УДК 539.3

Н. В. Коханенко

Плоская задача о краевых эффектах в композите периодической структуры, армированном прямоугольными волокнами

(Представлено академиком НАН Украины А. Н. Гузем)

The plane problem on the edge effects in a matrix composite of regular structure reinforced by rectangular fibers is considered in the exact statement. Components of a composite are linearly elastic and isotropic bodies. The composite is loaded by the uniaxial uniform load. The criterion of estimate of the zones with edge effects is formulated. On a parameter of the composite structure, the problem of elasticity is formulated, and its solution is obtained by the variation-difference method.

Рассматривается матричный композит, находящийся в состоянии плоской деформации и имеющий периодическую структуру в направлении осей $0x_i$, $x(x_1, x_2)$ — точка на плоскости $x_3 = \mathrm{const}$. Композит армирован прямоугольными волокнами размером $2m_1 \cdot 2m_2$. Компоненты композита — линейно упругие изотропные тела. Армирование композита осуществляется параллельно оси $0x_2$ ($m_2 > m_1$). Величина периода армирования в направлении оси $0x_2$ выбирается такой, что в этом направлении взаимовлиянием армирующих элементов можно пренебречь. Учитывая это, будем рассматривать композит, бесконечный в направлении оси $0x_2$ и имеющий периодическую структуру в направлении оси $0x_1$. На бесконечности композит нагружен равномерной одноосной нагрузкой p_{22}. Учитывая геометрическую и силовую симметрии, приходим к расчетной схеме (рис. 1), где величина l_2 выбирается с учетом того, что краевые эффекты отсутствуют на линии $\{0 \leqslant x_1 \leqslant l_1 \wedge x_2 = l_2\}$, соответствующей половине расстояния между соседними наполнителями. Для выбора величины l_2 проводится вычислительный эксперимент.

Задача о краевых эффектах исследуется в точной постановке [1]. Для возможности ее формулировки требуется выбрать математическую и механическую модели (в рассматриваемом случае это уравнение линейной теории упругости и модель кусочно-однородной среды), а также сформулировать критерий оценки зон краевых эффектов. Для оценки зон краевых эффектов выбирается первый критерий [1], который для рассматриваемой задачи формулируется следующим образом. Для напряжения σ_{ij}^q граница зоны краевого эффекта определяется из соотношения

$$\sigma_{ij}^q = p_{22}(\delta_{2j}\delta_{i2} + 0{,}01\rho), \tag{1}$$

где σ_{ij}^q— возмущенное напряжение в q-й компоненте $q = 1, 2$; $q = 1$ соответствуют наполнителю; ρ — заданная в процентах величина отклонения возмущенного напряжения σ_{ij} от невозмущенного напряжения $\overset{0}{\sigma}_{ij} = \delta_{2j}\delta_{i2}p_{22}$.

Возмущенные напряжения σ_{ij} определяются из задачи упругости, которая формулируется следующим образом. Отыскивается векторная функция $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, удовлетворяющая следующим соотношениям:

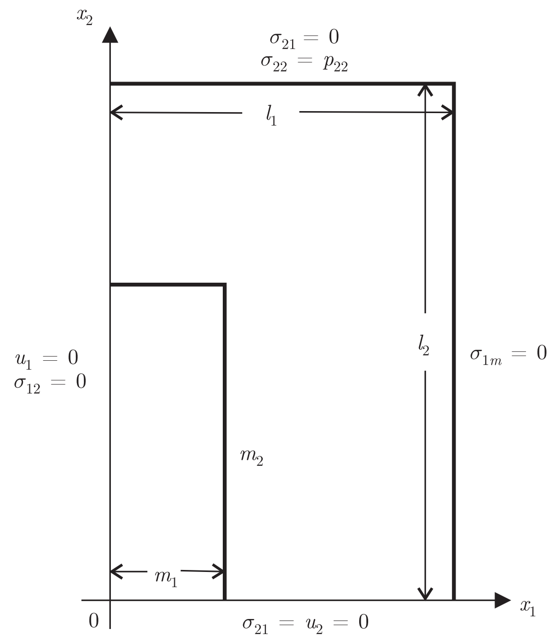

Рис. 1

уравнениям равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{im}}{\partial x_i} = 0; \tag{2}$$

