \right), \qquad j = 0, 1, \ldots, n, \tag{20}$$

де

$$F_{kl}(t,\tau) = \sum_{p,q=1}^{n} \frac{(-1)^p \exp(\mu_q(\lambda_k)(t_l - \tau) + \mu_p(\lambda_k)t)\Delta_{lp}(\lambda_k)}{\Delta(\lambda_k) \prod\limits_{r=1, r\neq q}^{n} (\mu_q(\lambda_k) - \mu_r(\lambda_k))}, \qquad l = 1, \ldots, n. \tag{21}$$

На відрізках прямих $\tau = t_j$, $j = 0, 1, \ldots, n$, доозначуємо функцію $G_k(t, \tau)$ за неперервністю за τ справа, а при $\tau = T$ — за неперервністю зліва.

На основі формул (9), (14), (18), (19) одержуємо формальне зображення розв'язку задачі (1)–(3) у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{N}^p}\left(\sum_{j,q=1}^{n}\frac{\Delta_{jq}(\lambda_k)}{\Delta(\lambda_k)}\varphi_{jk}\exp(\mu_q(\lambda_k)t) + \int_0^T G_k(t,\tau)f_k(\tau)\,d\tau\right)X_k(x). \tag{22}$$

Ряд (22), взагалі, є розбіжним, бо величини $|\Delta(\lambda_k)|$, $|\mu_q(\lambda_k) - \mu_r(\lambda_k)|$, q, $r = 1, \ldots, n$, $q \neq r$, будучи відмінними від нуля, можуть набувати як завгодно малих значень для нескінченного числа векторів $\lambda_k \in \Lambda$. Тому питання про існування розв'язку задачі (1)–(3) пов'язане з проблемою малих знаменників.

Враховуючи структуру рівнянь (4) та (15), а також оцінки (5), знаходимо, що

$$\operatorname{Re}\mu_j(\lambda_k) \leqslant -\delta a_0|\lambda_k|^{b/2}, \qquad j = 1,\ldots,n, \qquad a_0 = \Big(\max_{1\leqslant r\leqslant p}\Big(\max_{0\leqslant x_r\leqslant\pi} a_r(x_r)\Big)\Big)^{-b/2}. \tag{23}$$

Враховуючи (23), отримуємо, що для довільного $\lambda_k \in \Lambda$ справедливі оцінки

$$|\Delta_{jq}(\lambda_k)\exp(\mu_q(\lambda_k)t)| \leqslant C_2\exp(-(n-1)\delta a_0 t_1|\lambda_k|^{b/2}), \qquad j,q = 1,\ldots,n. \tag{24}$$

Теорема 2. *Нехай справджується умова* (17)*, існують додатні сталі M_i, ω_i, $i \in \{1, 2\}$, та $\nu \in \mathbb{R}$ такі, що для всіх (крім скінченної кількості) векторів $\lambda_k \in \Lambda$ виконуються нерівності*

$$\prod_{r=1, r\neq q}^{n}|\mu_q(\lambda_k) - \mu_r(\lambda_k)| > M_1|\lambda_k|^{-\omega_1}, \qquad q = 1,\ldots,n, \tag{25}$$

$$|\Delta(\lambda_k)| > M_2|\lambda_k|^{-\omega_2}\exp(-\nu|\lambda_k|^{b/2}). \tag{26}$$

Якщо $\varphi_j(x) \in G_{\alpha_1,b/2}(\Pi^p)$, $j = 1,\ldots,n$, $f(t,x) \in C([0,T]; G_{\alpha_2,b/2}(\Pi^p))$, $\alpha_1 > \nu - (n-1)\delta a_0 t_1$, $\alpha_2 > \nu + (T - nt_1)\delta a_0$, то в просторі $C^{(n,bn)}(\overline{Q_p})$ існує розв'язок задачі (1)–(3)*, який зображується рядом* (22) *і неперервно залежить від функцій $f(t,x)$ та $\varphi_j(x)$, $j = 1,\ldots,n$.*

