

Пример расчета. Рассматривается композит со следующими характеристиками: наполнитель ($q = 1$) $E = 104$; $\nu = 0,3$; $G = 40$; матрица ($q = 2$) $E = 27$; $\nu = 0,35$; $G = 10$; $m_1 = 0,2$, $m_2 = 0,5$, $l_1 = 0,4$, $l_2 = 1$; $p_{22} = 1$; $\rho = 5$.

Величины, имеющие размерность напряжения, вычисляются в ГПа, линейные размеры нормированы величиной l_2 .

В результате расчетов установлено: вершиной зоны для всех напряжений является угловая точка $x(m_1, m_2)$. Для напряжения краевые эффекты имеют место во всем теле наполнителя и в левой верхней части матрицы (до значения $l_2 \approx 0,75$). Справа от наполнителя краевой эффект наблюдается лишь в непосредственной окрестности вершины зоны. Коэффициент концентрации. На границе зоны (середина расстояния между двумя соседними компонентами), что указывает на отсутствие взаимовлияния напряжения между компонентами наполнителя. Для напряжения локальные эффекты также концентрируются, в основном, в теле наполнителя. Коэффициент концентрации $k_{11} = 0,9$, а на границе зоны $\max \sigma_{11} = 0,0273$, что также указывает на отсутствие взаимовлияния армирующих компонент композита. Для напряжения σ_{12} коэффициент концентрации напряжения $k_{12} = 0,301$ и $\max \sigma_{12} = 0,0025$ при $x_1 = l_1 \wedge 0 \leq x_2 \leq l_2$.

Из приведенного анализа результатов расчетов следует, что для рассмотренного варианта расчетов взаимодействие армирующих компонент отсутствует.

1. *Механика композитов*: В 12 т. / Под общ. ред. А.Н. Гузя. Т. 1. Статика материалов / Под ред. В.Т. Головчана. – Киев: Наук. думка, 1993. – 455 с.

НТУ Украины “Киевский политехнический институт”

Поступило в редакцию 06.06.2007

УДК 532.528

© 2008

Академик НАН Украины В. Д. Кубенко

Осесимметричная задача нестационарного вдавливания затупленного жесткого тела в поверхность упругого слоя

Nonstationary indentation is studied for a blunted rigid body affecting the elastic layer. The general formulation of the problem includes different boundary conditions on the free surface and the contact region of the layer. A simplified nonmixed problem that is valid during early times and can serve as a rateable one for the later period is solved exactly. The solution is compared with the plane case.

Современное состояние исследований в области нестационарного контактного взаимодействия и контактной задачи теории упругости освещено, в частности, в работах [4, 6, 9]. В общем случае современная задача удара тела об упругую среду или элемент конструкции формулируется как нестационарная смешанная начально-краевая задача теории упругости с неизвестной изменяющейся во времени границей, причем последняя определяется в ходе

решения задачи. Постановка задачи включает уравнения упругого деформирования ударяемого тела; уравнение движения ударника; соотношение, представляющее силу ударного взаимодействия ударника и упругого тела как функцию неизвестной области контакта; уравнение, связывающее величину области контакта с перемещением (прониканием) ударника; соответствующие граничные и начальные условия. В общем случае задача является связанной с нечетким заданием входных параметров, что предопределяет известные трудности ее решения.

Отметим следующее обстоятельство физического характера, которое оказывает непосредственное влияние на способы получения решения задачи удара тела об упругую среду. При соударении область контакта тел движется по их поверхностям с переменной скоростью, зависящей от формы тел и скорости сближения. Если рассматривать затупленные тела, скорость движения границы области контакта на начальном отрезке времени может быть очень высокой (по крайней мере, выше скорости распространения упругих волн в теле — “сверхзвуковой”). В течение этого отрезка волновые возмущения в упругом теле не взаимодействуют с его свободной поверхностью и, следовательно, можно произвольным образом распорядиться граничными условиями на ней. Это позволяет по крайней мере для раннего этапа взаимодействия сформулировать соответствующую несмешанную краевую задачу и тем самым упростить процедуру получения ее решения. С течением времени по причинам, обусловленным геометрией тел, а также вследствие замедления движения ударника, скорость движения границы области контакта снижается до трансзвуковой и далее становится дозвуковой, что приводит к выходу волновых возмущений на поверхность тела вне области контакта и взаимодействию с ней. Однако, как показывает ряд исследований, для получения оценочных результатов в ряде случаев достаточно решения упомянутой “сверхзвуковой” задачи. При таком подходе в работе [7] получено решение плоской задачи о нестационарном вдавливании гладкого затупленного тела в слой упругого материала. Указанное решение демонстрирует характер и особенности волновых процессов в слое с учетом многократных отражений упругих волн от его границ.

