ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

1 • 2008

МАТЕМАТИКА

УДК 531.36

Член-корреспондент НАН Украины **А. А. Мартынюк**

Общая задача полидинамики на временной шкале

A novel approach to the analysis of polystability of nonlinear systems on time scales is proposed with the use of matrix-valued Liapunov function and its alpha-brilliant derivative. We present the general theorems on stability, uniform asymptotic stability, and instability of the zero polydynamics on time scales.

В данной работе получены условия устойчивости динамической системы на временной шкале в том случае, когда “дельта” и “набла” динамика системы учитываются одновременно. Для этой цели применяется альфа-ромбическая производная функции Ляпунова и обобщенный прямой метод Ляпунова.

Концепция полидинамики нелинейной системы базируется на элементах математического анализа на временной шкале (см. [1–3] и приведенную там библиогр.) и обобщенном прямом методе Ляпунова [5].

1. Вспомогательные результаты. Пусть $\mathbb{T}$ — временная шкала, определяемая как непустое замкнутое подмножество множества вещественных чисел $\mathbb{R}$. *Функции скачка* вперед (назад) определяются соотношениями

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} :\ s > t\} \qquad \text{и} \qquad \rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} :\ s < t\}.$$

При помощи операторов $\sigma(t)$ и $\rho(t)$ текущие значения $\{t\}$ на временной шкале $\mathbb{T}$ классифицируются так:

(а) если $\sigma(t) = t$ ($\rho(t) = t$), тогда точка $t \in \mathbb{T}$ называется *плотной справа* (*плотной слева*);

(б) если $\sigma(t) > t$ ($\rho(t) < t$), тогда точка $t \in \mathbb{T}$ называется *рассеянной справа* (*рассеянной слева*) соответственно.

Зернистость временной шкалы $\mathbb{T}$ определяется формулами

$$\mu(t) = \sigma(t) - t \qquad \text{и} \qquad \nu(t) = t - \rho(t)$$

при скачках вперед (назад).

Наряду с множеством $\mathbb{T}$ будем рассматривать множества $\mathbb{T}^k = \mathbb{T}$, если $b = \inf \mathbb{T}$ является плотным слева, и $\mathbb{T}^k = \mathbb{T} \setminus \{b\}$, если b является рассеянным слева. Аналогично определим множество $\mathbb{T}_k = \mathbb{T}$, если a является плотным справа, и $\mathbb{T}_k = \mathbb{T} \setminus \{a\}$, если a является рассеянным справа минимумом.

Обозначим $\mathbb{T}^k \bigcap \mathbb{T}_k = \mathbb{T}_k^k$ и будем говорить, что $\mathbb{T}$ является равномерной шкалой при всех $t \in \mathbb{T}$, если $\mu(t) = \nu(t)$ при всех $t \in \mathbb{T}$.

Определение 1. Отображение u, определенное на $\mathbb{T}$, является Δ-дифференцируемым на $\mathbb{T}^k$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует W-окрестность $t \in \mathbb{T}^k$ такая, что для некоторого γ (если оно существует) выполняется неравенство

$$|[u(\sigma(t)) - u(s)] - \gamma[\sigma(t) - s]| < \varepsilon|\sigma(t) - s|$$

при всех $s \in W$. В этом случае будем писать $u^{\Delta}(t) = \gamma$.

Определение 2. Отображение u, определенное на $\mathbb{T}$, является ∇-дифференцируемым на $\mathbb{T}_k$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует V-окрестность $t \in \mathbb{T}_k$ такая, что для некоторого θ (если оно существует) выполняется неравенство

$$|[u(\rho(t)) - u(s)] - \theta[\rho(t) - s]| < \varepsilon|\rho(t) - s|$$

при всех $s \in V$. В этом случае будем писать $u^{\nabla}(t) = \theta$.

Определение 3. Отображение u, определенное на $\mathbb{T}$, имеет α-ромбическую производную при всех $t \in \mathbb{T}_k^k$, если и только если отображение u является Δ- и ∇-дифференцируемым и выражается формулой

$$u^{\diamondsuit_\alpha}(t) = \alpha u^{\Delta}(t) + (1-\alpha)u^{\nabla}(t), \qquad \alpha \in [0,1].$$

Заметим, что операторы Δ, ∇ и $\diamondsuit$ не являются, в общем случае, коммутирующими.