Доведення. Із (18)–(21), враховуючи оцінки (24)–(26), отримуємо

$$\max_{t\in[0,T]}|w_k^{(s)}(t)| \leqslant C_3\sum_{j=1}^{n}|\lambda_k|^{bs/2+\omega_2}|\varphi_{jk}|\exp((\nu-(n-1)\delta a_0 t_1)|\lambda_k|^{b/2}), \tag{27}$$

$$\max_{t\in[0,T]}|v_k^{(s)}(t)| \leqslant C_4|\lambda_k|^{bs/2+\omega_1+\omega_2}\exp((\nu+(T-nt_1)\delta a_0)|\lambda_k|^{b/2})\max_{t\in[0,T]}|f_k(t)|, \tag{28}$$

де $s = 0, 1, \ldots, n$. На підставі формули (22), враховуючи оцінки (8), (27), (28) та елементарну нерівність $\theta^\sigma \leqslant C(\sigma)\exp(\rho\theta)$, $C(\sigma) > 0$, яка при $0 < \theta < +\infty$ справедлива для довільних $\sigma \geqslant 0$ і $\rho > 0$, отримуємо таку оцінку для норми розв'язку задачі (1)–(3):

$$\|u(t,x); C^{(n,bn)}(\overline{Q_p})\| \leqslant C_5\|f(t,x); C([0,T]; G_{\alpha_2,b/2}(\Pi^p))\| + C_6\sum_{j=1}^{n}\|\varphi_j(x); G_{\alpha_1,b/2}(\Pi^p)\|,$$

звідки випливає доведення теореми.

За умов теореми 2 розв'язок задачі (1)–(3) належить простору $C^n([0,T];G_{\alpha_3,b/2}(\Pi^p))$, де $\alpha_3 < \min(\alpha_1 - \nu + (n-1)t_1\delta a_0, \alpha_2 - \nu - (T - nt_1)\delta a_0)$.

4. Проаналізуємо можливість виконання нерівностей (25), (26). Нехай $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_h)$ — вектор, складений з усіх коефіцієнтів рівняння (1).

Теорема 3. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^h$) векторів $\vec{y}$ нерівність* (25) *виконується при $\omega_1 > (n-1)(p-2b)/4$ для всіх (крім скінченного числа) векторів $\lambda_k \in \Lambda$.*

Доведення здійснюється за схемою доведення теореми 6 з [1]; при цьому використовуються оцінки (7), (16).

Теорема 4. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$) векторів $\vec{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in [0,T]^n$ і для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^h$) векторів $\vec{y}$ нерівність* (26) *виконується для всіх (крім скінченного числа) векторів $\lambda_k \in \Lambda$ при $\omega_2 > (n^2-1)p/4$, $\nu \geqslant 2nC_1T$.*

Доведення здійснюється за схемою доведення теореми 3 з [4] з використанням оцінок (7), (16).

Результати роботи можна поширити на випадок загальніших, ніж (2), умов

$$\sum_{r=0}^{n-1} d_r \frac{\partial^r u(t_j,x)}{\partial t^r} = \varphi_j(x), \qquad j = 1, \ldots, n, \qquad d_r \in \mathbb{C}.$$

Робота виконана за часткової фінансової підтримки ДФФД України (проект № 14.1/017).

1. *Берник В. И., Пташник Б. И., Салыга Б. О.* Аналог многоточечной задачи для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 1977. – **13**, № 4. – С. 637–645.
2. *Василишин П. Б., Клюс І. С., Пташник Б. Й.* Багатоточкова задача для гіперболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 11. – С. 1468–1476.
3. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.
4. *Пташник Б. Й., Симотюк М. М.* Багатоточкова задача для неізотропних диференціальних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 2. – С. 241–254.
5. *Силюга Л. П.* Багатоточкова задача для параболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2000. – **43**, № 4. – С. 42–48.
6. *Силюга Л. П.* Багатоточкова задача для параболічних за Шиловим диференціальних рівнянь // Міжнар. мат. конф., присв'ячена пам'яті Ганса Гана (Чернівці, 10–15 жовтня 1994 р.): Тези доп. – Чернівці: Рута, 1994. – С. 132.
7. *Лавренчук В. П.* Деякі нелокальні задачі для параболічного рівняння другого порядку з оператором Бесселя // Крайові задачі з різними виродженнями і особливостями. – Чернівці: Рута, 1990. – С. 111–119.
8. *Петровский И. Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. – Москва: Физматгиз, 1961. – 400 с.
9. *Фаддеєв Д. К., Сомінський І. С.* Збірник задач з вищої алгебри. – Київ: Вища шк., 1971. – 316 с.

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Надійшло до редакції 05.05.2008