В данной работе представлено решение осесимметричной задачи об ударе жестким телом о поверхность упругого слоя с целью исследовать влияние многократных отражений волн на деформирование слоя с учетом распространения волновых возмущений как в поперечном, так и в продольном направлениях. Предполагается, что ударяющее тело является осесимметричным, его ось совпадает с направлением движения и является перпендикулярной граничной поверхности слоя. Предполагается также, что скорость проникания жесткого тела задана, т. е. в рамках данной публикации фактически рассматривается задача нестационарного вдавливания индентора в слой.

1. Рассматривается вертикальный удар о поверхность упругого полупространства затупленным абсолютно твердым телом (штампом), контур лобовой части которого задан поверхностью вращения, описываемой гладкой функцией. Скорость внедрения штампа в среду является величиной, значительно меньшей скорости упругих волн в ней. Трение на поверхности взаимодействия тела и среды (называемой областью контакта) отсутствует. Геометрия задачи обладает осевой симметрией, поэтому цилиндрическая система координат Orz , в которой будет вестись исследование, выбирается таким образом, что ось Oz направлена в глубь среды, ось Or — по поверхности полупространства. Начало введенной системы координат — точка O — совпадает с точкой первоначального контакта тела со средой (рис. 1).

Поверхность штампа задается функцией $z = f(r)$. Физические свойства материала полупространства будем задавать при помощи упругих постоянных — модуля всестороннего

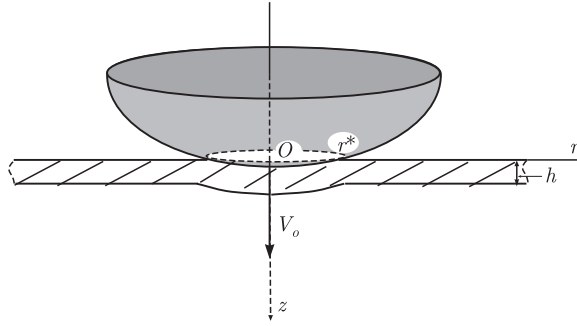


Рис. 1

сжатия K и модуля сдвига μ — и плотности γ . Упругой среде с постоянными K , μ , γ будем также ставить в соответствие акустическую среду с теми же параметрами K , ρ и $\mu = 0$. Через c_0 обозначим скорость звука в акустической среде. Таким образом, скорости распространения волн определяются формулами

$$c_p = \left(\frac{K + 4/3\mu}{\gamma} \right)^{1/2}; \quad c_s = \left(\frac{\mu}{\gamma} \right)^{1/2}; \quad c_0 = \left(\frac{K}{\gamma} \right)^{1/2}.$$

Введем безразмерные переменные и обозначения:

$$\begin{aligned} \bar{r} = \frac{r}{R}, \quad \bar{z} = \frac{z}{R}, \quad \bar{u}_i = \frac{u_i}{R}, \quad \bar{M} = \frac{M}{\rho R^3}, \quad \bar{P} = \frac{P}{KR}, \quad \bar{t} = \frac{c_0 t}{R}, \quad \bar{V}_0 = \frac{V_0}{c_0}, \\ \bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{K} \quad (i, j = r, z), \quad \beta = \frac{c_s}{c_0}, \quad \alpha = \frac{c_p}{c_0}; \quad b = \frac{\beta}{\alpha}, \quad \bar{V}_0 = \frac{V_0}{c_0}, \quad \bar{w}_0 = \frac{w_0}{R}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь R — характерный линейный размер штампа; V_0 , w_0 — скорость движения и перемещение штампа; M — его масса; $P(t)$ — сила реакции упругого полупространства; u_i — проекции вектора упругих перемещений; σ_{ij} — компоненты тензора напряжений. Ниже (если не будет оговорено иное) будут использоваться только безразмерные обозначения, поэтому черту над ними опускаем.