2. Постановка задачи. Пусть состояние некоторой нелинейной системы (S) в момент времени $t \in \mathbb{T}$ определяется вектором $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$. На временной шкале $\mathbb{T}$ будем рассматривать следующие подмножества:

$$\mathcal{A} = \{t \in \mathbb{T}:\ \rho(t) = t \text{ и } t < \sigma(t)\}; \qquad \mathcal{B} = \{t \in \mathbb{T}:\ \rho(t) < t \text{ и } t = \sigma(t)\};$$

$$\mathcal{C} = \{t \in \mathbb{T}:\ \rho(t) < t \text{ и } t < \sigma(t)\}; \qquad \mathcal{D} = \{t \in \mathbb{T}:\ \rho(t) = t \text{ и } t = \sigma(t)\}.$$

Без потери общности изложения предположим, что $a \in \mathcal{A} \bigcup \mathcal{D}$ и $b \in B \bigcup \mathcal{D}$ и обозначим эйлерову производную вектора x по t через $\dot{x}(t)$, если она существует.

Предположим, что Δ-динамика нелинейной системы (S) на временной шкале $\mathbb{T}$ описывается системой уравнений

$$x^{\Delta}(t) = f(t, x(t)), \qquad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

где

$$x^{\Delta}(t) = \begin{cases} \dfrac{x(\sigma(t)) - x(t)}{\mu(t)}, & \text{если} \quad t \in \mathcal{A} \bigcup \mathcal{C}; \\ \dot{x}(t) \quad \text{в остальных точках,} \end{cases}$$

и $x \in \mathbb{R}^n$, $f\colon \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Предположим, что ∇-динамика нелинейной системы (S) на временной шкале $\mathbb{T}$ описывается системой уравнений

$$x^{\nabla}(t) = g(t, x(t)), \qquad x(t_0) = x_0, \tag{2}$$

где

$$x^{\nabla}(t) = \begin{cases} \dfrac{x(t) - x(\rho(t))}{\nu(t)}, & \text{если} \quad t \in \mathcal{B} \bigcup \mathcal{C}; \\ \dot{x}(t) & \text{в остальных точках,} \end{cases}$$

и $x \in \mathbb{R}^n$, $g\colon \mathbb{T}_k \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Полидинамика нелинейной системы (S) на временной шкале $\mathbb{T}$ описывается системой уравнений

$$x^{\diamondsuit_\alpha}(t) = F(t, x(t), \alpha), \qquad x(t_0) = x_0, \qquad \alpha \in [0, 1], \tag{3}$$

где $F(t, x(t), \alpha) = \alpha f(t, x) + (1 - \alpha) g(t, x)$ и $x^{\diamondsuit_\alpha}(t)$ — α-ромбическая производная вектора $x \in \mathbb{R}^n$, вычисленная согласно определению 3.

Учитывая (см. [4]), что $x^{\diamondsuit_\alpha}(t) = \dot{x}(t) + O(\max\{\mu(t), \nu(t)\})$ при всех $t \in \mathbb{R}$, систему (3) можно переписать в виде

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t), \alpha) - O(\max\{\mu(t), \nu(t)\}), \qquad x(t_0) = x_0, \qquad \alpha \in [0, 1]. \tag{4}$$

Таким образом, задача полидинамики системы (S) на временной шкале состоит в исследовании поведения решений системы (3) или (4) при различных предположениях о динамических свойствах систем (1) и (2) на соответствующих подмножествах временной шкалы $\mathbb{T}$.

3. Общий подход к анализу полидинамики. Предлагаемый в данной работе подход основан на следующем обобщении прямого метода Ляпунова. А именно, применяется матричнозначная функция $U(t, x)\colon \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ и построенная на ее основе функция

$$v(t, x, \theta) = \theta^{\mathrm{T}} U(t, x) \theta, \tag{5}$$

где $\theta \in \mathbb{R}^2_+$ — некоторый положительный вектор.