граничным условиям

$$\begin{aligned}
&u_1 = 0 \wedge \sigma_{12} = 0, \qquad x_1 = 0 \wedge x_2 \leqslant l_2,\\
&\sigma_{12} = 0 \wedge u_2 = 0, \qquad 0 \leqslant x_1 \leqslant l_1 \wedge x_2 = 0,\\
&\sigma_{1m} = 0, \qquad x_1 = l_1 \wedge 0 \leqslant x_2 \leqslant l_2,\\
&\sigma_{21} = 0 \wedge \sigma_{22} = p_{22}, \qquad 0 \leqslant x_1 \leqslant l_1 \wedge x_2 = l_2;
\end{aligned} \tag{3}$$

условиям идеального контакта

$$[u_m] = 0 \wedge [\sigma_{im}] = 0, \qquad x_i = m_i \wedge 0 \leqslant x_{3-i} \leqslant m_{3-i}. \tag{4}$$

Закон Гука описывается соотношениями

$$\begin{aligned}
&\sigma_{ii} = A_{ik}\varepsilon_{kk}, \qquad \sigma_{12} = 2G\varepsilon_{12}; \qquad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right);\\
&A_{ii} = \frac{E(1-\nu)}{(1+v)(1-2v)}; \qquad A_{ij} = \frac{Ev}{(1+v)(1-2v)}, \qquad i \neq j.
\end{aligned} \tag{5}$$

Для приближенного решения задачи (1)–(5) применен сеточный подход. Из решения задачи (2)–(5) определяются напряжения σ_{ij}, после чего из (1) определяется, для заданного значения ρ, геометрия зон и исследуются напряжения в пределах зон.

Пример расчета. Рассматривается композит со следующими характеристиками: наполнитель ($q = 1$) $E = 104$; $\nu = 0{,}3$; $G = 40$; матрица ($q = 2$) $E = 27$; $v = 0{,}35$; $G = 10$; $m_1 = 0{,}2$, $m_2 = 0{,}5$, $l_1 = 0{,}4$, $l_2 = 1$; $p_{22} = 1$; $\rho = 5$.

Величины, имеющие размерность напряжения, вычисляются в ГПа, линейные размеры нормированы величиной l_2.

В результате расчетов установлено: вершиной зоны для всех напряжений является угловая точка $x(m_1, m_2)$. Для напряжения краевые эффекты имеют место во всем теле наполнителя и в левой верхней части матрицы (до значения $l_2 \approx 0{,}75$). Справа от наполнителя краевой эффект наблюдается лишь в непосредственной окрестности вершины зоны. Коэффициент концентрации. На границе зоны (середина расстояния между двумя соседними компонентами), что указывает на отсутствие взаимовлияния напряжения между компонентами наполнителя. Для напряжения локальные эффекты также концентрируются, в основном, в теле наполнителя. Коэффициент концентрации $k_{11} = 0{,}9$, а на границе зоны $\max\sigma_{11} = 0{,}0273$, что также указывает на отсутствие взаимовлияния армирующих компонент композита. Для напряжения σ_{12} коэффициент концентрации напряжения $k_{12} = 0{,}301$ и $\max\sigma_{12} = 0{,}0025$ при $x_1 = l_1 \wedge 0 \leqslant x_2 \leqslant l_2$.

Из приведенного анализа результатов расчетов следует, что для рассмотренного варианта расчетов взаимодействие армирующих компонент отсутствует.

1. *Механика* композитов: В 12 т. / Под общ. ред. А. Н. Гузя. Т. 1. Статика материалов / Под ред. В. Т. Головчана. – Киев: Наук. думка, 1993. – 455 с.

НТУ Украины "Киевский политехнический институт"
Поступило в редакцию 06.06.2007

УДК 532.528

Академик НАН Украины **В. Д. Кубенко**

Осесимметричная задача нестационарного вдавливания затупленного жесткого тела в поверхность упругого слоя

Nonstationary indentation is studied for a blunted rigid body affecting the elastic layer. The general formulation of the problem includes different boundary conditions on the free surface and the contact region of the layer. A simplified nonmixed problem that is valid during early times and can serve as a rateable one for the later period is solved exactly. The solution is compared with the plane case.

Современное состояние исследований в области нестационарного контактного взаимодействия и контактной задачи теории упругости освещено, в частности, в работах [4, 6, 9]. В общем случае современная задача удара тела об упругую среду или элемент конструкции формулируется как нестационарная смешанная начально-краевая задача теории упругости с неизвестной изменяющейся во времени границей, причем последняя определяется в ходе