Движение упругой среды в осесимметричном случае описывается двумя скалярными волновыми потенциалами Φ и Ψ , удовлетворяющими уравнениям [5]

$$\Delta \Phi = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}; \quad \Delta \Psi = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}; \quad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (2)$$

Физические величины (перемещения, напряжения) выражаются через потенциалы Φ и Ψ следующим образом:

$$\begin{aligned} u_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial z}; \quad u_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r}; \\ \sigma_{zz} = \left(1 - 2\frac{\beta^2}{\alpha^2} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + 2\beta^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^3 \Psi}{\partial r^2 \partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial z} \right); \\ \sigma_{rr} = (1 - 2b^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + 2\beta^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{\partial^3 \Psi}{\partial r^2 \partial z} \right); \quad \sigma_{rz} = 2\beta^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{1}{2\beta^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Затупленность лобовой поверхности штампа и малые глубины проникания в среду позволяют формулировать граничные условия на невозмущенной поверхности полупространства — при $z = 0$. Поверхность штампа в системе координат Oxz в момент времени t описывается функцией

$$z = w_b(t) - f(r), \quad w_b(t) = \int_0^t V_b(\tau) d\tau, \quad f(0) = 0. \quad (4)$$

Здесь $w_b(t)$ — перемещение штампа, отсчет которого производится от поверхности $z = 0$. Радиус области контакта $r^*(t)$ в точной линейной постановке определяется из кинематического условия

$$w_b(t) - f(r) - u_z(t, r, 0) = \begin{cases} 0, & 0 \leq r < r^*(t), \\ < 0, & r > r^*(t). \end{cases} \quad (5)$$

Предполагаем, что в процессе удара область контакта остается односвязной, что обеспечивается условием, согласно которому нормальные к площадке контакта напряжения являются сжимающими:

$$\sigma_{zz}|_{z=0} > 0, \quad 0 \leq r < r^*(t). \quad (6)$$

Граничные условия при отсутствии трения состоят в равенстве нормального перемещения среды и перемещения тела в области контакта, отсутствии нормального напряжения на свободной поверхности среды и нулевом касательном напряжении всюду в плоскости $z = 0$. На тыльной поверхности слоя примем аналогичные условия (равенство нулю нормального перемещения и касательного напряжения), т. е.

$$u_z|_{z=0} = \int_0^t V_b(t) dt, \quad 0 \leq r < r^*(t), \quad (7)$$

$$u_z|_{z=0} = 0, \quad r > r^*(t),$$

$$\sigma_{zr}|_{z=0} = u_z|_{z=h} = \sigma_{zr}|_{z=h} = 0, \quad r \geq 0.$$

Первое условие выписанных соотношений можно, продифференцировав по времени, записать в удобной для последующего использования форме

$$\frac{\partial u_z}{\partial t}|_{z=0} = V_b(t, r), \quad 0 \leq r < r^*(t). \quad (8)$$

Начальные условия для потенциалов Φ и Ψ являются нулевыми

$$\Phi|_{t=0} = \frac{\partial \Phi}{\partial t}|_{t=0} = 0; \quad \Psi|_{t=0} = \frac{\partial \Psi}{\partial t}|_{t=0} = 0. \quad (9)$$

Условия затухания на бесконечности

$$\Phi \rightarrow 0, \quad \Psi \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad (r^2 + z^2)^{1/2} \rightarrow \infty. \quad (10)$$

Сила реакции упругого полупространства вычисляется по формуле

$$P(t) = -2 \int_0^{r^*(t)} \sigma_{zz}(t, r, 0) r dr. \quad (11)$$

Для задачи удара штампа массы M с начальной скоростью V_0 скорость движения штампа определяется из уравнения

$$M \frac{dV_b}{dt} = -P(t), \quad V_b(+0) = V_0. \quad (12)$$

При ударном взаимодействии затупленных тел с поверхностью упругого полупространства скорость перемещения границы области контакта на раннем этапе взаимодействия превосходит скорость движения упругих волн, т. е. имеет место так называемый сверхсейсмический (сверхзвуковой) этап

$$0 \leq t \leq t_*, \quad \dot{r}^*(t) \geq \alpha, \quad \dot{r}^*(t_*) = \alpha.$$

Здесь t_* обозначает момент времени, когда скорость движения границы области контакта становится транзвуковой.

2. Соотношения (2)–(12) составляют формулировку смешанной нестационарной краевой задачи об ударе жесткого тупого тела о поверхность упругого слоя с неизвестной изменяющейся во времени областью контакта. Решение этой задачи для плоского случая получено в [8], для осесимметричного будет рассмотрено отдельно. Здесь рассмотрим следующий упрощенный подход к формулировке и решению задачи удара. Оставаясь в пределах линейной формулировки граничных условий (т. е. формулируя их на невозмущенной поверхности упругой среды), будем искать решение волновых уравнений (2) при следующих граничных условиях на лицевой поверхности слоя:

$$\begin{aligned} u_z|_{z=0} &= w_b(t), & 0 \leq r < r^*(t), \\ u_z|_{z=0} &= 0, & r > r^*(t), \\ \sigma_{zr}|_{z=0} &= 0, & r \geq 0. \end{aligned}$$