Элементы $u_{ij}(t, \cdot)$ матричнозначной функции $U(t, x)$ строятся так: диагональные элементы $u_{ii}(t, \cdot)$, $i = 1, 2$, связаны с подсистемами (1), (2) соответственно и внедиагональный элемент $u_{ij}(t, \cdot)$, $i \neq j$, строится с учетом составной динамики системы (3), т. е. этот элемент учитывает связь между “дельта” и “набла” динамикой систем (1), (2).

Предполагается, что для функции (5) существуют Δ- и ∇-производные вдоль решений систем (1) и (2), которые вычисляются по формулам

$$v^{\Delta}(t, x, \theta) = v^{\Delta}(t, x(t), \theta)|_{(1)} \qquad \text{при} \qquad t \in \mathbb{T}^k \tag{6}$$

и

$$v^{\nabla}(t, x, \theta) = v^{\nabla}(t, x(t), \theta)|_{(2)} \qquad \text{при} \qquad t \in \mathbb{T}_k. \tag{7}$$

Здесь $v^{\Delta}(t, x(t), \theta)$ и $v^{\nabla}(t, x(t), \theta)$ вычисляются согласно правилам вычисления производной сложной функции на временной шкале (см. [1, 2]).

Функция

$$v^{\diamondsuit_\alpha}(t, x, \theta) = \alpha v^{\Delta}(t, x, \theta) + (1 - \alpha) v^{\nabla}(t, x, \theta) \tag{8}$$

называется α-ромбической производной функции Ляпунова (5) на временной шкале, если и только если функция (5) определенно положительная и убывающая и $v^{\diamondsuit_\alpha}(t, x, \theta) \leqslant 0$ на множестве $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{R}^n$ при всех $t \in \mathbb{T}^k_k$.

Таким образом, решение общей задачи о полидинамике системы (3) на временной шкале $\mathbb{T}$ сводится к построению подходящей матричнозначной функции и функции (5) и процессу адаптации прямого метода Ляпунова на основе α-ромбической производной (8) функции Ляпунова.

4. Условия устойчивости и неустойчивости. Далее применяются функции сравнения класса K. Функция $\psi\colon [0,r] \to [0,\infty)$ является функцией сравнения класса K, если и только если она определена, непрерывна и строго возрастающая на $[0,r]$ и $\psi(0)=0$.

Определение 4. Нулевая полидинамика системы (3) является:

(а) *равномерно устойчивой* на $\mathbb{T}_k^k$, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что $\|x(t,t_0,x_0)\|<\varepsilon$ при всех $t\in\mathbb{T}_k^k$, $t>t_0$, как только $\|x_0\|<\delta$;

(б) *равномерно асимптотически устойчивой*, если она равномерно устойчива и существует постоянная $\gamma>0$ такая, что $\lim\|x(t,t_0,x_0)\|=0$ при $t\to+\infty$, как только $\|x_0\|<\gamma$;

(в) *неустойчивой* при фиксированном t_0, если она не является устойчивой в смысле определения 4(а) при фиксированном t_0.

Условия равномерной устойчивости нулевой полидинамики системы (3) содержатся в следующем утверждении (см. [6]).

Теорема 1. *Предположим, что для систем* (1), (2) *и* (3) *построены матричнозначная функция $U(t,x)$ и вектор $\theta\in\mathbb{R}_+^2$ такие, что:*

1) существуют симметричные постоянные 2×2-матрицы A_1 и A_2 и векторные функции сравнения $\varphi_1\in K$ и $\varphi_2\in K$, для которых

$$\varphi_1^T(\|x\|)A_1\varphi_1(\|x\|)\leqslant v(t,x,\theta)\leqslant\varphi_2^T(\|x\|)A_2\varphi_2(\|x\|) \tag{9}$$

при всех $(t,x)\in\mathbb{T}_k^k\times\mathbb{B}$;

2) при всех $(t,x)\in\mathbb{T}_k^k\times\mathbb{B}$ выполняется условие

$$v^{\diamondsuit_\alpha}(t,x,\theta)|_{(3)}\leqslant 0 \qquad \text{при всех} \qquad \alpha\in[0,1];$$

3) в неравенстве (9) *матрицы A_1 и A_2 положительно определенные.*
Тогда нулевая полидинамика системы (3) *равномерно устойчива.*