Их отличие от общих условий (7) в том, что на лицевой поверхности слоя вне области контакта, т. е. при $r > r^*(t)$, как и в области контакта, задано значение перемещения (или, если продифференцировать по времени — нормальной скорости). При такой формулировке граничная задача уже не является смешанной и может быть решена более простыми методами. Кроме того, в рамках этого пункта будем полагать, что скорость проникания тела в среду $V_b(t)$ является заданной функцией, т. е. имеет место случай так называемого нестационарного вдавливания. Таким образом, формулируется следующая начально-краевая задача для волновых уравнений (2):

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u_z}{\partial t} \right|_{z=0} &= H(r^*(t) - r) V_b(r, t), & r \geq 0, \\ \sigma_{zr}|_{z=0} &= u_z|_{z=h} = \sigma_{zr}|_{z=h} = 0, & r \geq 0, \\ \Phi|_{t=0} &= \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{t=0} = 0; & \Psi|_{t=0} = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Напомним, что принятая формулировка в строгом смысле имеет место в случае очень тупых тел и соответствует так называемому сверхзвуковому этапу проникания, в течение которого возмущения в упругой среде не выходят за пределы области контакта, так как ее граница движется со скоростью, превышающей скорость распространения упругих волн. Как показывают выполненные численные расчеты, в ряде случаев решение такой “сверхзвуковой” задачи позволяет получить приемлемые оценочные результаты и для более сложной смешанной задачи, в которой возмущения в среде выходят за пределы области контакта.

Решение задачи (2), (13) получим при помощи интегральных преобразований. Используем интегральное преобразование Лапласа по времени t с параметром s [2] и преобразование Бесселя (Ханкеля) порядка 0 по r с параметром ξ [3]. В частности,

$$f^L(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt; \quad f(t) = L^{-1}\{f^L(s)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} e^{ts} f^L(p) dp; \quad (14)$$

$$f^B(\xi) = B\{f(r)\} = \int_0^{\infty} f(r) r J_0(r\xi) d\xi; \quad f(r) = B^{-1}\{f^B(\xi)\} = \int_0^{\infty} f^B(\xi) \xi J_0(r\xi) d\xi,$$

где L и B — соответственно операторы интегральных преобразований Лапласа и Бесселя; L^{-1} , B^{-1} — операторы обращения (абсцисса оси интегрирования δ в операторе L^{-1} находится справа от полюсов подынтегральной функции в комплексной плоскости); J_0 — цилиндрическая функция Бесселя нулевого индекса [1]. В пространстве изображений по Лапласу и Бесселю получим следующую граничную задачу (в которой начальные условия и необходимые граничные условия при $r \rightarrow \infty$ уже реализованы):

$$\frac{\partial^2 \Phi^{LB}}{\partial z^2} - \left(\frac{s^2}{\alpha^2} + \xi^2 \right) \Phi^{LB} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Psi^{LB}}{\partial z^2} - \left(\frac{s^2}{\beta^2} + \xi^2 \right) \Psi^{LB} = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi^{LB}}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Psi^{LB}}{\partial z^2} - \frac{s^2}{\beta^2} \Psi^{LB} = \begin{cases} \frac{1}{s} f^{LB}(s, \xi), & z = 0 \\ 0, & z = h \end{cases}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial \Phi^{LB}}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Psi^{LB}}{\partial z^2} - \frac{s^2}{2\beta^2} \Psi^{LB} = 0, \quad z = 0, \quad z = h.$$

Здесь функция $f^{LB}(s, \xi)$ есть изображение функции $V_b(r, t)H(t - r^*(t))$.

Общее решение волновых уравнений имеет вид

$$\Phi^{LB} = A e^{-\frac{z}{\alpha} \sqrt{s^2 + \alpha^2 \xi^2}} + \tilde{A} e^{\frac{z}{\alpha} \sqrt{s^2 + \alpha^2 \xi^2}}; \quad \Psi^{LB} = B e^{-\frac{z}{\beta} \sqrt{s^2 + \beta^2 \xi^2}} + \tilde{B} e^{\frac{z}{\beta} \sqrt{s^2 + \beta^2 \xi^2}}. \quad (16)$$

Определяя произвольные постоянные из граничных условий, будем иметь выражение для изображения нормального напряжения

$$\sigma_{zz}^{LB}(s, \xi, z) = -\alpha f^{LB}(s, \xi) \left[\frac{(s^2 + 2\beta^2 \xi^2)^2}{s^3 \sqrt{s^2 + \alpha^2 \xi^2}} \left(\sum_{m=0}^{\infty} e^{-(2mh+z)P} + \sum_{m=0}^{\infty} e^{-[2(m+1)h-z]P} \right) - \right. \\ \left. - \frac{4\beta^3 \xi^2 \sqrt{s^2 + \beta^2 \xi^2}}{\alpha s^3} \left(\sum_{m=0}^{\infty} e^{-(2mh+z)S} + \sum_{m=0}^{\infty} e^{-[2(m+1)h-z]S} \right) \right]. \quad (17)$$

Таким образом, задача теперь состоит в обращении выражения (17) относительно интегральных преобразований.

3. В рамках данной работы ограничимся определением искомого напряжения вдоль оси z . Для дальнейших вычислений необходимо конкретизировать функцию $V_0(t, x)$. Примем, что лобовая поверхность индентора в плоскости Ozr является параболической, а скорость вдавливания — постоянной и равной некоторому значению V_0 . Тогда, как нетрудно убедиться, функция $f(t, r)$ и ее изображение будут иметь вид

$$f(t, r) = V_0 H(kt - r^2); \quad f^{LB}(s, \xi) = V_0 \frac{k}{2s^2} e^{-\xi^2 \frac{k}{4s}}; \quad k = 2V_0. \quad (18)$$

Из (17) и (18) получим выражение для изображения нормального напряжения:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^{LB}(s, \xi, z) = & -\alpha V_0 \frac{1}{2} \frac{k}{s^2} e^{-\xi^2 \frac{k}{4s}} \times \\ & \times \left[\frac{(s^2 + 2\beta^2 \xi^2)^2}{s^3 \sqrt{s^2 + \alpha^2 \xi^2}} \left(\sum_{m=0}^{\infty} e^{-(2mh+z)P} + \sum_{m=0}^{\infty} e^{-[2(m+1)h-z]P} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{4\beta^3 \xi^2 \sqrt{s^2 + \beta^2 \xi^2}}{\alpha s^3} \left(\sum_{m=0}^{\infty} e^{-(2mh+z)S} + \sum_{m=0}^{\infty} e^{-[2(m+1)h-z]S} \right) \right]. \quad (19) \end{aligned}$$

Инверсия преобразования Бесселя на оси z (т.е. при $r = 0$) имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma^L|_{r=0} = & -\alpha \frac{V_0}{2} \frac{k}{s^2} \int_0^{\infty} \left[\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(s^2 + 2\beta^2 \xi^2)^2}{s^3 \sqrt{s^2 + \alpha^2 \xi^2}} e^{-\xi^2 \frac{k}{4s} - (2mh+z)P} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(s^2 + 2\beta^2 \xi^2)^2}{s^3 \sqrt{s^2 + \alpha^2 \xi^2}} \right. \right. \\ & \times e^{-\xi^2 \frac{k}{4s} - [2(m+1)h-z]P} \left. \right) - \frac{4\beta^3}{\alpha} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\xi^2 \sqrt{s^2 + \beta^2 \xi^2}}{s^3} e^{-\xi^2 \frac{k}{4s} - (2mh+z)S} + \right. \\ & \left. \left. + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\xi^2 \sqrt{s^2 + \beta^2 \xi^2}}{s^3} e^{-\xi^2 \frac{k}{4s} - [2(m+1)h-z]S} \right) \right] \xi d\xi. \end{aligned}$$

Сделаем следующую замену переменного в подынтегральном выражении, временно предполагая s вещественным положительным [10, 11]:

$$s\eta = \xi, \quad d\xi = s d\eta. \quad (20)$$

Получим

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^L|_{r=0} = & -\alpha \frac{kV_0}{2} \int_0^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(1 + 2\beta^2 \eta^2)^2}{\sqrt{1 + \alpha^2 \eta^2}} e^{-s \left(\eta^2 \frac{k}{4} + \frac{2mh+z}{\alpha} \sqrt{1 + \alpha^2 \eta^2} \right)} \eta d\eta - \\ & - \alpha \frac{kV_0}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{(1 + 2\beta^2 \eta^2)^2}{\sqrt{1 + \alpha^2 \eta^2}} e^{-s \left(\eta^2 \frac{k}{4} + \frac{2(m+1)h-z}{\alpha} \sqrt{1 + \alpha^2 \eta^2} \right)} \eta d\eta - \\ & - \frac{4\beta^3}{\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \eta^2 \sqrt{1 + \beta^2 \eta^2} e^{-s \left(\eta^2 \frac{k}{4} + \frac{2mh+z}{\beta} \sqrt{1 + \beta^2 \eta^2} \right)} \eta d\eta - \end{aligned}$$