Доказательство. При выполнении условия *3* теоремы 1 неравенство (9) может быть переписано в виде

$$\lambda_m(A_1)\overline{\varphi}_1(\|x\|)\leqslant v(t,x,\theta)\leqslant\lambda_M(A_2)\overline{\varphi}_2(\|x\|), \tag{10}$$

где $\lambda_m(A_1)>0$ и $\lambda_M(A_2)>0$ — максимальное и минимальное собственные значения матриц A_1 и A_2 соответственно, функции $\overline{\varphi}_1$ и $\overline{\varphi}_2\in K$-классу и удовлетворяют неравенствам

$$\overline{\varphi}_1(\|x\|)\leqslant\varphi_1^{\mathrm{T}}(\|x\|)\varphi_1(\|x\|) \qquad \text{и} \qquad \overline{\varphi}_2(\|x\|)\geqslant\varphi_2^{\mathrm{T}}(\|x\|)\varphi_2(\|x\|)$$

при всех $x\in D$.

Из условия *2* теоремы 1 следует, что

$$v^{\diamondsuit_\alpha}(t,x,\theta)=\begin{cases} v^{\nabla}(t,x,\theta)\leqslant 0 \qquad \text{при} \qquad \alpha=0;\\ \alpha v^{\Delta}(t,x,\theta)+(1-\alpha)^{\nabla}(t,x,\theta)\leqslant 0 \qquad \text{при} \qquad 0<\alpha<1;\\ v^{\Delta}(t,x,\theta)\leqslant 0 \qquad \text{при} \qquad \alpha=1.\end{cases} \tag{11}$$

Из оценки (10) и условий (11) получаем неравенство

$$v(t,x(t),\theta)\leqslant v(t_0,x_0,\theta) \tag{12}$$

при всех $t \in \mathbb{T}_k^k$ и $\alpha \in [0,1]$. Из оценки (10) следует, что для любого $t_0 \in \mathbb{R}$ и $x_0 \in \mathbb{B}$ существует постоянная $\delta_0 > 0$ такая, что

$$v(t_0, x_0, \theta) < \lambda_M(A_2)\overline{\varphi}_2(\delta_0), \tag{13}$$

как только $\|x_0\| < \delta_0$.

Для любого $\varepsilon > 0$ выберем $\delta_1 > 0$ так, что

$$\lambda_M(A_2)\overline{\varphi}_2(\delta_1) < \lambda_m(A_1)\overline{\varphi}_1(\varepsilon). \tag{14}$$

Вычислим $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1\}$ и покажем, что если $\|x_0\| < \delta$, то при выполнении условий теоремы 1 имеет место неравенство $\|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon$ при всех $t \geqslant t_0$, $t \in \mathbb{T}_k^k$. Пусть это не так, тогда найдется $t_1 \geqslant t_0$ такое, что

$$\|x(t_1, t_0, x_0)\| = \varepsilon \qquad \text{и} \qquad \|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon \tag{15}$$

при всех $t \in [t_0, t_1)$. Из неравенств (10), (12)–(14) имеем

$$\lambda_m(A_1)\overline{\varphi}_1(\varepsilon) = \lambda_m(A_1)\overline{\varphi}_1(\|x(t_1)\|) \leqslant v(t, x(t_1), \theta) \leqslant v(t_0, x_0, \theta) < \lambda_M(A_2)\overline{\varphi}_2(\delta).$$

Полученное противоречие доказывает утверждение теоремы 1.

Теорема 2. *Предположим, что:*

1) для системы (3) *выполняются условия 1, 3 теоремы 1;*

2) существует симметричная 2×2*-матрица* $D(t) = D(\mu(t), \nu(t))$*, максимальное собственное число* $\lambda_M(t)$ *которой удовлетворяет условиям:*

(а) $\lambda_M(t) > 0$ *при всех* $t \in \mathbb{T}_k^k$, $0 < \mu(t) < \infty$, $0 < \nu(t) < \infty$*;*

(б) $\int\limits_{t_0}^{t} \lambda_M(s)\Diamond_\alpha s \to \infty$ *при* $t \to \infty$*;*

3) существует векторная функция сравнения $\varphi_3 \in K$*-классу такая, что*

$$v^{\Diamond_\alpha}(t, x, \theta) \leqslant -\varphi_3^T(\|x)\|)D(t)\varphi_3(\|x)\|)$$

при всех $(t, x) \in \mathbb{T}_k^k \times \mathbb{B}$ *и при всех* $\alpha \in [0,1]$.