$$- \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \eta^2 \sqrt{1 + \beta^2 \eta^2} e^{-s \left(\eta^2 \frac{k}{4} + \frac{2(m+1)h-z}{\beta} \sqrt{1 + \beta^2 \eta^2} \right)} \eta d\eta. \quad (21)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} Z_{m1}(z) &= \frac{2mh + z}{\alpha}; & Z_{m2}(z) &= \frac{(2m+1)h - z}{\alpha}; \\ Z_{m3}(z) &= \frac{2mh + z}{\beta}; & Z_{m4}(z) &= \frac{(2m+1)h - z}{\beta}; \\ R_{m1}(t, z) &= \sqrt{k^2 + 4\alpha^2 kt + 4\alpha^4 Z_{m1}^2}; & T_{m1}(t, z) &= kt + 2Z_{m1}^2 \alpha^2 - Z_{m1} R_{m1}(t, z); \\ R_{m2}(t, z) &= \sqrt{k^2 + 4\alpha^2 kt + 4\alpha^4 Z_{m2}^2}; & T_{m2}(t, z) &= kt + 2Z_{m2}^2 \alpha^2 - Z_{m2} R_{m2}(t, z); \\ R_{m3}(t, z) &= \sqrt{k^2 + 4\beta^2 kt + 4\beta^4 Z_{m3}^2}; & T_{m3}(t, z) &= kt + 2Z_{m3}^2 \beta^2 - Z_{m3} R_{m3}(t, z); \\ R_{m4}(t, z) &= \sqrt{k^2 + 4\beta^2 kt + 4\beta^4 Z_{m4}^2}; & T_{m4}(t, z) &= kt + 2Z_{m4}^2 \beta^2 - Z_{m4} R_{m4}(t, z) \end{aligned}$$

и произведем замены переменных в каждом из четырех подынтегральных выражений (21)

$$\begin{aligned} \frac{\eta^2 k}{4} + Z_m \sqrt{1 + \alpha^2 \eta^2} &= t, & Z_m &= Z_{m1}, Z_{m2}, \\ \frac{\eta^2 k}{4} + Z_m \sqrt{1 + \beta^2 \eta^2} &= t, & Z_m &= Z_{m3}, Z_{m4}. \end{aligned} \quad (22)$$

Получим

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^L|_{r=0} &= -\alpha V_0 \sum_{m=0}^{\infty} \int_{Z_{m1}}^{\infty} e^{-st} \frac{\left(1 + 8 \frac{\beta^2}{k^2} T_{m1}(t, z)\right)^2}{\sqrt{1 + 4 \frac{\alpha^2}{k^2} T_{m1}(t, z)}} \left(1 - \frac{2\alpha^2 Z_{m1}(z)}{R_{m1}(t, z)}\right) dt - \\ &- \alpha V_0 \sum_{m=0}^{\infty} \int_{Z_{m2}}^{\infty} e^{-st} \frac{\left(1 + 8 \frac{\beta^2}{k^2} T_{m2}(t, z)\right)^2}{\sqrt{1 + 4 \frac{\alpha^2}{k^2} T_{m2}(t, z)}} \left(1 - \frac{2\alpha^2 Z_{m2}(z)}{R_{m2}(t, z)}\right) dt + \\ &+ 16V_0 \frac{\beta^3}{k^2} \sum_{m=0}^{\infty} \int_{Z_{m3}}^{\infty} e^{-st} T_{m3}(t, z) \sqrt{1 + 4 \frac{\beta^2}{k^2} T_{m3}(t, z)} \left(1 - \frac{2\beta^2 Z_{m3}(z)}{R_{m3}(t, z)}\right) dt + \\ &+ 16V_0 \frac{\beta^3}{k^2} \sum_{m=0}^{\infty} \int_{Z_{m4}}^{\infty} e^{-st} T_{m4}(t, z) \sqrt{1 + 4 \frac{\beta^2}{k^2} T_{m4}(t, z)} \left(1 - \frac{2\beta^2 Z_{m4}(z)}{R_{m4}(t, z)}\right) dt. \end{aligned}$$

Каждый интеграл в последнем выражении представляет собой оператор преобразования Лапласа, следовательно, подынтегральное выражение есть оригинал, и окончательно