Тогда нулевая полидинамика системы (3) *асимптотически устойчива.*

Доказательство. Из условия *1* теоремы 2 следует, что функция $v(t, x, \theta)$ определенно положительная и убывающая. Условие *2(а)* теоремы 2 позволяет преобразовать условие *3* теоремы 2 к следующему:

$$v^{\Diamond_\alpha}(t, x, \theta) \leqslant -\lambda_M(t)\overline{\varphi}_3(\|x)\|), \tag{16}$$

где $\overline{\varphi}_3(\|x)\|) \geqslant \varphi_3^{\mathrm{T}}(\|x)\|)\varphi_3(\|x)\|)$ при всех $x \in \mathbb{B}$, $\varphi_3 \in K$.

При выполнении условий теоремы 2 выполняются все условия теоремы 1 и, следовательно, нулевая полидинамика системы (3) устойчива. Предположим, что при выполнении условий теоремы 2 существует решение $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ системы (3) такое, что $\lim \|x(t)\| \neq 0$ при $t \to +\infty$. При этом существует постоянная $a > 0$ такая, что $a < \|x(t)\| < H < +\infty$ при всех $t \in \mathbb{T}_k^k$, $t \geqslant t_0$.

Для α-ромбической производной функции (10) имеет место фундаментальное соотношение

$$\int\limits_{t_0}^{t} v^{\Diamond_\alpha}(s,x(s),\theta)\Diamond_\alpha s = \alpha\int\limits_{t_0}^{t} v^{\Delta}(s,x(s),\theta)\Delta s + (1-\alpha)\int\limits_{t_0}^{t} v^{\nabla}(s,x(s),\theta)\nabla s =$$
$$= v(t,x(t),\theta) - v(t_0,x_0,\theta). \qquad (17)$$

Учитывая соотношение (17), согласно условию *3* теоремы 2 получим

$$v(t,x(t),\theta) = v(t_0,x_0,\theta) + \int\limits_{t_0}^{t} v^{\Diamond_\alpha}(s,x(s),\theta)\Diamond_\alpha s \leqslant$$
$$\leqslant v(t_0,x_0,\theta) - \int\limits_{t_0}^{t} \lambda_M(s)\overline{\varphi}_3(\|x(s)\|)\Diamond_\alpha s \leqslant v(t_0,x_0,\theta) - \overline{\varphi}_3(\|x_0\|)\int\limits_{t_0}^{t}\lambda_M(s)\Diamond_\alpha s. \qquad (18)$$

Функция $v(t,x,\theta)$ положительно определенная и убывающая, в то время как согласно оценке (18) $v(t,x(t),\theta) \to -\infty$ при $t \to +\infty$. Полученное противоречие доказывает, что $\lim\|x(t)\| = 0$ при $t \to +\infty$. Этим теорема доказана.

Теорема 3. *Предположим, что:*

1) для системы (3) *выполняются условия 1, 3 теоремы 1;*

2) существует симметричная 2×2*-матрица* $E(t) = E(\mu(t),\nu(t))$*, максимальное собственное значение* $\lambda_M(t)$ *которой удовлетворяет условиям*

(а) $\lambda_M(t) > 0$ *при всех* $t \in \mathbb{T}_k^k$, $0 < \mu(t) < \infty$, $0 < \nu(t) < \infty$*;*

(б) $\int\limits_{t_0}^{t}\lambda_M(s)\Diamond_\alpha s \to \infty$ *при* $t \to +\infty$*;*

3) существует векторная функция сравнения $\varphi_4 \in K$*-классу такая, что*

$$v^{\Diamond_\alpha}(t,x,\theta) \geqslant \varphi_4^T(\|x)\|)E(t)\varphi_4(\|x)\|) \qquad (19)$$

при всех $(t,x) \in \mathbb{T}_k^k \times \mathbb{B}$ *и при всех* $\alpha \in [0,1]$*;*

4) точка $x = 0$ *принадлежит границе области* $G \subset \mathbb{B}$*;*

5) функция $v(t,x,\theta) = 0$ *на множестве* $\mathbb{T}_k^k \times (\partial G \bigcap B_\varepsilon)$*, где* $B_\varepsilon = \{x\colon \|x\| < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0 -$ $-\,\mathrm{const}$.