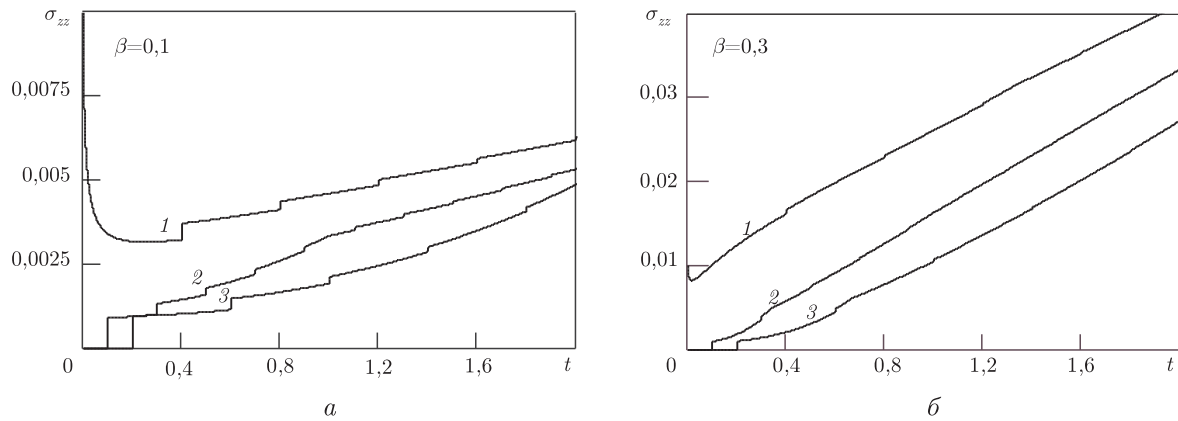


Рис. 2

выражение для напряжения σ_{zz} на оси z имеет вид

$$\begin{aligned}
 \sigma_{zz}(t, z)|_{r=0} = & -\alpha V_0 \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} H(t - Z_{m1}) \frac{\left(1 + 8 \frac{\beta^2}{k^2} T_{m1}(t, z)\right)^2}{\sqrt{1 + 4 \frac{\alpha^2}{k^2} T_{m1}(t, z)}} \left(1 - \frac{2\alpha^2 Z_{m1}(z)}{R_{m1}(t, z)}\right) + \right. \\
 & + \sum_{m=0}^{\infty} H(t - Z_{m2}) \frac{\left(1 + 8 \frac{\beta^2}{k^2} T_{m2}(t, z)\right)^2}{\sqrt{1 + 4 \frac{\alpha^2}{k^2} T_{m2}(t, z)}} \left(1 - \frac{2\alpha^2 Z_{m2}(z)}{R_{m2}(t, z)}\right) - \\
 & - \frac{16\beta^3}{\alpha k^2} \sum_{m=0}^{\infty} H(t - Z_{m3}) T_{m3}(t, z) \sqrt{1 + 4 \frac{\beta^2}{k^2} T_{m3}(t, z)} \left(1 - \frac{2\beta^2 Z_{m3}(z)}{R_{m3}(t, z)}\right) - \\
 & \left. - \frac{16\beta^3}{\alpha k^2} \sum_{m=0}^{\infty} H(t - Z_{m4}) T_{m4}(t, z) \sqrt{1 + 4 \frac{\beta^2}{k^2} T_{m4}(t, z)} \left(1 - \frac{2\beta^2 Z_{m4}(z)}{R_{m4}(t, z)}\right) \right\}. \quad (23)
 \end{aligned}$$

Выражение (23) есть точное аналитическое решение задачи (2), (13). Оно построено таким образом, что m -е члены первых двух сумм формируют m -ю отраженную от границ слоя волну расширения-сжатия, m -е члены третьей и четвертой сумм формируют m -ю отраженную от границ слоя волну сдвига. Удерживая в упомянутых суммах конечное число членов N , получим в избранной точке z значение напряжения с учетом N отражений, справедливое на интервале времени, определяемом неравенством $z/\alpha < t < (2Nh + z)/\alpha$.

4. Приведенные на рис. 2 результаты расчетов выполнены для заданной постоянной скорости $V_0 = 0,01$ проникания тела с параболической фронтальной частью и толщины слоя $h = 0,2$ (в безразмерных обозначениях) при следующих значениях упругих параметров: $\alpha = 1$, $\beta = 0,1$ (рис. 2, а), $\beta = 0,3$ (рис. 2, б).

На рисунке изображены графики развития напряжения в трех характерных точках по толщине слоя: 1 — на лицевой поверхности ($z = 0$), 2 — на срединной линии ($z = h/2$) и 3 — на тыльной поверхности ($z = h$). Скачок нормального напряжения $\sigma_{zz}(t, 0, 0)$ при $t = 0$ на лицевой поверхности слоя имеет следующее значение: $\sigma_{zz}(0, 0, 0) = \alpha V_0(0)$. В середине слоя имеет место удвоенное количество упомянутых скачков, которое обусловлено

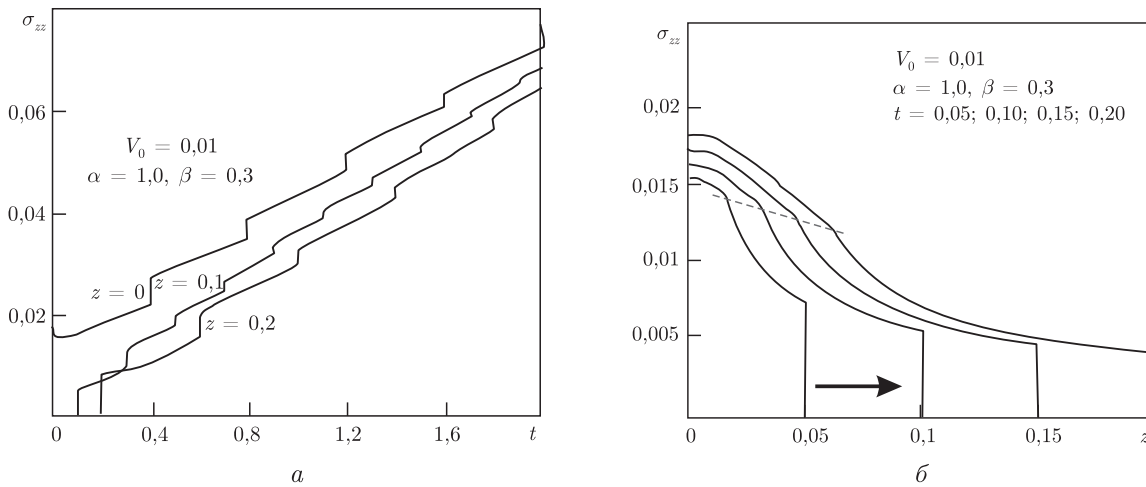


Рис. 3

тем обстоятельством, что в данную точку приходят поочередно волны, отраженные как от лицевой, так и от тыльной поверхности. Со временем имеет место рост напряжения во всех точках на оси z слоя, что обусловлено постоянной скоростью вдавливания. Обратим внимание на скачки напряжения на тыльной поверхности: их величина обусловлена удвоением напряжения вследствие выбранных граничных условий на тыльной грани. Следует отметить существенную зависимость уровня напряженного состояния от значения параметра сдвига β . Сравнение приведенных графиков с аналогичными для плоской задачи (см. рис. 3, а, б, к сожалению, пропущенный в работе [7]) показывает, что в осесимметричном случае отраженные волны затухают быстрее, что естественно.

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции: функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. – Москва: Наука, 1966. – 295 с.
2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. В 2-х т. Т. 1. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. – Москва: Наука; ГИФМЛ, 1969. – 344 с.
3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. В 2-х т. Т. 2. Преобразования Ханкеля. – Москва: Наука; ГИФМЛ, 1969. – 344 с.
4. Горшков А. Г., Тарлаковский Д. В. Динамические контактные задачи с подвижными границами. – Москва: Наука; Физматгиз, 1995. – 352 с.
5. Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Черевко М. А. Дифракция упругих волн. – Киев: Наук. думка, 1978. – 308 с.
6. Кубенко В. Д. Удар затупленных тел о поверхность жидкости или упругой среды // Прикл. механика. – 2004. – 40, № 11. – С. 3–44.
7. Кубенко В. Д. Нестационарное вдавливание затупленного жесткого тела в поверхность упругого слоя // Доп. НАН України. – 2007. – № 4. – С. 58–64.
8. Кубенко В. Д., Марченко Т. А., Старовойтов Э. И. Об определении напряженного состояния плоского упругого слоя при ударе тупым жестким телом о его поверхность // Там само. – 2006. – № 8. – С. 111–114.
9. Механика контактных взаимодействий / Под ред. И. И. Воровича, В. М. Александрова. – Москва: Физматгиз, 2001. – 670 с.
10. Поручиков В. Б. Методы динамической теории упругости. – Москва: Наука, 1986. – 328 с.
11. Sagniard L. Reflection and refraction of progressive seismic waves. – New York: McGraw-Hill, 1962. – 282 p.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 08.05.2007