Тогда нулевая полидинамика системы (3) *неустойчива.*

Доказательство. При выполнении условия *1* теоремы 3 функция $v(t,x,\theta)$ положительно определена и ограничена. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $x_0 \in \partial G\bigcap B_\varepsilon$ и $\alpha > 0$ такие, что $\alpha \geqslant v(t_0,x_0,\theta) > 0$ при всех $\theta \in \mathbb{R}_+^2$ и $t_0 \in \mathbb{T}_k^k$. Из условия *2(а)* следует, что неравенство (19) может быть представлено в виде

$$v^{\Diamond_\alpha}(t,x,\theta) \geqslant \lambda_M(t)\overline{\varphi}_4(\|x)\|) \qquad (20)$$

при всех $(t,x) \in \mathbb{T}_k^k \times \mathbb{B}$ и $\alpha \in [0,1]$, где $\overline{\varphi}_4(\|x\|) \leqslant \varphi_4^{\mathrm{T}}(\|x\|)\varphi_4(\|x\|)$, $\overline{\varphi}_4 \in K$-классу.

Далее, пока $x(t,t_0,x_0)\in G$, на основе (17), (20) и условия *2(б)* получаем

$$\alpha \geqslant v(t,x(t),\theta) = v(t_0,x_0,\theta) + \int\limits_{t_0}^{t} v^{\Diamond_\alpha}(s,x(s),\theta)\Diamond_\alpha s \geqslant$$

$$\geqslant v(t_0,x_0,\theta) + \overline{\varphi}_4(\|x_0\|)\int\limits_{t_0}^{t}\lambda_M(s)\Diamond_\alpha s \tag{21}$$

для любого $(t,x)\in\mathbb{T}_k^k\times\mathbb{B}$ и $\alpha\in[0,1]$. Из неравенства (21) следует, что решение $x(t)$ должно покинуть область G в некоторый момент $t^*\in\mathbb{T}_k^k$. Однако при выполнении условия *5* теоремы 1 решение $x(t)$ не может покинуть область G через границу G, принадлежащую B_ε. Поэтому решение $x(t)$ покинет область G, а это означает неустойчивость нулевой полидинамики системы (3). Теорема доказана.

В заключение среди открытых проблем полидинамики на временной шкале отметим следующие:

— построение последовательных приближений для решения системы (3) и исследование их сходимости;

— получение условий существования решений системы (3), их единственность и инвариантность;

— получение условий продолжимости решений системы (3) и анализ их зависимости от зернистости временной шкалы;

— построение критериев устойчивости нулевой полидинамики на основе теорем 1–3 этой работы;

— получение условий ограниченности и диссипативности решений системы (3);

— разработка способов оценки влияния возмущений на Δ- и ∇-динамику систем (1), (2) соответственно;

— установление условий распада регулярных решений в системе (3) и переход к хаотическому режиму.

1. *Anderson D., Bullock J., Erbe L. et al.* Nabla dynamic equations on time scales // Pan-Amer. Math J. – 2003. – **14**. – P. 1–47.
2. *Bohner M., Peterson A.* Dynamic equations on time scales. An introduction and applications. – Boston: Birkhäuser, 2001. – 358 p.
3. *Hilger S.* Analysis on measure chains – a unified approach to continuous and discrete calculus // Results Math. – 1990. – **18**. – P. 18–56.
4. *Sheng Q.* A view of dynamic derivatives on time scales from approximations // J. Difference Equat. and Appl. – 2005. – **11**, No 1. – P. 63–81.
5. *Martynyuk A. A.* Qualitative methods in nonlinear dynamics. Novel approaches to Liapunov's matrix functions. – New York: Marcel Dekker, 2002. – 301 p.
6. *Martynyuk A. A.* Stability of motion: the role of multicomponent Liapunov functions. – London: Cambridge Scientific Publishers, 2007. – 300 p.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 20.12.2006